W6D3
28/4/15

אנליזה הרמונית

בפעם שעברה - אם $\frac{f(x+a)-L}{x}\in L_1(\mathbb{R})$ אז $f(a)=\check{\hat{f}}(a)$.

<u>משפט יחידות</u> אם $f\in L_1(\mathbb{R})$ ו- $\hat f\equiv 0$ אז $f\overset{a.e.}{\equiv}0$

<u>הוכחה</u> ניעזר בכך שטרנספורם פורייה מעביר מכפלה לקונבולוציה ולהיפך, $\widehat{f*g}=\hat f\hat g$. ניקח $g=\chi_{[0,a]}$, אז מהמשפט הקודם $\widehat{f*g}=\hat f\hat g\equiv 0$

נחשב במפורש את הקונבולוציה - $(f*g)(x)=\int_{x-a}^{x}f(y)\,dy$.
פונקציה רציפה (ואפילו רציפה בהחלט) וגזירה כמעט בכל מקום, כאשר הנגזרת זה $h'(x)=f(x)-f(x-a)$ לפי משפט לבג.
בכל נק' a בה קיימת הנגזרת מתקיימים תנאי משפט דיני, ולכן $h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat h(\xi)e^{i\xi x}d\xi=0$. אבל אז h רציפה והיא אפס כמעט בכל מקום. לכן $h\equiv 0$. בפרט $x=0$ - ו נקבל $\int_{-a}^{0}f(y)dy=0$ לכל a. נקבל $\int_{0}^{z}f(y)dy=0$ לכל $z\in\mathbb{R}$ אז שוב לפי לבג זה גזיר a.e. ונגזרת זה $f(z)$. לכן f זה 0 כמעט בכל מקום כנדרש.

<u>דוגמאות</u> 1. $f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$. לפי הגדרה $\hat f(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2}dx\overset{\xi>0}{=}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2}$

נשים לב $\operatorname{Im}z\le 0\Leftarrow\operatorname{Re}(-i\xi z)\le 0$ ולכן אם נשלים את המסילה לחצי מעגל, כאשר האינטגרל על חצי המעגל זה $o(1)$

ולכן $-\int_{-R}^{R}\frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2}=o(1)-2\pi i\,Res_{-ia}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{a^2+z^2}\right)$ בהשאפת R לאינסוף נרצה רק לחשב מה השארית - $Res_{-ai}\frac{e^{-i\xi z}}{a^2+z^2}=\frac{e^{-\xi a}}{-2ia}$ ולכן $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{a}e^{-\xi a}$ בדומה ל- $\xi\le 0$ נקבל $\frac{\pi}{a}e^{\xi a}$

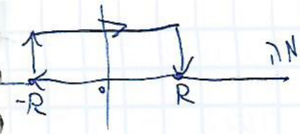
ולכן הנוסחה הכללית זה $\hat f(\xi)=\frac{\pi}{a}e^{-|\xi|a}$

2. $f(x)=e^{-\lambda|x|}$ אז $\hat f(\xi)=\int_{-\infty}^{0}e^{\lambda x-i\xi x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda x-i\xi x}dx$

$\frac{1}{\lambda-i\xi}e^{(\lambda-i\xi)x}\Big|_{x=-\infty}^{0}-\frac{1}{\lambda+i\xi}e^{-(\lambda+i\xi)x}\Big|_{x=0}^{\infty}=\frac{1}{\lambda-i\xi}+\frac{1}{\lambda+i\xi}\overset{\lambda>0}{=}\frac{2\lambda}{\lambda^2+\xi^2}$. ממשפט דיני

נסיק מיד $e^{-\lambda|x|}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{\lambda^2+\xi^2}d\xi$

3. $f(x)=e^{-\lambda x^2}$, $\lambda>0$ אז $\hat f(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x^2-i\xi x}dx$ היינו רוצים להשלים לריבוע $\lambda x^2+i\xi x=\left(\sqrt{\lambda}x+\frac{i\xi}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2+\frac{\xi^2}{4\lambda}$ אז $\hat f(\xi)=e^{-\xi^2/4\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(\underbrace{\sqrt{\lambda}x+\frac{i\xi}{2\sqrt{\lambda}}}_{y}\Big)^2dx=$ $e^{-\xi^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{\lambda}}=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\xi^2/4\lambda}$. ולמעשה צריך קצת ראיות כי y לא ממשי יותר.



אז זה האינטגרל על פני $\mathbb{R}+ib$. צריך רק להבין למה האינטגרלים מצדדים מתאפסים. אבל $\left|\int_I e^{-\lambda z^2}\right| \le |I|\cdot \max_{x\in I}\left|e^{-\lambda z^2}\right|$

$$e^{-\lambda \operatorname{Re} z^2} \geq e^{-\lambda(R^2-b^2)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

מקרה חשוב $\lambda=1/2$ נותן $\widehat{e^{-x^2/2}}=\sqrt{2\pi}\,e^{-\xi^2/2}$ (מעין "ערך עצמי").

<u>משפט</u> $f\in L_1$ [illegible] רציפה לחלוטין וגם $f'\in L_1$, אז $\widehat{f'}(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi)$.

