

משחקים שיתופיים - סיכום החומר

הגדרות בסיסיות:

משחק שיתופי: זה זוג (v, N) כאשר $N = [n]$ קבוצה של שחקנים במשחק, $v: P(N) \rightarrow R$ פונקציית ערך שנותנת לכל קואליציה (תת קבוצה של שחקנים) את הערך שלה במשחק הנ"ל. במשחקים שיתופיים נתעניין בכוח של קבוצות ושל שיתוף פעולה של השחקנים כדי לשפר את ערכם והרווח האישי והקבוצתי שלהם. כמו כן נדרוש $v(\emptyset) = 0$.

משחק מונוטוני: משחק שמקיים שלכול שתי קואליציות $S \subseteq T$ מתקיים $v(S) \leq v(T)$. לא כול המשחקים הם כאלה, למרות שזה נשמע אינטואיטיבי.

משחק אדיטיבי: משחק שמקיים שלכול $S \cap T = \emptyset$ שתי קואליציות, $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ יקרא משחק אדיטיבי.

משחק סופר אדיטיבי: v יקרא משחק סופר אדיטיבי אם לכול שתי קואליציות S, T זרות מתקיים $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. כלומר משתלם להתאגד.

משחק סוב אדיטיבי: v יקרא משחק סוב אדיטיבי אם לכול שתי קואליציות S, T זרות מתקיים $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$. גקש

משחק קמור: אם לכול שתי קואליציות S, T מתקיים $v(S \cup T) + v(S \cap T) \leq v(S) + v(T)$. כלומר משתלם להתאגד לקבוצה גדולה יותר. (בשני האגפים לכאורה סופרים החיתוך פעמיים)

(הערה): אפשר לחשוב על משחק כעל מידה בדידה של קבוצות. ולמעשה אם המשחק הוא אדיטיבי וגם מונוטוני וגם $v(N) = 1$ אז זו למעשה מידת הסתברות

הערה: כול משחק על n שחקנים אפשר לתאר כוקטור באורך $2^n - 1$ כאשר בכל תא בוקטור יהיה הערך של הקואליציה המתאית, כאשר השמטנו את הקואליציה הריקה כי ערכה אפס.

שקילות אסטרטגית: נרצה להגדיר יחס בין משחקים שיתאר ששני המשחקים שקולים מבחינת האופן שבו יש לחלק את העוגה, וההבדל ביניהם הוא רק ערכים מספריים. ואכן נגדיר כי שני משחקים u, v על אותה קבוצת שחקנים הם שקולים אסטרטגית אם קיימים $a > 0, b_1, \dots, b_n$ כך שלכול קואליציה מתקיים $v(S) = a * u(S) + \sum_{i \in S} b_i$ (שיכול להיות שליל) וכמו כן מבצעים המרה בערך, למשל משקלים לדולרים. אפשר לחשוב על כך כעל הכפלה בקבוע והוספת משחק אדיטיבי b .

נשים לב שזה יחס שקילות על משחקים.

משחק מנורמל: נאמר שמשחק הוא מנורמל a - b אם לכול שחקן בודד ערכו הוא a , והערך של כול השחקנים יחד הוא b . (שימוש נפוץ הוא מנורמל 0-1 או 0-0)

סוגי משחקים מיוחדים:

משחק פשוט: משחק שבו לכול $S \in P(N)$ מתקיים $v(S) \in \{0, 1\}$. אפשר לחשוב על זה כעל קואליציות מנצחות ומפסידות למשל.

משחק רוב משוקלל: משחק שבו קיימים $q > 0$ ערך סף, ומשקלים $w_1, \dots, w_n$ כך שלכול שחקן מצוותים משקל. וקואליציה תהיה מנצחת אם סכום משקלי חבריה עובר את הסף q . אם היא מנצחת ערכה הוא 1, אחרת ערכה אפס. נקבל משחק מונוטוני.

משחק שוק: בעולם יש l חומרי גלם אפשריים, שבעזרתם אפשר לייצר מוצרים. כול שחקן במשחק מייצג חברה, כך שלכול חברה יש סל מוצרים התחלתי שהוא וקטור ב R_+^l וגם פונקציית ייצור שמתארת באיזה אופן החברה הזו מסוגלת להפוך חומרי גלם לרווח, וזו פונקציה $f_i: R_+^l \rightarrow R$. לשחקן i נתאים f_i פונקציית ייצור וגם w_i סל מוצרים.

בנוסף נדרוש כי הפונקציה f_i היא לא יורדת, כלומר עבור שני וקטורים x, y כך ש x גדול שווה ל y בכול אחת מהקורדינטות אז $f_i(x) \geq f_i(y)$. כלומר אם יש לי ממש יותר משאבים אני יכול לייצר לפחות כמו שיכולתי עם פחות משאבים.

בנוסף נדרוש מ f_i להיות קעורה (כמו $\log$) כלומר עבור $x, y \in R_+^l$ ו $\alpha \in [0,1]$ אז $f_i(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f_i(x) + (1-\alpha)f_i(y)$.

את הערך של קואליציה נגדיר להיות הכי הרבה שהיא מסוגלת לייצר, שזה המקסימום על פני כול הדרכים לחלק את סך המשאבים ההתחלתיים שלהם (או רק חלק מהכמות ההתחלתית, כלומר לא חייבים להשתמש בהכול *free disposal*) בין פונקציות הייצור השונות שברשותם. אם נדרוש שפונקציות הייצור כולן רציפות אז המקסימום קיים כי זה קומפקט.

משחק עץ פורש: נגדיר מערכת עץ פורש להיות (N, V, E, v_0, a, I) כאשר V, E גרף קשיר לא מכוון, v_0 קודקוד מקור, a פונקציית משקל לקשתות חיובית ממש, N קבוצת השחקנים במשחק, ו I פונקציה שמתאימה לכול שחקן קודקוד שאינו המקור. $I: N \rightarrow V \setminus \{v_0\}$. את משחק העץ הפורש על המערכת הזו נגדיר להיות $v(S)$ העלות המינמלית הדרושה לחיבור כול חברי S לקודקוד המקור, כאשר עלות של קשת זה המשקל שלה. (נשים לב שזה משחק עלות, ולא משחק רווח!)

לכול קואליציה S קיימת עלות מינמלית לחיבור כול קודקודיה לקודקוד v_0 . הקשתות שיובילו לעלות הזו יהיו עץ (בהכרח כי העלויות הן חיוביות ממש) והן יהיו עץ פורש לקודקודי S איחוד עם v_0 . העץ הזה הינו תת גרף ונסמן אותו (V^S, E^S) ונקרא לו עץ ההוצאות המינמלי של קואליציה S .

משחק זרימה: נגדיר בעיית זרימה להיות $(N, V, E, v_0, v_1, C, I)$ כאשר (V, E) גרף מכוון, v_0, v_1 קודקודי מקור ויעד בהתאמה, $C: E \rightarrow R^+$ פונקציה שמתאימה לכול קשת את הקיבולת החיובית שלה, N קבוצת השחקנים ו $I: E \rightarrow N$ מתאימה לכול קשת שחקן השולט בה. המטרה תהיה להעביר כמה שיותר זרימה ברשת, כאשר זרימה f היא פונקציה שלכול קשת מתאימה מספר אי שלילי שמתאר כמה זורם דרכה ומקיים שלכול קשת הוא קטן מהקיבולת של הקשת, ולכול קודקוד שאינו המקור או היעד כמו הזרימה שנכנסת שווה לכמות הזרימה שיוצאת.

לכול קואליציה $S \in P(N)$ הערך שלה $v(S)$ הוא כמות הזרימה המקסימלית שאפשר להעביר רק דרך קשתות שבבעלות שחקנים בקואליציה הזו.

משחק פשיטת רגל: יש חברה בעלת E נכסים ובעלת חובות ל n נושים שונים. החוב לכול נושה הוא d_i ונניח כי מתקיים $\sum d_i \leq E$ אחרת המשחק לא מעניין. את ערך של כול קואליציה נגדיר להיות $v(S) = \max(0, E - \sum_{i \notin S} d_i)$. כלומר כול קואליציה מצפה לקבל לפחות את כול מה שנשאר אחרי שכול השאר קיבלו את כול חובם.

השאלה המרכזית שעולה בכול המשחקים הללו היא איך לחלק את הרווח הכולל שהשיגו הקואליציות? או במשחק של תשלום אז איך לחלק את התשלומים? מה תהיה חלוקה הוגנת שתספק את כול המשתתפים?

הליבה:

הגדרה:

המטרה שלנו היא למצוא חלוקה יציבה של הרווח הכולל כך שלא תהיה קואליציה שתוכל לקבל תוצאה טובה יותר אם היא תפרוש ותלך לבד. לא תמיד תהיה קיימת חלוקה כזו. ולכן נגדיר עבור משחק v את הליבה שלו להיות כול החלוקות, שזה וקטורים N ממדיים $(x_1, \dots, x_n)$ כך שלכול קואליציה $S \in P(N)$ מתקיים $v(s) \leq \sum_{i \in S} x_i$ וכמו כן $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. כלומר מחלקים את כול הכסף כך שאף קואליציה לא יכולה לקבל יותר טוב לבדה.

נשים לב שאילו הליבה הם למעשה מערכת של אי שוויונים לינאריים, שלא תמיד יש להם פתרון.

הליבה ושקילות אסטרטגית:

אם u, v שקולים אסטרטגית כך ש $u(S) = a * v(S) + b(S)$ אז מתקיים כי הליבה של u היא הפעלה הטרנספורמציה האפינית על הליבה של v . כלומר מתקיים:
$$core(u) = \{a(x_1, \dots, x_n) + (b_1, \dots, b_n) | (x_1, \dots, x_n) \in core(v)\}$$

מיידית מהגדרה אפשר להוכיח הכלה בכיוון אחד, כך שכול וקטור בליבה של v אחרי שנפעיל עליו את הטרנספורמציה נקבל וקטור בליבה של u . מצד שני אפשר להציג את v כטרנספורמציה של u כי כפי שראינו שקילות אסטרטגית זה יחס שקילות, וכך נקבל הכלה בכיוון ההפוך.

הליבה היא קבוצה קמורה:

נשים לב שהליבה היא למעשה חיתוך של הקבוצות $\{x \mid x(s) \geq v(s)\}$ לכול s קואליציה, ולבסוף חיתוך עם הקבוצה $\{x \mid x(N) = v(N)\}$. תחילה נשים לב שהקבוצות הללו הן קבוצות של וקטורים ב R^n . כעת נשים לב שכול אחת בנפרד היא קמורה, ולכן החיתוך הסופי שלהם גם הוא קמור ולכן הליבה שהיא החיתוך שלהם היא קבוצה קמורה. כול אחת מהקבוצות הללו מאופיינת על ידי משוואה לינארית כלשהי $x(s) = v(s)$ שמגדירה על מישור במרחב שלנו, ולכן כול הוקטורים שנמצאים מצד אחד של המשוואה, כלומר כול הוקטורים שהם $x(s) \geq v(s)$ מהווים חצי מרחב, ובבירור קבוצה קמורה. כמו כן העל מישור עצמו שמקיים $x(N) = v(N)$ הינו בבירור קבוצה קמורה מהיותו על מישור.

