

30.10.11

10% מצי"ן. יום → פתח

מחלקת מתמטיקה
16-17 ע: קבוצה

www.math.tau.ac.il/~klartagb/diff-geom-2010.html

קבוצה $\mathbb{R}^n$

הפונקציה: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ הנקראת **קווקס** (כיתה או סטור או קרן או $\mathbb{R}$)
היא $\gamma(t)$ היא הנק' בה γ חולקת בנק' $t \in I$

דוגמאות:

(1) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\gamma(t) = x_0 + t \cdot v$ $x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ קו ישר

(2) $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $t \in [0, \pi]$ $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ **חצי עיגול**
($\gamma(a) = \gamma(b)$ חצי העיגול) $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

(3) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (a \sin t, b \cos t)$ **עגול מלא**

(4) $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ **קווקס סגורה**
 $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t + \cos(st) \\ \sin(st) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(st) \\ \sin(st) \end{pmatrix}$

הפונקציה: γ קווקס פתוחה היא
לפתוח → מפתח
(הפתח הוא פתוח)

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ פתוח, פתח
 $\{\gamma(t); t \in [a, b]\} = \gamma([a, b])$ $\gamma(a) = \gamma(b)$ γ סגורה

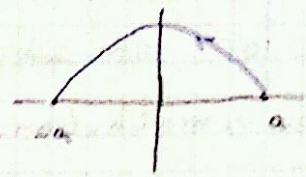
הפונקציה: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ הנקראת **קווקס** היא $\gamma(I) = \{\gamma(t); t \in I\}$

הקבוצה $\gamma(I)$ היא **קווקס**

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma(t) = (a \cos(2t), b \sin(2t)) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$\gamma(t) = (-t, b \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}) \quad -a \leq t \leq a$$



משפחה: $\gamma: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ בקואורדינטות

אם $\gamma: I_1 \rightarrow I_2$ ו- $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ אז קיימת

חזרה וול, כך ש- $\gamma_2(\gamma(t)) = \gamma_2(t)$ לכל $t \in I_1$ כל

משפחה: זה האותו משפחה

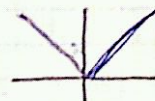
נקודה בעצרת של קווארדנט

המשפחה: $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא עקומה $\mathbb{R}^n$ אם

$\gamma_1, \gamma_2: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ עקומות בנפרד m ממשותף.

$$\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) = \begin{cases} (3t^2, 3t^2) & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (3t^2, -3t^2) & t < 0 \end{cases} \quad \gamma(t) = (t^3, |t|^3)$$

↓
 $\gamma \in C^1$



המשפחה: γ רגולרית, אם היא C^1 כל $t \in I$ $0 \neq \dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$

כלומר: $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}(t) = \gamma'(t)$ קואורדינטות וקטור המהירות.

לוקטור $\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$ קואורדינטות וקטור מהירות.

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n \quad n=1, 2, 3$$

הנורמה $\|x\|$ / הנורמה של x .

משפחה: נניח γ עקומה רגולרית, $t \in I$, $t_0 \in I$.

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0) \dot{\gamma}(t_0)$$

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0)$$

30.10.11

גאומטריה דיפרנציאלית

הוכחה: צריך להוכיח ש-
 $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{t - t_0} = 0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \frac{\gamma'(t_0)(t - t_0)}{t - t_0} \right| = 0$$

אם נרצה להוכיח את זה

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} - \gamma'_i(t_0) \right| = 0 \quad i=1, \dots, n$$

לכן לא צריך

הוכחה: אם $\gamma: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ קצרה C^1 .

$$\text{Length}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

הוכחה II מביחית: נגד שולדו - הוכחה שזה 0.

לכן בקו הליכה $\int |\dot{\gamma}(t)| dt$ תמיד חיובי.

הוכחה: נגד שולדו - הוכחה שזה 0.

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

הוכחה: נגד שולדו - הוכחה שזה 0.

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \geq \int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), \theta \rangle dt$$

$\theta = \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{|\gamma(b) - \gamma(a)|}$, $|\theta|=1$

$$\int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), \theta \rangle dt = \left\langle \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt, \theta \right\rangle = \langle \gamma(b) - \gamma(a), \theta \rangle = |\gamma(b) - \gamma(a)|$$

הוכחה: נגד שולדו - הוכחה שזה 0.

$$\text{Length}(\alpha) = \text{Length}(\beta)$$

הוכחה: נגד שולדו - הוכחה שזה 0.

$$\gamma_p = [x_p, y_p] \quad t \in I_p = [x_1, y_1]$$

צורך רשת נכסיה של f היא C^1 וכן $f' > 0$.

היחסים נגזרים שם נכונים.

$$\begin{aligned} \text{Length}(\alpha) &= \int_{x_a}^{x_b} |\dot{\alpha}(t)| dt = \begin{pmatrix} \alpha(t) = \beta(f(t)) \\ \alpha'(t) = \beta'(f(t)) \cdot f'(t) \end{pmatrix} \\ &= \int_{x_a}^{x_b} |\beta'(f(t))| \cdot f'(t) dt = [s = f(t)] \\ &= \int_{x_a}^{x_b} |\beta'(s)| ds = \text{Length}(\beta) \end{aligned}$$

מכיוון f היא C^1 בסביבת t , עבור $t \in I_\alpha$?

