

אנליזת הרמוניות

בטיאור שומר הזכרנו $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$ אם $f \in L_1(\mathbb{R})$ נרצה
 שיתקיים $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

נבחין מתכונות בסיסיות של טרנספורם פורייה:
 $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$ - $f, g \in L_1(\mathbb{R})$
 $\widehat{af} = a\hat{f}$ - a זוגי ממ"ש, $a=1$
 $\|\hat{f}\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}$

הוכחה ראשית, ברור $\|f\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| d\xi$ נבדוק רציפות
 במ"ש: $\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [e^{-ix\xi} - e^{-ix\eta}] dx$

ואכן $|e^{-ix\xi} - e^{-ix\eta}| \leq 2 \cdot e^{-1/2} \cdot \|f\|_{L_1}$ במ"ש כי הפרש חסום

והחסום לא תלוי ב- ξ, η אם $L_1 \rightarrow C(\mathbb{R})$ איזוטרופי חסום

משפט (למה של רמן-לבנ) $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$ אם $f \in L_1(\mathbb{R})$

הוכחה 1 רציפה ואם מספיק רחבה לקבוע צפופה. אולם בנקודות מרוחקות
 נחלק אותם מספיק $f = \chi_{[a,b]}$ במצב כזה $\int_a^b e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{-i\xi} e^{-ix\xi} \Big|_a^b = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{-i\xi}$
 והמונה ≤ 2 ואם $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$ כי (המסביר) ∞

משפט $f \in L_1(\mathbb{R})$ מקיימת תנאי ריט-א-ב. כלומר $\left[\frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} \right] \in L_1(\mathbb{R})$ ויש
 $\hat{f}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi$

הוכחה נבחר $a=0$ הבה נסתכל על $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}}{-2ix} dx =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(x)-L)}{ix} e^{-ix\xi} - e^{ix\xi} dx = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}}{ix} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \frac{dx}{x} = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 2\pi L$$

כמו אזור פורייה, נשקף $f_y(x) = f(x-y)$ אז $f_y(x) = e^{iy\xi} f(x)$ אם $f_y(x) = f(x)$ אז $\hat{f}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)$
 אז $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_y(\xi) d\xi$ קשר בלתי קושי $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ובהר $\hat{f}g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi$
 אינלסריות, $\|\hat{f}\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1}$ הוכחת גורל לאו של אור פורייה