מתי הליבה אינה ריקה?

אוסף מאוזן: נגדיר אוסף מאוזן להיות זוג $(\{S_k\}_{k=1}^l, \{\gamma_i\}_{i=1}^l)$ כאשר $\{S_k\}_{k=1}^l$ קבוצה של קואליציות (כלומר תת קבוצות של N), ו $\{\gamma_i\}_{i=1}^l$ קבוצה של מקדמים אי שלילים, כך שמתקיים $\sum_{i=1}^l \gamma_i 1_{S_i} = 1_N$. כאשר 1_A הינו וקטור n מימדי שיש לו אחדות בתאים שמתאימים לאיברים בקבוצה A ואפסים אחרת.

מה ההיגיון בהגדרה? נשים לב שהאילוץ הלינאריים על הערכים של הקואליציות כדי שהליבה לא תהיה ריקה מתרגמים לאחר סכימת האי שוויונים לאילוץ מהצורה של אוספים מאוזנים.

משפט שאפל בונדורובה:

יהי (N, v) משחק שיתופי אז הליבה שלו לא ריקה אם ורק אם לכול אוסף מאוזן $(\{S_k\}_{k=1}^l, \{\gamma_i\}_{i=1}^l)$ מתקיים כי $\sum_{i=1}^l \gamma_i v(S_i) \leq v(N)$

צד ראשון: (ליבה לא ריקה $\leftarrow$ תנאי שאפלי בונדורובה מתקיים)

אם הליבה אינה ריקה, אז קיים וקטור $(x_1, \dots, x_n)$ בליבה, שמקיים שלכול $S \in P(N)$ מתקיים $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ לפי הגדרת הליבה. נניח בשלילה שקיים אוסף מאוזן כלשהו שסותר את תנאי שאפלי-בונדורבה, נסמנו $(\{S_k\}_{k=1}^l, \{\gamma_i\}_{i=1}^l)$. משום שהמקדמים אי שלילים באוסף המאוזן אז יתקיים גם כי לכל $j \in [l]$ ש $\gamma_j \sum_{i \in S_j} x_i \geq \gamma_j v(S_j)$ לכל קואליציה S_j באוסף שלנו. ולכן אם נסכם את אי השוויונים הללו עבור הקואליציות השונות באוסף המאוזן ונשתמש בהנחת השלילה נקבל:

אבל משינוי פשוט של סדר הסכימה נקבל כי מתקיים

$$\sum_{j=1}^l \gamma_j$$

וזאת משום שמדובר באוסף מאוזן אז מתקיים

כי זה למעשה הסכום הממושקל של עמודה אחת באוסף המאוזן, שווה לאחד, כי כול הוקטור הוא וקטור האחדות, ובפרט קורדינטה אחת שלו היא כזו. אזי קיבלנו סתירה להנחת השלילה.

צד שני: (תנאי שאפלי בונדורבה מתקיים $\leftarrow$ ליבה לא ריקה)

תחילה נשים לב שניתן להניח בלי הגבלת הכלליות שהמשחק מנורמל לאחד משלושת המצבים הבאים, או $0 - 0$ או $0 - 1$ או $-1 - 0$. וזאת משום שכול משחק שקול אסטרטגית למשחק מנורמל מבין אחד מהשלושה לעיל, וראינו ששקילות אסטרטגית משמרת ליבה. את השקילות אפשר לראות בקלות על ידי הגדרת וקטור ההזזות להיות $b = a(-v(1), \dots, -v(n))$ וכך נבטיח את הנרמול אפס. ואז לפי הסימן של הביטוי $\sum_{i=1}^n v(i) - v(N)$ יקבע הסימן של הערך הכולל במשחק החדש שלנו, ואז עד כדי כפל בקבוע ננרמל אותו לאחד, מינוס אחד או אפס. כי אם נסמן ב u את המשחק החדש שלנו אז מתקבל $u(N) = av(N) + a(-v(1), \dots, -v(n))$ ומפתיחת סוגריים נקבל כי $u(N) = a(v(N) - \sum_{i=1}^n v(i))$ ולכן הסימן נקבע, ולכן בעזרת a שהוא קבוע חיובי נוכל לנרמל את הערך המוחלט.

מנורמל שלילי:

כעת נשים לב כי לא יתכן שהמשחק שלנו הוא מנורמל $0 - (-1)$ כי אחרת נקבל עבור האוסף המאוזן הטריטוריאלי שהוא פשוט הסינגלטונים שמתקיים: $v(N) < \sum_{i=1}^n v(i) \leq v(N)$ וזו סתירה. כאשר זה נובע מצד אחד מההנחה שתנאי שאפלי בונדורבה מתקיים ומצד שני מההנחה שהמשחק מנורמל שלילי. (הערת אינטואיציה: זה מאוד הגיוני, אם סך הכסף שכול השחקנים יכולים להשיג לבדם גדול מסכום הכסף הכולל אז לא יתכן שנוכל לחלק את כולו באופן שכולם יהיו מרוצים)

מנורמל אפס:

במקרה שהמשחק מנורמל $0 - 0$ (ומקיים תנאי שאפלי בונדורבה) אז קיים ויחיד וקטור בליבה, והוא $x = (v(1), \dots, v(n))$. אזי למען הוכחת המשפט מספיק להוכיח קיום, אבל נראה גם יחידות. אזי נשאר להראות ש $x \in \text{core}(v)$ ואכן תחילה מתקיים $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n v_i = v(N)$ וזו מהגדרת x

ומההנחה שהמשחק מנורמל אפס. כעת תהי קואליציה $S \in P(N)$ כלשהי, צריך להראות שהחלוקה ש x מציע מספקת אותה. ואכן נתבונן באוסף המאוזן הבא $1_S \cup \{1_{\{i\}} : i \notin S\}$ עם המקדמים 1. קל לראות שזה אכן אוסף מאוזן. נפעיל את תנאי שאפלי בונדורבה על האוסף הזה נקבל כי מתקיים $v(S) + \sum_{i \notin S} v(i) \leq v(N)$ אבל משום שהמשחק מנורמל אפס מתקיים $v(N) = \sum_{i=1}^n v(i)$ ולכן $v(S) + \sum_{i \notin S} v(i) \leq v(N) = \sum_{i=1}^n v(i) \rightarrow v(S) \leq \sum_{i \in S} v(i) = x(S)$ ולכן הוקטור הנ"ל בליבה ובפרט היא לא ריקה.

כמו כן בבירור זה הוקטור היחיד, כי נניח שקיים i עבורו $x(i) \neq v(i)$ אז אם $x(i) < v(i)$ אז בברור זה לא בליבה כי השחקן i אינו מרוצה. אם $x(i) > v(i)$ אז משום שסכומם שווה, כלומר סכום ה $x(i)$ שווה סכום ה $v(i)$ כי המשחק מנורמל אפס, אז בהכרח קיים j עבורו $x(j) < v(j)$ ושוב בסתירה.

מנורמלי חיובי:

למה טופולוגית: אם שתי קבוצות A, B קמורות וזרות במרחב R^n כך שהפנים של B לא ריק אז קיים על מישור, כך שא $B \cap A$ נמצאות מצדדים שונים של העל מישור. או במילים אחרות קיים וקטור מפריד $p \neq 0$ כך שלכול $a \in A, b \in B$ מתקיים $\langle p, a \rangle \leq \langle p, b \rangle$

המשך הוכחה:

כעת נגדיר לכול קואליציה $S \in P(N)$ את $w_S = 1_S - v(S)1_N$ ונגדיר קבוצה A להיות הקמור של כול הקוטורים w_S עבור כול הקואליציות השונות. כמו כן נגדיר קבוצה B להיות כול הווקטורים שכול הקורדינטות שלהם שליליות ממש. קל לראות ששתי הקבוצות הנ"ל קמורות, הראשונה מהיותה קמור והשנייה בבירור. בנוסף הפנים של B אינו ריק באופן ברור. כעת כדי להשתמש בלמת ההפרדה צריך להוכיח שהן זרות. ואכן:

תהי $x \in A$ אז x הוא צירוף קמור של w_{S_i} עבור קואליציות כלשהן, ולכן $x = \sum_{i=1}^l \alpha_i w_{S_i}$ ולכן אם נזכר בהגדרת w_{S_i} נקבל כי $x = \sum_{i=1}^l \alpha_i (1_{S_i} - v(S_i)1_N)$ אם נראה שיש לפחות קורדינטה אחת ל x שהיא אי שלילית אז נסיים. נזכר כי α_i מקדמים של צירוף קמור ולכן סכומם 1. לכן נסמן ב M את המקסימום של הוקטור $\sum_{i=1}^l \alpha_i 1_{S_i}$, הוא יהיה קטן שווה 1. לכן הוקטור המנורמל $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^l \alpha_i 1_{S_i}$ מכיל קורדינטות בין אפס לאחד, ואחד שווה ממש לאחד, זו שהניבה את המקסימום. לכן מספיק שנראה שכול הקורדינטות של $\sum_{i=1}^l v(S_i)1_N$ קטנות שוות 1, ולכן בוקטור ההפרש, שהוא x עד כדי נירמול, תהיה קורדינטה אי שלילית. אבל $\sum_{i=1}^l v(S_i)1_N$ הוא למעשה וקטור קבוע שכול קורדינטה שלו היא סכום הערכים של הקואליציות המתאימות מהצירוף הקמור.

נתבונן באוסף הבא $\left(\{S_i\}_{i=1}^l, \left\{ \frac{\alpha_i}{M} \right\}_{i=1}^l \right)$ שאינו בהכרח מאוזן, אז נרצה להפוך אותו לאוסף מאוזן. נזכר שהקורדינטות של $\sum_{i=1}^l \frac{1}{M} \alpha_i$ כולן בין אפס לאחד, ולכן נוכל לתקן אותן להיות 1. נתקן אותן כול אחת בנפרד על ידי הוספת וקטור מייצג של סינגלטון, עם הערך המתאים לתיקון הקורדינטה. (או אם הסינגלטון כבר אחת מהקואליציות אז נתן את המקדם שלו). כעת משום שתנאי שאפלי בונדורבה מתקיים על האוסף המאוזן הזה נקבל כי $v(N) = 1 \leq \sum_{i=1}^l \frac{1}{M} \alpha_i + (\text{אפס})$ כאשר האפס הזה מייצג את הערך של הסינגלטונים שהוספנו, אבל המשחק מנורמל $0 - 1$ לכן סינגלטון ערכו אפס. בפרט קיבלנו $\frac{\sum_{i=1}^l \alpha_i}{M} \leq 1$ ולכן קורדינטות הוקטור שרצינו קטנות מאחד, ולכן וקטור x שהוא ההפרש יכול קורדינטה אי שלילית אחת ולכן הקבוצות זרות.

לכן ממשפט ההפרדה יש וקטור P שמפריד בין A, B . קל להבין מאינטואיציה גיאומטרית שכול הקורדינטות של P הן אי שליליות, כי אחרת העל מישור שהוא היה יוצר היה חותך את הקבוצה B .

ואכן נניח בשלילה שהקורדינטה ה- i של P שלילית, אז הוקטור $(-1, \dots, -R, \dots, -1)$ אשר נמצא ב- B תהיה לו מכפלה פנימית גדולה כרצונו עם הוקטור P בפרט גדולה מחלק מהוקטורים ב- A בסתירה להפרדה.