<u>הוכחה</u> מהגדרת רציפות לחלוטין $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt$. האינטגרל מתכנס כי $f'\in L_1(\mathbb{R})$ ולכן קיים $\lim_{x\to\pm\infty}\int_0^x f'(t)dt$. אבל גם $f\in L_1$ ולכן הגבול זה 0. כעת,

$$\widehat{f'}(\xi)=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} f'(x)e^{-i\xi x}dx = \lim_{A\to\infty} \underbrace{f(x)e^{-i\xi x}\Big|_{-A}^{A}}_{\to 0} - \int_{-A}^{A} f(x)(-i\xi)e^{-i\xi x}dx = i\xi\hat{f}(\xi)$$

<u>משפט</u> $f\in L_1(\mathbb{R})$, $-ixf(x)=g$, אז $\hat{f}\in C^1$ ו- $\hat{f}'=\hat{g}$.

<u>הוכחה</u>
$$\frac{\hat{f}(\eta+\xi)-\hat{f}(\xi)}{\eta}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\frac{e^{-i\eta x}-1}{\eta}dx=\int_{-\infty}^{\infty}[-ixf(x)]e^{-i\xi x}\underbrace{\frac{e^{-i\eta x}-1}{-i\eta x}}_{\text{נקודתית}\ \to 1}dx$$

אבל גם, אם נסמן $x\eta=a$, $\left|\frac{e^{-ia}-1}{-ia}\right|=\left|\frac{2\sin a/2}{a}\right|\le 1$ ולכן האינטגרל מתכנס (כי $g\in L_1$). לכן מותר להחליף גבול ואינטגרל ולקבל $\hat{f}'(\xi)=\int g(x)e^{-i\xi x}dx=\hat{g}(\xi)$.

כמובן שאפשר להמשיך אינדוקטיבית 2 משפטים אלה:
אם $f,\dots,f^{(k)}\in L_1$ אז $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(i\xi)^k}\widehat{f^{(k)}}(\xi)$,
ואם $f, x^k f\in L_1$ (<u>תרגיל בית</u>: מכאן נובע ש- $x^i f(x)\in L_1$ לכל $0\le i\le k$), אז $\hat{f}\in C^k(\mathbb{R})$ ו- $\hat{f}^{(k)}(\xi)=(i\xi)^k f(\xi)$.

מכאן נסיק גם גירסה אינסופית:
נגדיר S מחלקה של פונקציות גזירות אינסוף פעמים, כך שלכל k,i, $x^i f^{(k)}(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$. אז $f\in S \Longleftrightarrow \hat{f}\in S$, ו-1-1 $\hat{}: S\to S$ העתקה <u>על</u> (כי פונקציה גזירה מקיימת תנאי דיני בכל נקודה, ואז ל- $f=\frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)$ נקבל $\hat{f}=g$). ■

נרצה להרחיב ^ גם ל-L_2, ע"י מציאת תת-מרחב צפוף שעליו ^ <u>מוגדר היטב</u> <u>וחסום</u>.

ראשית, <u>יחידה אפרוקסימטיבית</u>:
משפחה $k_\lambda\in L_1(\mathbb{R})$ תיקרא יח' אפרוקסי' אם:

- $\forall \lambda, \int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)\,dx = 1$
- $\|k_\lambda\| < M$ לאיזשהו M סופי (לא תלוי ב-λ).
- $\forall \delta>0 \quad \int_{|x|>\delta} |k_\lambda(x)|\,dx \longrightarrow 0$

<u>טענה</u> תחת תנאים אלה, $k_\lambda * f \xrightarrow{L_1} f$ לכל $f \in L_1$.

לפני הוכחה נוכיח

<u>משפט</u> לכל $1 \le p < \infty$, $f \in L_p$, $f_y \xrightarrow{y\to 0} f$ בנורמת L_p.

כלומר, העתקה $y \longmapsto f(y)$ רציפה.

<u>הוכחה</u> לכל $A>0$ נגדיר $f^A = \chi_{[-A,A]} f$, אז $f^A \xrightarrow{L_p} f$. נבחר g בקירוב $\|f-g\|_p < \varepsilon$

ע"י שינוי של g בפונקציה רציפה נוכל לקחת $h \in C[-A,A]$ עם $\|g-h\| \le \varepsilon$

ו- $h(\pm A) = 0$. אז
$$\|f_y - f\|_p \le \underbrace{\|(f-g)_y - (f-g)\|_p}_{\le 2\varepsilon} + \underbrace{\|(g-h)_y - (g-h)\|}_{\le 2\varepsilon} + \|h_y - h\|$$
$$\|h_y - h\| \le \left(\int_{-2A}^{2A} \sup |h(x-y) - h(x)|^p\right)^{1/p} \le \omega(h,y)^p \cdot (4A)^{1/p}$$

כלומר $\|h_y - h\|_p \xrightarrow{y\to 0} 0$, ולכן $\|f_y - f\|_p \xrightarrow{y\to 0} 0$, כי

$\varepsilon > 0$ נבחר שרירותית.