

אנליזה הרחוקית

Y. Katznelson, An introduction to harm. ana.

H. Helson, Harmonic Analysis.

אטאליה הרמונית - 'סימאריק' א תחום השקרה.

פונקציות המוגדרות ~~הן~~ ^{הן} מוגדרות מחדש מרחב $\mathbb{D}$ (בהרף $\mathcal{D}$) $[-\pi, \pi]$ ~~...~~ $f(t) \sim f(e^{it})$

דד תבורה קוואנט'סיר - ואסן מאור סימטריה - אסל τ $f_{\tau}(t) = f(t-\tau)$

נרמון דיפוזיבי דרך קבוצת המצאות של $f(t) = e^{int}$ תת מרחב של M_n

למה - $f_z(t) = e^{-int_z} f(t)$ נוצר של סתם מתקצות אפוקצות פשוטות בלבד.

לור פור"ה וארצן פור"ה, גאלי פור"ה, ורגל שזול אל גאליס: החל קמ"ס זאה קמות

המספרים.

נתחיל מחשב סוג של פרויקט קוורטר: קסתי:

$$p = \sum_{n=1}^N a_n e^{int}$$

טריטוט

ממחול ($N \geq$) איז פאטאם $\mathcal{F}_N$ פאר סכום פונקטן $\mathcal{F}_N$ און סטאטוסט

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \delta_{n,m}$ - זיהוי אורתוגונליות

הקואלטה היא $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$

$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ נובל ארבעה נקודות באופן $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$? ומה $\hat{\hat{f}}(\lambda) = f(-\lambda)$

ב n f במצב כשי $\hat{F}(n)e^{int}$ יקרא לור מוריה $\frac{1}{\sqrt{n}}$ f

$$(c \cdot f)(n) = c \cdot f(n) \quad , \quad (f+g)(n) = f(n) + g(n) \quad \text{sk} \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi}$$

הפונקציה $f(t) = e^{-int} \hat{f}(\omega)$

$$(\hat{f}_\tau)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-i\omega(s+\tau)} ds = e^{-i\omega\tau} \hat{f}(\omega)$$

משפט $f \in C([a, b])$ ו- $f'(a)$ קיימת, אז אר סור"ה של f מתבסס ב- $t=a$ ו- $f(a)$

מכונה מתחיל מנקודה $a=0$ $-f(a)=0$ פונקציה על ה טור $t \in [-a, a]$ $g(t) = \frac{f(t)}{e^{t-1}}$

כך שה' תהיה רצויה. למשל פרמננטל 2-0

$$f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g(n-1) - g(n)) \quad \text{p.d.} \quad f(t) = (e^{it} - 1)g(t) = e^{it}g(t) - g(t) \quad \text{p.d.} \quad \text{p.d.}$$
$$0 \leq k \leq N-1 \quad \hat{g}(-N-L) - \hat{g}(N) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) = 1$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = 0 = f(0) \quad \text{pfi} \quad N \rightarrow \infty \quad \text{co}$$

מה במקרה כולו? נגזר פונקצית זרם אחרת $h(t) = f(t-a) - f_a$ ה מקיימת את

משפט המקרה הקרוס ולכן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) - \hat{f}(n)$ כל ω $\hat{h}(n)$

$$0 \neq n \text{ זה } \hat{f}(n) e^{ina} - f(a) = \hat{f}(0) - \hat{f}(n) \text{ לכן הסכום צריך להיות } \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ina} \hat{f}(n) = f(a) \text{ כנראה.}$$

ננסה להכליל - כל מה שהיינו צריכים זה הצורה "טובה" של g .
מה קורה עבור $g \in L_2$ - e^{int} מורמת אורתונורמלית ולכן יש גילגול.

$$\|g\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2 \text{ וכן בפרט } \hat{g}(n) \rightarrow 0 \text{ אם במקרה זה.}$$

$$\text{נחשב } \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+a) - L}{x} \in L_2 \text{ וכל } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{ina} = L \text{ אז}$$

$$\text{הוכחה בדיוק כמו קודם, רק שפעם } g(x) = \frac{f(x+a) - L}{x} \text{ (מאחר ככה).}$$

זה קורה בפרט כאשר $|x| < L - f(x+a)$ איננו $\gg \varepsilon$ בסביבה של L .

הסתכלנו על מרחב סגור יותר והכללנו את התוצאה אליו. נשקף בצורה דומה:

$$\text{למעשה } f \in L_2 \text{ אז לכל } n \text{ מתקיים } \|\hat{f}(n)\|_2 \leq \|f\|_2.$$

$$\text{הוכחה (טריוויאלית)} \quad \|f\|_2 = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right\|_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \|f\|_1$$

$$\text{מסקנה: לכל } f \in L_2 \text{ מתקיים } \hat{f}(n) \rightarrow 0 \text{ כ-} n \rightarrow \infty.$$

$$\text{הוכחה } L_2 = \overline{C[-\pi, \pi]} \text{ (למעשה, לפעמים מכירים את } L_2 \text{ כמרחב של } C).$$

כלומר, אם $\varepsilon > 0$ קיים $g \in C[-\pi, \pi]$ עם $\|g - f\|_2 < \varepsilon$ וכל n ~~אז~~ $|\hat{f}(n) - \hat{g}(n)| < \varepsilon$ (אז $|\hat{f}(n)| < \varepsilon + |\hat{g}(n)|$ וכן $\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{f}(n)| = 0$ וכן $\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{g}(n)| = 0$).

אכן י.

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+a) - L}{x} \in L_2 \text{ ו-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{ina} = L \text{ אז}$$

$$\text{הוכחה כמו בפעמים הקודמות.}$$

זה טרף יפה איננו חוש יותר, $|x| < L - f(x+a)$ איננו $\gg \varepsilon$.