כעת ננרמל את P בסכום הקורדינטות שלו, ונקבל P' שסכום הקורדינטות שלו הוא אחד. (משום ש P לא אפס, וכול הקורדינטות אי שליליות אז סכום הקורדינטות שלו לא אפס ולכן אפשר לחלק) ולכן P' יכול להיות בליבה כי הוא מחלק את $1 = v(N)$.

כעת תהי $S \in P(N)$ קואליציה, נראה שהחלוקה לפי P' מספקת אותה, ולכן P' יהיה בליבה. מהגדרה מתקיים כי $w_S \in A$ וכמו כן הוקטור $(-\varepsilon, \dots, -\varepsilon) \in B$ לכול אפסילון קטן כרצוננו. לכן משום ש P' מפריד בין הקבוצות הללו אז $\langle w_S, P' \rangle \leq \langle -\varepsilon 1_N, P' \rangle = -\varepsilon$ וזאת לפי הגדרת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- R^n .

כמו כן $\langle P(S) - v(S), 1_S \rangle = \langle P(S), 1_S \rangle - v(S) = \langle P', 1_S \rangle - \langle P', v(S)1_N \rangle = \langle P', 1_S - v(S)1_N \rangle = \langle P', w_S \rangle$ ולכן $\langle P(S) - v(S), 1_S \rangle \geq -\varepsilon$ לכול אפסילון, ולכן $P(S) \geq v(S)$ כנדרש. לכן P בליבה ובפרט היא לא ריקה, כמו שרצינו.

ליבות של משחקים ספציפיים:

משחק שוק:

הליבה של משחק שוק אינה ריקה! נזכר שמשום שפונקציות הייצור רציפות נקבל כי לכול קואליציה אכן קיים המקסימום, כלומר אכן קיימת חלוקה של המשאבים שלה שתניב את הערך המקסימלי לקואליציה הזו. כדי להראות שהליבה אינה ריקה נשתמש במשפט שאפלי בונדורבה. ואכן יהי אוסף מאוזן $(\{T_i\}, \{\gamma_i\})$ אזי מתקיים $\sum_{i=1}^l \gamma_i v(T_i) = \sum_{i=1}^l \gamma_i \sum_{j \in T_i} f_j(Z_{T_i}^j)$ כאשר $Z_{T_i}^j$ זה הוקטור שמייצג את המשאבים שקיבלה חברה מספר j לייצור, בחלוקה שהניבה את המקסימום עבור קואליציה T_i ולכן $\sum_{i=1}^l \gamma_i v(T_i) = \sum_{i=1}^l \sum_{j \in T_i} \gamma_i f_j(Z_{T_i}^j)$ נסמן ערך זה ב- A . אם נראה כי מתקיים $A \leq v(N)$ אז תנאי שאפלי בונדורבה יתקיים ונקבל שהליבה אינה ריקה.

נסמן ב- w_i את וקטור המשאבים ההתחלתי של פירמה i . ונזכר כי למעשה $v(N)$ זה המקסימום התפוקה האפשרית על פני כול הדרכים לחלק את סך המשאבים בין פונקציות הייצור השונות של כול השחקנים. לכן אם נראה חלוקה אפשרית כלשהי שמקיימת שהתפוקה שהיא מניבה גדולה מ- A אז בפרט $v(N)$ יהיה גדול מ- A , כי $v(N)$ גדול מכול תפוקה אפשרית, כי הוא המקסימום על התפוקות.

אזי נגדיר חלוקה $x_i = \sum_{k: i \in T_k} \gamma_k Z_{T_k}^i$ כלומר המשאבים שהפירמה i תקבל לייצר מהם הם צירוף קמור על פני כול הקוליאציות בהן הפירמה הזו חברה (מתוך האוסף המאוזן), ולסכום את מה שהיא הייתה מקבלת לייצר ממנו בקואליציה הזו, עם המקדם המתאים.

תחילה נראה שזו אכן חלוקה, ואכן $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k: i \in T_k} \gamma_k Z_{T_k}^i = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in T_k} \gamma_k Z_{T_k}^i$ ולכן נקבל $\sum_{i=1}^m \gamma_k \sum_{i \in T_k} Z_{T_k}^i$. כעת נשים לב כי $\sum_{i \in T_k} Z_{T_k}^i$ זה למעשה סכום המשאבים שיש לקואליציה T_k כי סוכמים על פני כול איברי החלוקה. לכן זה שווה ל- $\sum_{i=1}^m \gamma_k \sum_{i \in T_k} w_i$ ולכן אם נהפוך שוב את סדר הסכימה נקבל $\sum_{i=1}^n w_i \sum_{k: i \in T_k} \gamma_k$, אבל נזכר כי התחלנו מאוסף מאוזן ולכן סכום המקדמים על פני כול קורדינטה הוא אחד, לכן נקבל שזה שווה פשוט ל- $\sum_{i=1}^n w_i$ ולכן זו אכן חלוקה.

כעת נשם לב כי $x = (x_1, \dots, x_n)$ וקטור החלוקה המוצא שהוגדר לעיל, הוא למעשה צירוף קמור של הוקטורים Z_{T_k} שהם וקטורי החלוקות האופטימליות על פני קואליציות האוסף המאוזן. ולכן משום שדרשנו כי פונקציות הייצור הן קעורות נקבל $f_i(\sum_{k: i \in T_k} \gamma_k Z_{T_k}^i) \leq \sum_{k: i \in T_k} \gamma_k f_i(Z_{T_k}^i)$ ולכן גם הסכום שלהם יהיה גדול יותר, ולכן התפוקה של החלוקה החדשה שייצרנו גדולה מ- A כנדרש.

תת משחק: עבור משחק (N, v) וקואליציה $S \in P(N)$ נגדיר את תת המשחק המצומצם לקואליציה S להיות משחק שהשחקנים בו הם חברי S ולכול $T \in P(S)$ נגדיר $v_S(T) = v(T)$. כלומר ערכי הקואליציות נשמרים כול עוד הן חלקיות ל S .

תת משחק של משחק שוק:

v הוא משחק שוק אם ורק אם הליבה של כול תת משחק שלו אינה ריקה! (נקרא **משחק מאוזן בהחלט**)

ואכן אם v משחק שוק אז הליבה שלו לא ריקה כפי שראינו לעיל, וכמו כן קל לראות שכול תת משחק שלו הוא למעשה גם משחק שוק רק בעל פחות שחקנים ולכן גם הליבה שלו אינה ריקה כנדרש.

הכיוון השני ללא הוכחה.

לכן משחק הוא מאוזן בהחלט אם ורק אם הוא משחק שוק

משחק קמור:

למת שקילות למשחק קמור:

משחק v הוא קמור אם ורק אם לכול $S \subseteq T \subseteq N$ ולכול $R \subseteq N \setminus T$ מתקיים כי התרומה לקואליציות קטנות יותר היא קטנה יותר, כלומר: $v(T \cup R) - v(T) \geq v(S \cup R) - v(S)$. וזה מתקיים אם ורק אם לכול $i \in N \setminus T$ מתקיים $v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$. כלומר התרומה השולית של כול שחקן גדולה יותר ככול שהקואליציה אליה הוא מצטרף גדולה יותר.

הוכחה: מתקיים כי אם המשחק קמור אז $v((S \cup R) \cup T) + v((S \cup R) \cap T) \geq v(S \cup R) + v(T)$ אבל $S \subseteq T$ ו $R \cap T = \emptyset$ לשתיהן לכן קיבלנו $v(T \cup R) + v(S) \geq v(S \cup R) + v(T)$ ולכן מהעברת אגפים פשוטה נקבל $v(T \cup R) - v(R) \geq v(S \cup R) - v(S)$ כנדרש.

ברור כי אם התרומה של כול קואליציה גדלה כאשר הקואליציה שהיא מצטרפת גדולה יותר, אז בפרט התרומה של כול שחקן בודד גדלה.

אם התרומה של כול שחקן בודד לקואליציה גדולה יותר ככול שהקואליציה גדולה יותר ביחס להכלה אז לכול שתי קואליציות S, T נרצה להראות שהמשחק קמור. ואכן נסמן $A = S \cap T$ ו $C = S \setminus T$. אם C ריקה אז $S \cap T = S$ ולכן יש הכלה ולכן $v(S \cup T) + v(S \cap T) = v(S) + v(T)$ ובפרט המשחק קמור. אחרת נסמן $C = \{i_1, \dots, i_k\}$ קבוצה כלשהי של שחקנים. משום ש $A \subseteq T$ אז התרומה של כול שחקן בודד כזה A תהיה קטנה מהתרומה שלו ל T לפי ההנחה. בפרט אפשר להוסיף אותם אחד אחרי השני ולקבל על ידי סכימת האי שוויונים והצטמצמות טור טלסקופי שאכן המשחק קמור.

ליבה של משחק קמור אינה ריקה!:

יהי (N, v) משחק קמור, נבנה וקטור בליבה. ואכן נסדר את השחקנים בסדר כלשהו מ 1 עד n , ונגדיר את הוקטור $x = (x_1, \dots, x_n)$ כך שמתקיים $x_i = v(\{1, \dots, i\}) - v(\{1, \dots, i-1\})$ כלומר התרומה השולית של שחקן לכול מי שהיה לפניו בסדר. תחילה קל לראות ש $x(N) = v(N)$ כי שה פשוט טור טלסקופי.

כעת נוכיח באינדוקציה על מספר השחקנים שהוקטור הנ"ל אכן בליבה של משחק קמור. עבור $n = 1$ זה ברור, כי נותנים לשחקן הבודד את כול הערך.

נניח באינדוקציה שהוקטור הזה בליבה לכול משחק קמור בעל $n - 1$ שחקנים ונוכיח עבור n . ואכן אם v משחק קמור בעל n שחקנים מתקיים כי תת המשחק של v שהוא רק על $n - 1$ השחקנים הראשונים הוא גם משחק קמור (כול תת משחק של משחק קמור הוא קמור, ברור) ולכן הוקטור x' (של התת משחק, כלומר באורך $n - 1$) הוא בליבה של התת משחק מהנחת האינדוקציה. כעת תהי $S \in P(N)$ קואליציה כלשהי במשחק v . אם $n \notin S$ אז משום ש x' מזדהה עם x על פני $n - 1$ הקורדינטות הראשונות, ומההנחה x' בליבה של תת המשחק אז $x(S) = x'(S) \geq v(S)$ כנדרש. אם $n \in S$ אז מתקיים

וכעת משום שהמשחק קמור אז כמה ש n תורם ל $N \setminus \{n\}$ גדול מכמה שהוא תורם ל $S \setminus \{n\}$ ולכן אם נוסיף ל $S \setminus \{n\}$ את כמה ש n תורם ל $N \setminus \{n\}$ נקבל יותר מאשר $v(S)$ ולכן $x(S) \geq v(S)$ ולכן הוקטור בליבה כנדרש.

