W5D3
21/4/15

אנליזה הרמונית

התחלנו להוכיח משפט על סדרות מוגדרות חיוביות בשאר כיוון קשה:

a_n מ"ח $\Leftarrow$ $\exists\, \varphi\in C(\mathbb{T})^*$ אי שלילי עם $a_n=\hat{\varphi}(n)=\overline{\varphi(e^{int})}$

הוכחנו למה של Fejér - $p\in\mathcal{T}$ אי שלילי הוא מהצורה $|Q|^2$.

נגדיר בהתחלה את φ רק על פולינומים - $P\in\mathcal{T}$, $P(t)=\sum_{k=-N}^{N}c_k e^{ikt}$.

נגדיר $\varphi(P)=\sum_{k=-N}^{N}\overline{a_k}c_k$. נבדוק $\varphi(P)\geq 0 \longleftarrow P>0$

אבל במצב כזה $P=|Q|^2$ - $Q(t)=\sum_{|k|\leq N}d_k e^{ikt}$ אז $Q\cdot\overline{Q}=\sum_{|k|\leq N}\sum_{|l|\leq N}d_k\overline{d_l}e^{i(k-l)t}$

לכן $\varphi(P)=\sum_{|k|\leq N}\sum_{|l|\leq N}d_k\overline{d_l}\,a_{k-l}\geq 0$ ולכן φ אי שלילי על מרחב הפולינומים.

למה הוא רציף? על פולינומים שמקבלים ערכים ממשיים (אי-שליליים), $\|P\|_{C(\mathbb{T})}\mathbb{1}-P\geq 0$

ולכן $\varphi(\|P\|_{C(\mathbb{T})}\mathbb{1})-\varphi(P)\geq 0$, כלומר $\|P\|_{C(\mathbb{T})}\cdot a_0\geq\varphi(P)$. אבל זה נכון גם ל-$-P$ -

ולכן לכל פולינום ממשי. נוכל לחלק כל פולינום לחלק ממשי ומדומה וזה

יוכיח חסימות (ולכן רציפות) של φ. מצפיפות נוכל להרחיב

לסגור של $\mathcal{T}$, כלומר לכל $C(\mathbb{T})$ [כי $\sigma_n * f\rightrightarrows f$].

באופן כללי זה אומר (ריס קקוטני) שקיימת מידת בורל סופית μ כך ש-

$$\overline{a_n}=\int_{\mathbb{T}}e^{int}d\mu$$

יהי H הילברט, $U\in L(H)$ אוניטרי צמוד לעצמו. $f\in H$.

ניקח $H_f=\overline{\mathrm{span}(U^n f)}$. נטען ש-$\langle U^n f,f\rangle$ מוגדרת חיובית -

$$\sum\sum_m a_{n-m}z_n\overline{z_m}=\sum_n\sum_m\langle U^n f,U^m f\rangle z_n\overline{z_m}=\langle\sum_n z_n U^n f,\sum_m z_n U^m f\rangle=\|\sum z_n U^n f\|\geq 0$$

לכן יש μ עם $a_n=\int e^{-int}d\mu$. e^{int} בסיס למרחב $L_2(\mathbb{T},\mu)$

כלומר, יש איזומטריה $T: H_f\to L_2(\mathbb{T},d\mu)$ ע"י $U^n f\to e^{int}$. למה איזו?

$$\langle\sum_k c_k U^k f,\sum_l d_k U^k f\rangle=\sum_{k,l}c_k\overline{d_k}\langle U^k f,U^l f\rangle=\sum_{k,l}c_k\overline{d_l}\int e^{-i(k-l)t}d\mu=$$

$$\int\left(\sum_k c_k e^{-ikt}\right)\cdot\overline{\left(\sum_l d_l e^{-ilt}\right)}d\mu$$

ול-μ יש המשכה יחידה ל-$H_f=\overline{\mathrm{span}\{U^n f\}}$. אם $\varphi=\sum_k c_k U^k f$ אז $U\varphi=\sum_k c_k U^{k+1}f$ ולכן $TU\varphi=e^{-it}T\varphi$.

משפט ארגודי של פון נוימן H הילברט, U אוניטרי, $E=\ker(U-I)$, $P=P_E$ הטלה אורתוגונלית. אז לכל $f\in H$ מתקיים $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}U^k f = Pf$

הוכחה ע"י האיזומטריה T נוכל להניח $U=M_{e^{-it}}$ אופרטור המכפלה ב- e^{-it} במצב כזה $\frac{1}{N}\sum U^k f=\frac{1}{N}\frac{e^{-iNt}-1}{e^{-it}-1}$, h_N חסום בערך מוחלט ע"י 1 (שמתקבל ב-0) ובכל $t\neq 0$, $h_N(t)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$

כלומר $(h_N f)(t)\longrightarrow \chi_{\{0\}}f(0)$, ו- $|h_N f|\le|f|$. יש התכנסות נקודתית וחסומה ולכן גם התכנסות ב- L_2.

הגיע הזמן לצאת מהמעגל!

טרנספורם פוריה

לכל f ב-$[-T,T]$ נוכל לכווץ/להרחיב ל- $[-\pi,\pi]$ ולעשות טור פוריה.

כלומר, נגדיר פונקציה עבור 2π-מחזורית $g(s)=f(\frac{T}{\pi}s)$.

כאשר $g(s)=\sum_{-\infty}^{\infty}\hat g(n)e^{ins}$, אז $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat g(n)e^{in\frac{\pi}{T}t}$. אבל

$$\hat g(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tfrac{T}{\pi}s)e^{-isn}ds=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)e^{-it\frac{\pi}{T}n}dt$$

כאשר f נתמכת קומפקטית, נוכל לקחת אותה עם מחזור T שיכיל את כל התומך ואז בתחום עליו f נתמכת $f(t)=\sum_n\frac{1}{2T}\cancel{e^{in\frac{\pi}{T}t}}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-in\frac{\pi}{T}(x-t)}dx$.

לשם פשטות נגדיר $H(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i2\pi\xi(x-t)}dx$, אז $f(t)=\sum\frac{1}{2T}H(\frac{n}{2T})$, סכום רימן של H. במקרה טוב היינו מצפים שזה יתכנס ל- $\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)d\xi$

לכן נוכל לחשב טרנספורם פוריה ($\cap$- $f\in L_1(\mathbb{R})$ למשל),

ע"י $\hat f(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx$, כך ש- $H(\xi)=\hat f(2\pi\xi)e^{i2\pi t}$