סידור השחקנים: נשים לב שבתחילת ההוכחה סידרנו את השחקנים בסדר מסוים ומצאנו וקטור בליבה שתלוי בסדר הזה. לכול סדר שלא נסדר אותם נקבל וקטור בליבה באותו האופן. ולכן נגדיר w^π להיות וקטור התשלומים בליבה שנוצר באופן לעיל מהתמורה π שמסדרת את השחקנים (כלומר לכול אחד נותנים את התרומה השולית שלו לכול אלה שלפניו בסדר)

קבוצת וובר: היא הקמור של קבוצת הוקטורים $\{w^\pi | \pi \in S_n\}$. כלומר הקמור של וקטורי התשלומים השוליים על פני כול הסידורים האפשריים. משום שעבור משחק קמור כול אחד מהם בליבה, וגם הליבה קמורה, אז הליבה של משחק קמור מכילה את כול קבוצת וובר.

ליבה "הדוקה": עבור משחק קמור מתקיים שלכול קואליציה S קיים וקטור בליבה x שמקיים $x(S) = v(S)$. (חשוב לשים לב שזה לא תמיד המצב, יש משחקים שבהם קואליציה מסוימת תמיד תקבל יותר ממש). וזה נובע מיידיית פשוט מבחירת π כך שחברי S יהיו ראשונים בסדר ויופיעו ברצף. אז w^π יהיה בליבה, והתשלום לקואליציה S יהיה $v(S)$ כטור טלסקופי שרובו יצטמצם.

משחק קמור הוא משחק מאוזן בהחלט: ראינו שהליבה של כול משחק קמור אינה ריקה. כמו כן כול תת משחק של משחק קמור הוא קמור ולכן גם הליבה שלו אינה ריקה, ולכן משחק קמור הוא גם משחק מאוזן בהחלט ולכן גם משחק שוק.

משחק עץ פורש:

עבור משחק עץ פורש (N, V, E, v_0, a, I) שמקיים כי I חד חד ערכית ועל, כלומר לכול שחקן קיים יחיד קודקוד משלו בגרף, ואין קודקודים שאין להם שחקן, אז נתבונן ב (v^N, E^N) כלומר הפתרון האופטימלי לכול השחקנים, אז זה עץ פורש לכול הגרף בעל $n + 1$ קודקודים (כולל v_0) ו n קשתות. לכן לכול שחקן נוכל להתאים קשת, והיא הקשת היוצאת ממנו לכיוון השורש, משום שזה עץ יש רק אחת כזו, ולא יכול להיות ששני קודקודים קיבלו את אותה הקשת, כי רק בכיוון אחד מתקרבים לשורש ובכיוון השני מתרחקים. עבור שחקן i נסמן $e(i)$ להיות הקשת הנ"ל שהתאמנו לו.

במשחק כנ"ל שבו I חד חד ערכית ועל אז הליבה אינה ריקה ומתקיים כי הוקטור שלכול שחקן i מתאים תשלום שהוא $a(e(i))$ הוא בליבה. (כלומר כול שחקן משלם על הקשת שמקרכת אותו לשורש בפתרון של כולם ביחד). נסמן $x = (a(e(1)), \dots, a(e(n)))$ וקטור התשלום שתואר לעיל. ברור כי $x(N) = v(N)$, כי בדיוק מכסה את העלות של בניית העץ הפורש האופטימלי עבור כולם יחד, כי כול אחד משלם על הקשת שלו ויחד מקבלים את כול הקשתות הדרושות, ולכן שילמנו את העלות הכוללת האופטימלית שהיא $v(N)$. כעת צריך להראות שכול קואליציה מרוצה, כלומר $x(S) \geq v(S)$ כלומר לבד היא הייתה משלמת יותר.

ואכן תהי S קואליציה, נתבונן בקבוצת הקשתות $E^* = E^S \cup \{e(i) \mid i \notin S\}$ כלומר הקשתות שמניבות הקישור הטוב ביותר לקודקודי S , ועל זה נוסיף את קשתות השורש של כול שאר הקודקודים, כלומר אינטואיטיבית נרצה לקחת את המחיר הנמוך ש S הצליחה להשיג, להרכיב עליו עוד קשתות ולקבל מחיר נמוך לכולם ביחד. קל לראות כי (V, E^*) הינו עץ פורש לכול הגרף (כי קודקודי S מחוברים למקור, ושאר הקודקודים מחוברים לקודקוד שקרוב לפחות באחד מהם למקור ומסופיות הגרף זה בסוף יסתיים במקור. לכן העלות של קשתות E^* גדולה מ $v(N)$, כי $v(N)$ הוא הגרף הפורש המינמלי. כמו כן העלות של הגרף הפורש הנ"ל היא $C(S) + \sum_{i \notin S} a(e(i))$ כי נשלם על כול קשתות E^S וכול קשת נוספת שהוספנו לא הופיע כבר קודם כי קודקוד אחד לפחות שלה הוא חדש. לכן קיבלנו כי $C(S) + \sum_{i \notin S} a(e(i)) \geq v(N) = \sum_i a(e(i))$ ולכן לסיכום $C(S) \geq \sum_{i \in S} a(e(i))$ ולכן הוקטור x כפי שהוגדר לעיל אכן בליבה כנדרש.

משחק מאוזן בהחלט:

זכור זה משחק שלכול תת משחק שלו הליבה לא ריקה. עד היום ראינו שזה אם ורק אם הוא משחק שוק, וכמו כן משחק קמור הוא משחק מאוזן בהחלט. כעת נראה שמשחק הוא מאוזן בהחלט אם ורק אם הוא מינימום של מספר סופי של משחקים אדיטיביים.

הוכחה:

← אם משחק w הוא מינימום של מספר סופי של משחקים אדיטיביים, כלומר $w(S) = \min v_i(S)$ אז נראה שהוא מאוזן בהחלט. ואכן תהי $S \in P(N)$ קואליציה כלשהי, נראה שהליבה של תת המשחק w_S אינה ריקה. ואכן יהי v_i המשחק שמביא למינימום את $w(S)$ כלומר $w(S) = v_i(S)$. בוודאות קיים כזה כי זה מינימום של מספר סופי. אזי v_i משחק אדיטיבי ולכן יש לו וקטור x בליבה. נראה כי הוקטור x מצומצם רק לקורדינטות של חברי S הוא בליבה של w_S . ואכן מתקיים כי $x(S) = v_i(S) = w(S)$ הוקטור בליבה הוא בדיוק לכול שחקן לתת את הערך שלו, כזה משחק אדיטיבי. וכמו כן $v_i(S) = w(S)$ מההנחה שהמינימום מתקבל על v_i לכן x מחלק הכול. כמו כן לכול $T \in P(S)$ מתקיים $x(T) \geq v_i(T) \geq w(T)$ וזאת משום ש x בליבה של v_i , וכמו כן w תמיד קטן מכול ערכי המשחקים בכול נקודה, כי הוא מינימום. לכן לכול תת משחק של w יש וקטור בליבה ולכן הוא משחק מאוזן בהחלט.

→ יהי w משחק מאוזן בהחלט. נראה לכול $S \in P(N)$ משחק v^S אדיטיבי כך שמתקיים $v^S(S) = w(S)$ וכמו כן לכול קואליציה אחרת $v^S(T) \geq w(T)$ ואז w יהיה המינימום שלהם, ויש מספר סופי מהם. ואכן לכול קואליציה $S \in P(N)$ למשחק המצומצם w^S יש איבר בליבה, נסמנו x_S . אזי מתקיים $x_S(S) = w^S(S) = w(S)$ ולכול תת קואליציה מתקיים $x_S(T) \geq w^S(T) = w(T)$ ולכן זה המשחק האדיטיבי שאנחנו מחפשים, רק צריך להרחיב אותו לקואליציות אחרות, שאינן תת קואליציה של S . ואכן לכול שחקן שאינו ב S במשחק האדיטיבי החדש שאנחנו מגדירים ניתן לו ערך M גדול יותר מכול סכום כול הערכים האחרים, וככה נקבל הנדרש.

משחק זרימה:

משפט: משחק אי שלילי הוא מאוזן בהחלט אם ורק אם הוא משחק זרימה. נוכיח רק כיוון אחד והוא שאם משחק אי שלילי הוא מאוזן בהחלט אז הוא משחק זרימה. תחילה נראה שכול משחק אדיטיבי הוא משחק זרימה, וזה פשוט על ידי הגרף הטריוויאלי שיש בו רק קודקוד התחלה וקודקוד סוף, לכול שחקן יש קשת יחידה, והקיבול שלה הוא השווי שלו במשחק האדיטיבי. כמו כן מינימום של משחקי זרימה הוא משחק זרימה כי פשוט נחבר את רשתות הזרימה אחת אחרי השנייה בטור. לכן משחק מאוזן בהחלט הוא מינימום של מספר סופי של משחקים אדיטיביים, כלומר מינימום של מספר סופי של משחקי זרימה ולכן משחק זרימה.

את הכיוון השני אפשר להוכיח על ידי שמראים שהליבה של משחק זרימה אינה ריקה, כי כול תת משחק של משחק זרימה הוא משחק זרימה, וכך נקבל שמשחק זרימה הוא מאוזן בהחלט.

ערך שאפלי:

נרצה למצוא חלוקה שתמיד קיימת, כלומר בשונה מהליבה שיכול להיות שהיא ריקה. את הערך של כול שחקן נקבע לפי ממוצע התרומה השולית שלו לכול הקואליציות האפשריות.

באופן יותר פורמלי אפשר לחשוב על מרחב מאורעות Ω שהוא פשוט S_n כלומר חבורת התמורות על n שחקנים, כאשר ההסתברות לכול תמורה היא אחידה. כעת לכול שחקן נגדיר משתנה מקרי M_i שהוא התרומה השולית של השחקן הזה לקואליציה שהיא כול השחקנים שבאו לפניו בסדר שמוגדר לפי הפרמוטציה שנבחרה באקראי. ערך שאפלי של כול שחקן הוא $E[M_i]$, כלומר ערך שאפלי של שחקן זה ממוצע התרומה השולית שלו על פני כול הפרמוטציות האפשריות.

- $\sum_{i=1}^n M_i = v(N)$. ואכן עבור פרמוטציה ספציפית π מתקיים כי הסכום הנ"ל הוא פשוט סכום טלסקופי, כי זה סכום מצטבר של תרומות שוליות, שמשאיר רק את האיבר האחרון. ולכן מלינאריות התוחלת $\sum_{i=1}^n E[M_i] = v(N)$, כלומר סכום ערכי שאפלי הוא קבוע ושווה לערך המשחק.

הגישה האקסומטית:

אנחנו מחפשים פונקציית פתרון $\varphi: \{All\ games\} \rightarrow R^n$ כלומר פונקציה שלכול משחק תחזיר לנו וקטור תשלומים שהוא הפתרון. נדרוש שהפונקציה הזו תקיים 4 אקסיומות שנראות לנו סבירות, ואז נראה כי כול פונקציית פתרון שתקיים אקסיומות אלה היא בהכרח ערך שאפלי.

- יעילות: נדרוש כי הפתרון מחלק את כול הכוח, כלומר $\sum_{i=1}^n \varphi(v)_i = v(N)$ לכול משחק v . ואכן ראינו כבר שערך שאפלי אכן מקיים את זה
- אדיטיביות: עבור שני משחקים u, v על אותה קבוצת שחקנים נגדיר את משחק הסכום להיות משחק שלכול קואליציה נותן את סכום הערכים במשחקים המקוריים ולכן נדרוש שיתקיים: $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, כאשר $u+v$ הוא משחק הסכום. (דרישה קצת משונה). קל לראות שערך שאפלי מקיים את זה מלינאריות הממוצע. כלומר לכול שחקן ולכול פרמוטציה יש לינאריות. $M_{(u+v),\pi}(i) = M_{u,\pi}(i) + M_{v,\pi}(i)$.
- סימטריה: תחילה נגדיר שחקנים מתחלפים להיות שחקנים שהתרומה השולית שלהם לכול הקואליציות (שזרות לשניהם!) היא זהה. כעת נדרוש מ φ לקיים שאם במשחק יש שני שחקנים מתחלפים אז הערך שהם מקבלים הוא זהה. כלומר אם i, j מתחלפים במשחק v נרצה $\varphi(v)_i = \varphi(v)_j$. נשים לב שערך שאפלי מקיים את זה: אינטואיטית כי הוא מוגדר על ידי תרומות שוליות ולכן אם התרומות השוליות זהות הערך יהיה זהה. פורמלית אם נתבונן בפונקציה שלוקחת תמורה π ומרכיבה אותה עם החילוף (i, j) אז זו פונקציה חד חד ערכית ועל, על קבוצת התמורות, כאשר מהיותם שחקנים מתחלפים ערך שאפלי לא ישתנה, ולכן לעבור כל כול התמורות זה שקול ללעבור על כול התמורות לאחר הרכבה עם החילוף, ולכן הממוצע ישאר זהה.
- שחקן סכום אפס: שחקן יקרא שחקן אפס אם התרומה השולית שלו לכול קואליציה היא אפס. נדרוש כי $\varphi(v)$ עבור שחקן כזה תהיה אפס. קל לראות שערך שאפלי מקיים את זה.

קיים ויחיד ערך פתרון שמקיים האקסיומות והוא ערך שאפלי:

את הקיום ראינו. נוכיח את היחידות:

תחילה נבין שכול משחק הוא למעשה וקטור $2^n - 1$ מימדי, שהוא למעשה הערך של כול קואליציה למעט הקבוצה הריקה שהערך שלה תמיד אפס. נרצה למצוא בסיס למרחב הוקטורי הנ"ל. ואכן נגדיר את המשחקים הבאים: לכול קואליציה $T \in P(N)$ נגדיר משחק u_T שלכול קואליציה S יתן ערך אחד אם היא מכילה את T ואפס אחרת. נשים לב שהוקטורים של משחקים אלה הם בלתי תלויים ולכן מהווים בסיס לקבוצת כול המשחקים. לכן כול משחק v הוא צירוף לינארי יחיד של המשחקים הנ"ל כלומר $v = \sum_{\phi \neq T \subseteq N} \gamma_T u_T$ כאשר γ_T מקדמים ממשיים. תהי ψ פונקציית פתרון כלשהי $\psi: \{Games\} \rightarrow R^n$ המקיימת את ארבע האקסיומות. מאדיטיביות מתקיים כי ערך הפתרון לכול משחק v הוא: $\psi(v) = \sum_{\phi \neq T \subseteq N} \psi(\gamma_T u_T)$.

כעת נתבונן במשחק $\gamma_T u_T$. משום ש ψ מקיימת יעילות נקבל כי $\sum_{i=1}^n \psi(\gamma_T u_T)_i = u_T(N) \gamma_T$ כלומר סכום הערכים בפתרון צריך להיות שווה לערך המשחק כולו. כמו כן מהגדרת u_T נקבל $u_T(N) = 1$ ולכן סכום ערכי הפתרון עבור המשחק $\gamma_T u_T$ זה פשוט γ_T .

כמו כן עבור שחקן $i \notin T$ מתקיים שהוא שחקן סכום אפס במשחק $\gamma_T u_T$, כי לא יכול להיות שהוא הצטרף לקבוצה וערכה עלה, כי אם T לא הייתה מוכלת בקואליציה אז גם לאחר הוספתו היא לא מוכלת. לכן לכול שחקן כזה יתקיים $\psi(\gamma_T u_T)_i = 0$ מאקסיומת שחקן אפס.

עבור שחקנים $i, j \in T$ הם חייבים להיות שחקנים מתחלפים. כי לכול קואליציה שזרה לשניהם אז היא לא מכילה את שניהם, ולכן הוספת אחד מהם לא תשפר את מצבה, אלא רק הוספת שניהם. לכן התוספת שלהם לכול קואליציה היא זהה ולכן הם מתחלפים, לכן מהאקסיומת הסימטריה הם חייבים לקבל אותו הערך.

ולכן סך הכול יתקיים עבור המשחק $\gamma_T u_T$ כי לכול שחקן $i \in T$ הפתרון ψ נותן לו ערך $\frac{\gamma_T}{|T|}$ ולכול שחקן $j \notin T$ הפתרון ψ נותן לו ערך אפס. לכן $\psi(\gamma_T u_T)$ הוא וקטור שבתאים שמתאימים לשחקנים ששיכים ל T יופיע $\frac{\gamma_T}{|T|}$ ובתאים האחרים יופיע אפס. נשים לב כי עבור $\gamma_T = 1$ נקבל כי $\psi(u_T)$ הוא למעשה וקטור שחלק מהתאים שלו אפס, וחלק מהתאים שלו $\frac{1}{|T|}$, לכן בבירור קיבלנו שעל פני משחקים כאלה ψ היא הומוגנית. כלומר $\psi(\gamma_T u_T) = \gamma_T \psi(u_T)$ וזה פשוט מיידית מהכפלת הוקטור בקבוע. לכן יש הצגה יחידה ל $\psi(v)$ כקומבינציה לינארית של וקטורי הבסיס u_T ולכן $\psi(v)$ יחיד! כלומר קיבלנו כי $\psi(v) = \sum_{\phi \neq T \subseteq N} \frac{\gamma_T}{|T|} u_T$ וזו הצגה יחידה. ולכן ערך פתרון שמקיים האקסיומות הוא יחיד, ובפרט שערך שאפלי מקיים את זה אז ערך שאפלי הוא יחיד.

הצגה מפורשת לערך שאפלי:

נשים לב שעבור השחקן i אם בסדר מסוים הקואליציה S מופיעה ממש לפני i בסדר, אז התרומה בסדר הזה תהיה התרומה השולית של i ל S . לכן ערך שאפלי של שחקן מסוים יהיה לעבור על כול הקואליציות שלא מכילות אותו, ולסכום על הסיכוי שהקואליציה הזו מופיעה ממש לפניו בסדר, כפול התרומה השולית של השחקן לקואליציה הזו.

אקסיומה חלופית:

נזכר כי אקסיומת האדיטיביות היא קצת משונה ולא אינטואיטיבית, לכן נרצה להחליף אותה במשהו יותר הגיוני ועדיין לקבל שרק ערך שאפלי מקיים את התנאים הללו. נדרוש את עקרון התרומה השולית שאומר שערך שאפלי תלוי אך ורק בתרומות השוליות, ואכן הדרישה היא שעבור שני משחקים u, v ושחקן i , אם לכול קואליציה S כך ש $i \notin S$ מתקיים שהתרומה השולית של i ל S

במשחק v שווה לתרומה השולית במשחק w , אז ערך שאפלי של השחקן i צריך להיות שווה בשני המשחקים.

תחילה קל לראות שערך שאפלי אכן מכן תכונה זו, כי כזכור הוא מוגדר לפי התרומות השוליות בלבד.

כעת נשים לב כי יעילות + סימטריה + עקרון התרומה השולית גוררים יחד את עקרון שחקן האפס. כי עבור שחקן אפס כלשהו וקטור התרומות השוליות שלו הוא וקטור האפס, שזה כמו הוקטור של שחקן במשחק האפס. במשחק האפס כול שחקן מקבל אפס מיעילות וסימטריה, ולכן מעקרון התרומה השולית ערך שאפלי של שחקן אפס צריך להיות שווה לערכו במשחק האפס, ולכן ערכו אפס.

לכן נראה שכול ערך פתרון שמקיים יעילות, סימטריה, עקרון התרומה השולית הוא בהכרח ערך שאפלי וכך נוכיח יחידות.

יהי משחק v , נגדיר $I(v) = \{S \in P(N) | \exists T \subseteq S \text{ s.t. } v(T) \neq 0\}$ כלומר כול הקואליציות שיש להן תת קבוצה שערכה לא אפס. כמו כן לכול קואליציה S נגדיר משחק v^S להיות $v^S(T) = v(S \cap T)$ נשים לב שהמשחק הזה הוא על כול השחקנים המקוריים, בשונה ממשחק מצומצם שראינו בעבר.

תחילה נשים לב כי לכול קואליציה $S \in I(v)$ מתקיים $I(v - v^S) \subseteq I(v)$ אבל ההכלה היא ממש, כלומר אין שוויון. ואכן אם $T \in I(v - v^S)$ אז קיימת $A \subseteq T$ כך ש $(v - v^S)(A) \neq 0$ ולפי הגדרה של משחק ההפרש $v - v^S(A) = v(A) - v^S(A)$ ולכן לפחות אחד מהם לא אפס, ולכן קיימת קואליציה, או A עצמה או $A \cap S$ שהערך שלה שונה מאפס ולכן $A \in I(v)$ ולכן $I(v - v^S) \subseteq I(v)$. מצד שני $S \in I(v)$ אבל לכול קואליציה $B \subseteq S$ מתקיים $v(B) = v^S(B)$ ולכן $(v - v^S)(B) = 0$ לכול תת קואליציה ולכן $S \notin I(v - v^S)$ ולכן ההכלה היא ממש.

כעת נוכיח את יחידות ערך פתרון שמקיים האקסיומות הנ"ל, באינדוקציה על $|I(v)|$. אם הגודל הוא אחד אז בהכרח הקואליציה היחידה שערכה אינו אפס הוא N , וערך כול שאר הקואליציות הוא אפס. לכן קל לראות שכול השחקנים סימטריים, כי לכול קואליציה שחסרים לה שני שחקנים התרומה של כול אחד תהיה אפס, ולכן מיעילות ומעקרון הסימטריה הפתרון הוא יחיד, והוא מחלק שווה בשווה את הערך בין כולם, שזה מזדהה עם שאפלי.

נניח באינדוקציה עד $k - 1$ שערך הפתרון $\psi(v)$ הוא יחיד ושווה לערך שאפלי ונוכיח עבור k . נזכר שהדבר שעליו עושים האינדוקציה הוא הגודל של $I(v)$.

ואכן תהי $S \in I(v)$ ויהי $i \notin S$, נראה כי $\psi(v)_i$ חייב להזדהות עם ערך שאפלי. ואכן נתבונן במשחק $v - v^S$ אזי כפי שראינו $|I(v - v^S)| < |I(v)|$ ולכן מהנחת האינדוקציה ψ מזדהה עם ערך שאפלי על המשחק $v - v^S$. אם נראה שהתרומות השוליות של i זהות במשחק v ובמשחק $v - v^S$ אז מעקרון התרומות השוליות נקבל שהערך שלו במשחק $v - v^S$ הוא כמו הערך שלו במשחק v . ואכן תהי T קואליציה כך ש $i \notin T$ אז מתקיים

$$(v - v^S)(T \cup \{i\})$$

אבל $i \notin S$ ולכן $v^S(T \cup \{i\}) = v(S \cap (T \cup \{i\})) = v(S \cap T) = v^S(T)$ ולכן $v^S(T \cup \{i\}) = v(S \cap (T \cup \{i\})) = v(S \cap T) = v^S(T)$ כלומר שוויון בתרומות השוליות. לכן ערך הפתרון למשחק v עבור השחקן i לפי ψ יהי כמו הערך שלו במשחק $v - v^S$ שזה מהנחה מזדהה עם שאפלי על המשחק הזה. ואכן נשים לב כי

$$Sh_i(v - v^S)$$

$$\sum_{i \in S} \psi_i$$

אבל $(v - v^S)(R \cup \{i\}) - (v - v^S)(R) = v(R \cup \{i\}) - v(R)$ כי $i \notin S$. לכן ערך מתקיים $Sh_i(v - v^S) = Sh_i(v)$ ולכן קיבלנו הנדרש. (לחילופין יכלנו להשתמש בעובדה שערך שאפלי מקיים את עקרון התרומות השוליות ולכן יהיה שווה בין המשחק v ו $v - v^S$).

עבור i שחקן שמקיים כי $i \in S$ לכול $S \in I(v)$ נראה שכול שניים כאלה מתחלפים. ואכן אם i, j שניים כנ"ל אז לכול קואליציה $T \cap \{i, j\} = \emptyset$ הקואליציות $T \cup \{i\}, T \cup \{j\}$ שתיהן לא שייכות ל $I(v)$ כי כול קואליציה שם מכילה גם את i וגם את j . לכן התרומה של i, j לקואליציה הנ"ל היא זהה והיא אפס. לכן הם שחקנים סימטרים ולכן מתחלפים ולכן ערכם יהיה שווה. אזי אם נסמן $\bar{S}$ את החיתוך של כול הקבוצות ב $I(S)$ יתקיים כי $i, j \in \bar{S}$ ובנוסף מיעילות של הפתרון ψ והעברת אגפים ומהעובדה שעבור שחקנים $k \notin \bar{S}$ כבר הוכחנו שקילות לערך שאפלי, והעובדה שערך שאפלי מקיים יעילות:

אבל ראינו שהשחקנים סימטריים, כלומר כולם מקבלים אותו הדבר בפתרון ψ וגם בשאפלי, לכן נקבל $\psi_i(v) = Sh_i(v)$ לכול $i \in \bar{S}$ וגם עבור $i \notin \bar{S}$ ולכן שאפלי הוא הפתרון היחיד כנדרש.

דוגמא לערך שלא מקיים כול האקסיומות:

ערך באנזהף: תוחלת התרומות השוליות של כול שחקן לכול הקואליציות שלא מכילות אותו, כאשר כול קואליציה כזו נבחרת באקראי בסיכוי $\frac{1}{2^{n-1}}$

הגרעינון:

עד עכשיו ראינו שתי אפשרויות חלוקה, האחת הליבה שהיא קבוצה של חלוקות אפשריות אך לפעמים היא ריקה והשנייה היא ערך שאפלי שהיא פתרון נקודתי שתמיד קיים. כעת נגדיר פתרון שלישי שינסה לקרב לכול קואליציה את $v(S)$ ויבטיח שכול שחקן בודד יקבל לפחות את מה שהוא היה יכול לעשות לבד.

הפרש מאופטימום: לכול וקטור חלוקה x של $v(N)$ נגדיר את המרחק שלו מ v באופן הבא: לכול קואליציה S נגדיר $e(S, x) = v(S) - x(S)$ כלומר כמה חסר בחלוקה כדי לספק את קואליציה S . נזכר שהליבה היא קבוצת החלוקות שמקיימת שההפרש הנ"ל אי חיובי לכול קואליציה.

כעת נמין את $e(S_k, x)$ לכול הקואליציות S_k בסדר יורד. יש $2^n - 1$ קואליציות, ולכן לאחר המיון נקבל וקטור $2^n - 1$ מימדי. נסמן אותו $\theta(x)$ כאשר $\theta_i(x)$ הוא $e(S_j, x)$ כאשר הקואליציה S_j היא במקום ה i בסדר ההפרשים מהאופטימום.

יחס סדר לקסיקוגרפי:

עבור שני וקטורים n מימדים x, y נאמר ש $x \geq y$ לקסיקוגרפית אם הקורדינטה הראשונה שבה הם שונים מקיימת כי $x_i > y_i$ (כאשר מתחילים משמאל).

הגדרת הגרעינון:

עבור משחק (N, v) נגדיר את הגרעינון $Nu(v)$ להיות קבוצת כול הוקטורים $x \in R^n$ כך ש $x(N) = v(N)$ כלומר הם חלוקה, בנוסף $x(i) \geq v(i)$, ולכול חלוקה אחרת y מתקיים ש $\theta(x) \geq \theta(y)$ לקסיקוגרפית מ $\theta(y)$. כלומר x הוא החלוקה שמביא למינימום לקסיקוגרפי את ההפרשים מהאופטימום. הרעיון הוא להביא לכך שכמה שיותר הם אי שלילים, או לחילופין המרחק מכמה שקואליציה קיבלה לכמה שהיא רוצה לקבל הוא כמה שיותר קטן.

אי ריקות הגרעינון:

עבור משחק שמקיים $\sum_{i=1}^n v(i) \leq v(N)$ כלומר שאפשר לנרמל אותו ל $0 - 0$ או ל $0 - 1$ אז הגרעינון אינו ריק.

ואכן נסדר הקואליציות בסדר כלשהו $S_1, \dots, S_{2^n-1}$ ונגדיר $f_i(x) = e(S_i, x)$ כלומר פונקציה שלכול וקטור חלוקה תחזיר את ההפרש מהאופטימום שהוא מניב לקואליציה S_i . בבירור $f_i(x)$ פונקציה רציפה ב x כפונקציה לינארית. כמו כן אם נתבונן בוקטור $\theta(x)$ אז הקורדינטה הראשונה שלו $\theta_1(x)$ היא למעשה $\max_{i=1}^{2^n-1} f_i(x)$ כלומר מקסימום סופי של פונקציות רציפות ולכן פונקציה רציפה ב x . עבור $\theta_j(x)$ כלשהו יתקיים שהוא $\{f_1, \dots, f_{2^n-1}\}$, $|S_j| = 2^n - 1 - j$ $\text{Min}\{\text{Max}(S_j) | S_j \subseteq \{f_1, \dots, f_{2^n-1}\}, |S_j| = 2^n - 1 - j\}$ ולכן הוא גם רציף כמינימום ומקסימום של רציפות.

כעת נתבונן בקבוצה הוקטורים x שמקיימים $x(N) = v(N)$ וגם $x(i) \geq v(i)$, בבירור זו קבוצה קומפקטית ולא ריקה כי הנחנו $\sum_{i=1}^n v(i) \leq v(N)$ ולכן θ_1 מקבלת עליה מינימום. נסמן C_1 כול הוקטורים שהקורדינטה הראשונה שלהם היא המינימום של θ_1 , בבירור גם C_1 קומפקטית ולא ריקה ולכן θ_2 תקבל עליה מינימום, וכך נגדיר C_2 להיות כול אלה שבשתי הקורדינטות הראשונות קיבלנו מינימום וגם זו קבוצה קומפקטית ולא ריקה, וכך נמשיך הלאה ונגיע ל C_{2^n-1} ונראה שהיא לא ריקה, וזו בדיוק הגרעינון. לכן הגרעינון לא ריק כנדרש.

נקודתיות הגרעינון:

אם $\sum_{i=1}^n v(i) \leq v(N)$ אז ראינו כבר שהגרעינון אינו ריק, עכשיו נראה שהוא מכיל נקודה יחידה. ואכן יהיו שני וקטורים x, y בגרעינון. משום שהיחס הלקסיקוגרפי הוא סדר מלא נקבל כי $\theta(x) \geq \theta(y)$ וכמו כן $\theta(x) \leq \theta(y)$ ולכן $\theta(x) = \theta(y)$. נשים לב כי $\theta(x), \theta(y)$ מגדירים כול אחד סדר על הקואליציות $\theta(x) = (e(S_1, x), \dots, e(S_{2^n-1}, x))$, $\theta(y) = (e(R_1, y), \dots, e(R_{2^n-1}, y))$. כעת נשים לב כי $\frac{x+y}{2}$ גם כן חלוקה, מקמריות קבוצת החלוקות. $\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(e\left(T_1, \frac{x+y}{2}\right), \dots, e\left(T_{2^n-1}, \frac{x+y}{2}\right)\right)$. משום ש $\theta(x) = \theta(y)$ אז בפרט יש שוויון בכול קורדינטה וגם בראשונה. לכן $e(R_1, y) = e(S_1, x)$ לכן $v(R_1) - y(R_1) = v(S_1) - x(S_1)$ בנוסף מתקיים $e\left(T_1, \frac{x+y}{2}\right) = \frac{e(T_1, x) + e(T_1, y)}{2}$ ממעברים אלגבריים פשוטים. משום ש θ מסודרת בסדר יורד לכול חלוקה נקבל כי $e(S_1, x) \geq e(T_1, x)$ וגם $e(R_1, y) \geq e(T_1, y)$ ולכן נקבל

$$e(S_1, x) = e(T_1, x)$$

אבל משום ש x בגרעינון מתקיים $\theta(x) \leq \theta\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ולכן גם בקורדינטה הראשונה, ולכן חייב להיות שוויון בקורדינטה הראשונה כי יש א"ש בשני הכיוונים. לכן

אבל כול אחד מהמחברים גדול בצד אחד מאשר בצד השני ולכן יש שוויון כלומר $e(T_1, x) = e(S_1, x)$ וגם $e(T_1, y) = e(S_1, y)$. כלומר המקסימום עבור x, y מתקבל באותה הקואליציה! אפשר להמשיך באינדוקציה ולקבל שכול הערכים מתקבלים באותה הקואליציה, כלומר הסדר ש x, y משרים על הקואליציות הוא זהה, ובפרט עבור הסינגלטונים, ומשום ש $\theta(x) = \theta(y)$ נקבל שוויון $x = y$.

עקרון שניים אוחזין:

כאשר מסתכלים על בעיית פשיטת רגל של שני שחקנים, אפשר להגדיר פתרון עבודה לפי עקרון שניים אוחזין שהוא דרך חלוקה של הכסף באופן שמדמה מערכת של כלים שאליה שופכים מים,

כאשר גודל הכלי הוא גודל החוב והמים הם הכסף שנשאר לחברה. הרעיון הוא שמחלקים שווה בשווה את החלק שיש לשני הצדדים דרישה עליו, ואת החלק שיש רק לצד אחד דרישה עליו ניתן רק לו. ואכן פתרון שניים אוחזין לבעיה (E, d_1, d_2) כאשר בה"כ מתקיים $d_1 \leq d_2$ הוא:

כאשר זה הערך שמקבל השחקן הראשון. נשים לב שאם $E \leq d_1, d_2$ אז שני הצדדים יש דרישה על כול הסכום ולכן מחלקים שווה בשווה. אם $d_1 \leq E \leq d_2$ אז על d_1 מהסכום לשני הצדדים יש דרישה, ולכן את החלק הזה נחלק חצי חצי, השאר ילך לספק את השחקן השני. אם $d_1, d_2 \leq E$ אז לשניהם יש דרישה על d_1 ולכן נחלק את זה חצי חצי, אחרי זה נשאר לנו עודף, נתן לשחקן השני כסף עד אשר גודל החוב שנשאר לו יהיה כגודל החוב של השחקן השני, ואז נמשיך לחלק חצי חצי.

הכללה של שניים אוחזין ליותר משני שחקנים:

נאמר φ היא מושג פתרון לבעיית פשיטת רגל, אם לכול בעיית פשיטת רגל φ מחזירה וקטור חלוקה של הנכסים $(x_1, \dots, x_n)$ כך ש $x_i \geq 0$ וגם $\sum_{i=1}^n x_i = E$. נאמר φ קונסיסטנטי עם שניים אוחזין אם לכול שני שחקנים i, j בבעיית פשיטת הרגל שלנו יתקיים כי עבור הבעיה $[x_i + x_j, d_i, d_j]$ שהיא בעיית פשיטה רגל בשני שחקנים, הפתרון ש φ תחזיר על בעיה זו הוא זהה כלומר $\varphi([x_i + x_j, d_i, d_j]) = (x_i, x_j)$ וגם זה פתרון שתואם לשניים אוחזין.

קיום יחידות של פתרון קונסיסטנטי עם שניים אוחזין:

נניח ויש שני פתרונות למשחק $(E, d_1, \dots, d_n)$ שהם קונסיסטנטיים עם שניים אוחזין. נסמן אותם x, y . אז $\sum_{i=1}^n x_i = E = \sum_{i=1}^n y_i$. אם הם שונים אז קיים i כך ש $x_i > y_i$ והסכום שווה אז גם קיים j כך ש $x_j < y_j$. בה"כ נניח שמתקיים $x_i + x_j \leq y_i + y_j$. אז יתקיים ממונוטוניות החלוקה בכמות הנכסים של פתרון שניים אוחזין $f_1(x_i + x_j, d_i, d_j) \leq f_1(y_i + y_j, d_i, d_j)$ אבל מקונסיסטנטיות עם שניים אוחזין מתקיים $f_1(x_i + x_j, d_i, d_j) = x_i$ וכנ"ל עבור y_i ולכן קיבלנו $y_i \geq x_i$ בסתירה לכך ש $x_i > y_i$, לכן הפתרונות שווים.

את הקיום של הפתרון אפשר לראות על ידי הכללה של רעיון הכלים השלובים ושפיכת המים לכמות רבה של כלים, ואז כול זוג מקיים את עקרון הכלים השלובים.

הזדהות הגרעינון עם שניים אוחזין:

תחילה נתבונן במשחק בעל שני שחקנים:

בכול משחק בעל שני שחקנים (גם לא משחק פשיטת רגל) אז ערך שאפלי והגרעינון מזדהים! כי כול משחק שני שחקנים שקול אסטרטגית למשחק שבו השחקנים מתחלפים כי יהי $(\{1,2\}, v)$ משחק שני שחקנים, בה"כ $v(1) \leq v(2)$ אז $v(1) = v(2) + 1_{1 \in S}(S)(v(2) - v(1))$ כלומר לכול קואליציה

שאינה הקואליציה $\{2\}$ הוספנו את ההפרש, ולכן במשחק החדש הם מתחלפים וזו שקילות אסטרטגית.

נשים לב שגם הגרעינון וגם ערך שאפלי מקיימים קווריאנטיות לשקילות אסטרטגית ועקרון הסימטריה, לכן שנייהם יחלקו את $u(N)$ שווה בשווה בין שני השחקנים. לכן כול אחד יקבל $\frac{v(1,2)+v(2)-v(1)}{2}$ במשחק החדש, ולכן במשחק המקורי זה הערך ששחקן 2 יקבל ושחקן אחד יקבל $\frac{v(1,2)+v(1)-v(2)}{2}$ כי הפחתנו את מה שהוא הגיע איתו מראש בהמרה בשקילות האסטרטגית. ולכן הגרעינון וערך שאפלי מזדהים, וזה ערכם המפורש.

לכן עבור המשחק $[E, d_1, d_2]$ שהוא משחק בעל שני שחקנים אפשר לראות את הנוסחא המפורשת לגרעינון עליו ולקבל שהיא זהה לפתרון שניים אוחדין עבור המשחק הנ"ל. כעת נרצה להראות שהגרעינון נשאר קונסיסטנטי גם כשכמות השחקנים גדלה.

משחק מצומצם:

עבור משחק v ו x וקטור חלוקה של $v(N)$ נגדיר לכול $T \subseteq N$ משחק מצומצם על T, x שמוגדר להיות לכול קואליציה $R \subseteq T$

כלומר לכול תת קואליציה של T נגדיר את השווי שלה ביחס לחלוקה x להיות כמה הכי הרבה היא יכולה להשיג אם היא תברח עם קואליציה כלשהי ותשלם לקואליציה ההיא את כמה ש x מבטיח לה.

שתי דרכים לצמצום משחק פשיטת רגל:

אזי ראינו דרך אחת לצמצום משחק פשיטת רגל וזו על ידי וקטור חלוקה x וקואליציה S ולקבל המשחק המצומצם w_S^x כפי שהוגדר לעיל. דרך נוספת להקטין משחק פשיטת רגל בעזרת x וקטור חלוקה S ו קואליציה היא להסתכל על משחק פשיטת הרגל $[x(S), \{d_i\}_{i \in S}]$ כלומר לוקחים רק את שחקני S אם החובות שלהם והם כעת רבים על סך כול מה ש x חילק להם. נסמן זאת ב Γ_S^x . נרצה להראות שלמעשה שתי הדרכים שקולות, כלומר המשחקים w_S^x ו Γ_S^x זהים עבור x מסויימים.

ואכן יהיה x כך שמתקיים $x(i) \leq d_i$ אז תהי קואליציה $R \subseteq S$ כלשהי, מתקיים כי $w_S^x(R)$ הוא למעשה $\max_{Q \subseteq (N \setminus S)} w(Q \cup R) - x(Q)$ ובפרט גדול מ $w(N \setminus S \cup R) - x(N \setminus S)$ אבל מתקיים $w(N \setminus S \cup R) - x(N \setminus S) = w(N \setminus S \cup R) - (x(N) - x(S)) = w(N \setminus S \cup R) - (w(N) - x(S))$ כי x חלוקה עבור המשחק w כולו. לכן $w_S^x(R) \geq x(S) - (w(N) - w(N \setminus S \cup R))$ ולכן נקבל $w_S^x(R) \geq x(S) - (E - (E - \sum_{i \in S \setminus R} d_i)) = x(S) - \sum_{i \in S \setminus R} d_i = \Gamma_S^x(R)$.

משחק מיקוח:

נרצה למדל משחק של משא ומתן בין שני צדדים. נגדיר משחק מיקוח להיות זוג (S, d) כאשר $S \subseteq R^2$ קבוצה של וקטורים דו ממדיים שמייצגים את התוצאות האפשריות של המשא ומתן, ו d תוצאת ברירת המחדל, כלומר מה יקרה אם הצדדים לא יגיעו להסכמה. כמו כן נרצה שקיים $x \in S$ כך ש $x \gg d$, כלומר גדול בשתי הקורדינטות, ובנוסף S קמורה וקומפקטית. (חובה לדרוש סגירות אחרת תמיד יהיה פתרון טוב יותר, כמו כן לגבי חסימות)

נרצה למצוא פתרון, כלומר פונקציה מקבוצת כל משחקי המיקוח, לוקטור דו ממדי שיהיה התוצאה האופטימלית למשחק זה. נדרוש כמה עקרונות מרכזיים מהפתרון שלנו, ונראה שקיים ויחיד פתרון שמקיים אותם.

עקרונות של נאש: (מה דורשים על פונקציית הפתרון φ)

- **סימטריה:** אם (S, d) משחק סימטרי, כלומר משחק שבו $(x, y) \in S$ גורר $(y, x) \in S$ וגם $d = (a, a)$ אז $\varphi(S, d)$ חייב להיות וקטור סימטרי.
- **יעילות:** נאמר שנקודה $x \in S$ היא יעילה אם אין נקודה אחרת $y \in S$ כך ש $y \neq x$ וגם $y \geq x$ כלומר לא קיים וקטור אחר שבאחת הקורדינטות הוא גדול ממש מהנקודה שלנו, ובשנייה גדול שווה. הדרישה שלנו היא ש $\varphi(S, d)$ תהיה נקודה יעילה.
- **קווריאנטיות לטרנספורמציות אפיניות:** נדרוש כי לכל $a \in \mathbb{R}^2$ כך ש $a \gg 0$ (כלומר חיובי ממש בשתי הקורדינטות) ולכל $b \in \mathbb{R}^2$ יתקיים כי $a\varphi(S, d) + b = \varphi(aS + b, ad + b)$ כאשר כפל וקטורים הוא מכפלה פנימית. במילים אחרות נדרוש ששינוי יחידות המידה והון אישי שהצדיים מגיעים מראש לא משפיע על התוצאה.
- **אי השפעה של אפשרויות לא רלוונטיות:** נדרוש כי עבור משחק מיקוח (T, d) ותת קבוצה $S \subseteq T$ כך ש $\varphi(T, d) \in S$ אז מתקיים $\varphi(S, d) = \varphi(T, d)$. כלומר אם צמצמנו את מספר האפשרויות לפתרון, אבל האפשרויות המנצחת עדיין שם, אז גם במשחק החדש נבחר בה.

קיום ויחידות של פתרון המקיים את עקרונות נאש:

משפט: קיימת ויחידה פונקציה φ מקבוצת כול משחקי המיקוח לוקטור פתרון שמקיימת את העקרונות לעיל. כמו כן לכל משחק מיקוח (S, d) הפתרון ש φ מחזירה הוא הנקודה $x \in S$ שמביאה למקסימום את שטח המלבן שקודקודו השמאלי תחתון הוא d והימני עליון הוא x מבין כול הנקודות שמקיימות $x \geq d$ (כלומר גדולות שוות בשתי הקורדינטות).

למה: לכל משחק מיקוח קיימת ויחידה נקודה שמביאה למקסימום את השטח המדובר, כלומר קיימת ויחידה $x \in S$ כך ש $x \geq d$ וגם x מביאה למקסימום את $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$.

הוכחה: נסמן $f(x) = (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$, נשים לב שבלי הגבלת הכלליות אפשר להניח כי $d = (0, 0)$ כי שטחים של מלבנים הם אינווריאנטים להזזות, ולכן $f(x) = x_1 x_2$. נשים לב שקבוצת הנקודות שעליה אנחנו מחפשים מקסימום ל f היא $S \cap D$ כאשר D זה הרביע הראשון (כי כזכור העברנו את d לאפס אפס. לכן הקבוצה עליה אנחנו מחפשים מקסימום היא חיתוך של קבוצות קמורות ולכן קמורה, חיתוך של סגורות ולכן סגורה, ובנוסף חסומה, לכן היא קמורה וקומפקטית. בבירור f רציפה ולכן יש לפחות נקודה אחת שממקסמת אותה. נניח שהיו שתיים כאלה x, y אז הנקודה $\frac{x+y}{2}$ גם כן הייתה בקבוצה מקמירות והייתה מניבה שטח גדול יותר ממש בסתירה. לכן יש נקודה יחידה.

הוכחת המשפט: הוכחנו קיום ויחידות של נקודה שממקסמת את השטח, נראה שנקודה כזו מקיימת את עקרונות נאש.

- **סימטריה:** יהיה משחק סימטרי (S, d) אז הנקודה $N(S, d) = z$ שממקסמת את השטח מקיימת בפרט $z \in S$ ולכן גם $(z_2, z_1) \in S$. אבל השטח ש (z_1, z_2) ו (z_2, z_1) מניבות הוא זהה, אבל נקודה כזו יחידה ולכן הם שוות ולכן הפתרון סימטרי כנדרש.
- **יעילות:** בבירור אם $N(S, d)$ אינה יעילה אז קיימת נקודה שגודל ממש בלפחות קורדינטה אחת וגדולה שווה בשנייה, ולכן השטח שהיא תפיק גדול יותר ממש, אבל זו בסתירה להיות $N(S, d)$ הנקודה שמביאה למקסימום את השטח.
- **קווריאנטיות:** בבירור אם הפעלנו טרנספורמציה $ax + b$ אז הנקודה שממקסמת את השטח תהיה $aN(S, d) + b$.

- **אי תלות באפשרויות לא רלוונטיות:** מכיוון שהנקודה נבחרת כמקסימום אז בבירור אם הוצאנו חלק מהנקודות אבל השארנו את הנקודה שממקסמת אז היא עדיין תבחר.

נוכיח יחידות, כלומר כול פתרון אחר ממזדה עם הפתרון של נאש:

יהי φ פתרון שממזדה עם עקרונות נאש. יהי (S, d) משחק מיקוח כלשהו, ונסמן Y את הנקודה שממקסמת את השטח, כלומר את $N(S, d)$. תחילה נגדיר טרנספורמציה שמעתיקה את d לראשית הצירים ואת Y לנקודה $(1,1)$. בבירור יש העתקה כזו. מכיוון ששני הדברים מקיימים השתמרות תחת העתקות כאלו אז מספיק שנראה שלאחר ההעתקה יש שוויון בין $\varphi(S, d) = Y$. כלומר בלי הגבלת הכלליות $d = (0,0)$ וגם $Y = (1,1)$. תהי $x \in S$, מקמירות הקו הישר בינה לבין $(1,1)$ נמצא ב S . נסמן $Z_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)(1,1)$. אזי עבור ε מספיק קטן נקבל כי $z_\varepsilon \geq 0$ ולכן $f(Z_\varepsilon) \leq f(1,1)$ כי ככה הגדרנו את Y להיות המקסימום. לכן $f(Z_\varepsilon) \leq 1$ ולכן מאלגברה מקבלים כי $x_1 + x_2 \leq 2$. לכן ניקח ריבוע סימטרי סביב האלכסון הראשי שמכיל את כול S והצלעה הקדמית שלו היא $x + y = 2$. לכן מעקרונות הסימטריה והיעילות φ של הריבוע הנ"ל הוא $(1,1)$ אבל מעיקרון הצמצום נקבל שגם עבור S נקבל $(1,1)$ כנדרש.

שידוכים יציבים:

נרצה לדון בליבה של שוק סחר חליפין שבו לכול משתתף יש סל התחלתי שאיתו הוא בא לשוק, ובנוסף יש לו יחס סדר מלא וחזק על פני סלים אפשריים אותם הוא רוצה לקבל בסוף היום. פתרון בליבה יהיה חלוקה של סך כול המוצרים כך שאין קואליציה שבחלוקה אחרת של המשאבים בתוכה היא הייתה מקבלת משהו שעדיף לכול אחד מהשחקנים שלה.

אנחנו נתעסק במקרה ספציפי, של שוק דו צדדי שבו מחפשים זיווגים. כלומר יש $2n$ שחקנים, n בכול צד כאשר לכול שחקן יש יחס סדר מלא וחזק על פני שחקני הצד השני. אנחנו נרצה למצוא חלוקה בליבה, שהיא למעשה שידוך של שחקנים מהצדדים השונים לזוגות, כך שאין זוג שיעדיף לפרוש מהחלוקה שהצענו וללכת אחד עם השני. כלומר לא קיימים בן ובת כך שהבן מעדיף את הבת על פני מי שהוא קיבל בזיווג וגם הבת מעדיפה את הבן על פני מי שהיא קיבלה בזיווג.

פורמלית יש שני צדדים $|B| = |G| = n$ ואנחנו מחפשים $\varphi: B \rightarrow G$ חד חד ערכית ועל כך שלא קיימים $b \in B, g \in G$ כך ש $b >_g \varphi^{-1}(g)$ and $g >_b \varphi(b)$.

אלגוריתם א-סימטרי למציאת זיווג:

האלגוריתם בוחר צד אחד, למשל הבנים, ואז לפי האלגוריתם כול בן הולך תחילה לבת שנמצאת בראש רשימת העדפות שלו. כול בחורה שהגיעו אליה מחזרים, בוחרת מבין כולם את העדיף ביותר על פניה, משאירה אותו אצלה ושולחת את כול שאר הבנים להמשיך לחפש. הם בתורם הולכים לעדיפות הבאה בתור שלהם, ושם התהליך מתבצע שוב, כאשר הבחורה כעת משווה את המחזרים החדשים יחד עם המחזר שנשאר מהסיבוב הקודם. מקרה זה נקרא "בנים מחזרים", כמובן באופן שקול אפשר לתאר את אלגוריתם "בנות מחזרות". נשים לב שבאלגוריתם הזה הבנים לאט לאט יורידים בהעדפות שלהם עד שהם פוגעים, והבנות עולות בהעדפות שלהן.

משפט גייל ושאפלי:

תמיד קיים שידוך יציב והוא מתקבל על ידי האלגוריתם המתואר.

האלגוריתם עוצר: ברגע שבחור נדחה על ידי בחורה הוא לא חוזר אליה יותר לעולם. כול בחורה יכולה לדחות לכול היותר $n - 1$ בנים כי כול פעם היא עולה במדרג והיא לא תדחה את המקום הראשון שלה. ולכן משום שיש n בנות האלגוריתם עוצר לאחר לכול היותר $n(n - 1)$ צעדים.

האלגוריתם מסתיים בשידור:

אם בן נדחה על ידי בת אז סימן שלבת הזו כבר יש מחזר, וישאר לה מחזר לאורך כול האלגוריתם, אם בסוף הריצה של האלגוריתם יש בן שלא שודכה לו בחורה אז סימן שהוא נדחה על ידי כולן, סימן שלכולן כבר יש מחזר, סימן שיש עוד n בנים חוץ ממנו בסתירה.

השידור יציב:

נניח בשלילה שיש $b \in B, g \in G$ שמפרים את היציבות של השידור, לכן $g >_b \varphi(b)$ וגם $\varphi^{-1}(g) >_g b$. אזי משום ש $g >_b \varphi(b)$ סימן ש b הציע ל g במהלך האלגוריתם אבל היא דחתה אותו, סימן שהיה לה מישהו אחר עדיף על פני b . אבל עבור הבנות ערך הבנים רק עולה ולכן הבן שבסוף היא סיימה איתו עדיף על פני b בסתירה.

יחס סדר על שידוכים:

יהיו $w_1, w_2: B \rightarrow G$ שני זיווגים יציבים. נגדיר שני יחסי סדר חלקיים על פניהם. $w_1 >_B w_2$ אם לכול בן, התוצאה בזיווג w_1 עדיפה חלש על פני התוצאה בזיווג w_2 . כנ"ל אפשר להגדיר עבור בנות. נשים לב שזה יחס סדר חלקי, לא בין כול שני זיווגים אפשר להשוות.

טענה: $w_1 >_B w_2$ אם ורק אם $w_2 >_G w_1$. (רצונות הבנים באים בניגוד לרצונות הבנות : /)

נניח כי b_1 שודך עם g_1 בזיווג w_1 ובזיווג w_2 הוא קיבל את g_2 , וכמו כן g_1 קיבלה בחור אחר b_2 . משום ש $w_1 >_B w_2$ אז $g_1 >_{b_1} g_2$ כי b_1 מעדיף את הזיווג הראשון, כי כול הבנים מעדיפים את הזיווג הראשון. אבל משום ש w_2 זיווג יציב לא יתכן כי $b_1 >_{g_1} b_2$ כי אז הם היו מפרים את היציבות, לכן $b_2 >_{g_1} b_1$ ולכן g_1 מעדיפה את זיווג w_2 , וזה נכון לכול בת, לכן $w_2 >_G w_1$ וכנ"ל בכיוון ההפוך נדרש.

טענה: השידור שמתקבל מאלגוריתם בנים מחזרים הוא הטוב ביותר עבור הבנים, והאלגוריתם עבור בנות מחזרות הוא הטוב ביותר עבור הבנות מבין כול השידוכים האפשריים!

בנוסף מתקבל מבנה של שריג של שידוכים אפשריים, והליבה בדידה. כמו כן לכול שני שידוכים אפשר להגדיר את המקסימום כלפי הבנים או המקסימום כלפי הבנות. כאשר מקסימום על שני שידוכים נניח כלפי הבנים זה לתת לכו בן את העדיפה עבורו מבין מה שהוא קיבל בשידוכים. זה אכן יוצא שידוך חוקי והוא עדיף בשביל הבנים על פני שני השידוכים האחרים.

כלומר לא בין כול שני שידוכים אפשר להשוות, אבל אפשר לקחת מקסימום והוא יהיה גדול משניהם.

טענות מעניינות מתרגילים:

- עבור v קמור אם הליבה של v^* המשחק הדואלי לא ריק אז v אדיטיבי. נזכר כי המשחק הדואלי מוגדר $v^*(T) = v(N) - v(N \setminus T)$ ולכן $v^*(N) = v(N)$. לכן אם x בליבה של v^* אז מתקיים לכול קואליציה $S \in P(N)$ כי $\sum_{i \notin S} x_i = x(N \setminus S) \geq v^*(N \setminus S) = v(N) - v(S)$ אבל מתקיים $v(N) = \sum_{i=1}^n x_i$ ולכן קיבלו כי $v(S) \geq x(S)$. כמו כן מקמירות נקבל כי $\sum_{i \in S} x_i = x(S) \geq v(S)$ ולכן $v(N \setminus S \cup S) - v(N \setminus S) \geq v(S) - v((N \setminus S) \cap S) = v(S)$ א"ש דו כיווני ולכן $x(S) = v(S)$ ולכן זה משחק אדיטיבי.
- עבור משחק קמור v מתקיים כי הליבה שלו היא הקמור של קבוצת וובר.
- אם הליבה של v אינה ריקה אז יש וקטור x בליבה שנותן לכול זוג שחקנים סימטרים את אותו התשלום.
- הגרעון קווראנטי לשקילות אסטרטגית.

• שחקן אפס בגריענון מקבל אפס