בוקאור $(\beta_1'(f(t)), \dots, \beta_n'(f(t)))$ וקטור האחד β נחלקי.

$$\begin{pmatrix} \beta_1(f(t)) \\ \vdots \\ \beta_n(f(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

שקטוריות ששונים ~ 0 , ~ 1 .

לכן, $f(t) = \alpha_i(t)$ - $\beta_i' \neq 0$ בסביבת $f(t)$.

לכן, f יש פונק' הופכי בסביבת $f(t)$ של C^1 .

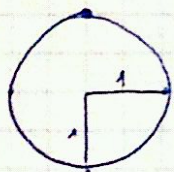
כל t , בסביבת t , $f(t) = \beta_i^{-1}(\alpha_i(t))$.

לכן, f היא פונקציה C^1 , כי היא ההרכבה של פונקציות C^1 .

מקרה: הרחבה הטורית.

שני צדדים: α, β קטעים ראשיים, הפקולט ~ 0 כד.

הרחבת פונקציה α - f היא C^1 .



סימטריה: ציקלואידה.

מרכז העלם במח t : $(t, 0)$

מיקום המסחר ביחס למרכז העלם:

נוגד $\frac{\pi}{2} - t$ לכן

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = (1 + \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 + 2\cos t + 1 = 2(2\cos^2(\frac{t}{2}))$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |2\cos(\frac{t}{2})|$$

30.10.11

גטאוסטריה דיפרנציאל

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt = 2 \int_0^{2\pi} |\cos(t/2)| dt = 4 \int_0^{\pi} |\cos(t/2)| dt$$

$$= 8 \int_0^{\pi} |\cos(t/2)| \frac{dt}{2} = 8 (\sin(\pi/2) - \sin(0))$$

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \left(\frac{1 + \cos t}{2|\cos(t/2)|}, \frac{-\sin t}{2|\cos(t/2)|} \right) \quad \text{המשק המעוקל:}$$

$$0 < t < \pi: \quad \cos(t/2) \geq 0$$

$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \cos t}{\cos t/2}, \frac{-\sin t}{\cos t/2} \right) = (\cos(t/2), -\sin(t/2))$$

$$t > \pi: \quad -(\cos(t/2), -\sin(t/2))$$

פרימטריזציה שונה של חוקק.

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t) + x_0$$

הצגה שונה של חוקק.

$$\gamma_2'(t) = \gamma_1'(t) \Rightarrow \quad \text{החוקק נשמר.}$$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

שני אוריינטציות שונה של חוקק.

$$\gamma_2(t) = \gamma(1-t) \quad t \in [0, 1]$$

סביב משיקול זה שונה של חוקק.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{המשפט I / מרחב וקטורי אוקלידי:} \\ \text{המשפט I: } A^t A = \text{Id} \\ \text{המשפט II: } \|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{המשפט III: (איזומטריה)} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|Ax - Ay\| = \|x - y\| \\ \text{המשפט IV: } O(n) \text{ הוא קבוצת המטריצות ה-orthogonal} \end{array}}$$

$$\gamma_2(t) = U(\gamma_1(t)) \quad \text{כאשר } U \text{ מטריצה}$$

$$\text{Length}(\gamma_1) = \text{Length}(\gamma) \quad \text{כל}$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = \frac{d}{dt} (\gamma(\gamma_1(t))) = \gamma\left(\frac{d}{dt} \gamma_1\right) = \gamma(\dot{\gamma}_1(t)) \quad \text{הסבר:}$$

הבין ש γ מתחילת γ_1 , כל

$$|\dot{\gamma}_2(t)| = |\gamma(\dot{\gamma}_1(t))| = |\dot{\gamma}_1(t)|$$

$$\text{Length}(\gamma_2) = \int |\dot{\gamma}_2| = \int |\dot{\gamma}_1| = \text{Length}(\gamma_1), \text{ ובכך:}$$

פרמטריזציה אחרת

ע"י σ מקושרת קלורית.

נאמר ש σ נאמן בפרמטריזציה אחרת, כל $|\dot{\sigma}(t)| = 1 \quad \forall t \in I$

ע"י $\sigma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ נאמן בפרמטריזציה אחרת.

$$\text{Length}(\sigma|_{[a,b]}) = b - a \quad \text{Length}(\sigma) = L$$

אם נחיל פרמטריזציה אחרת ρ - קלורית?

$$\ell(t) = \text{Length}(\sigma|_{[a,t]})$$

נאמר $\rho: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\ell'(t) = |\dot{\sigma}(t)| = 1, \quad \ell(t) \text{ פונק' עולה,}$$

$$\gamma_2(t) = \sigma(\ell^{-1}(t)) \quad \text{הפוכה, ונפרט}$$

$$\text{Length}(\gamma_2|_{[a,t]}) = \text{Length}(\sigma|_{[a, \ell^{-1}(t)]}) = \ell(\ell^{-1}(t)) - \ell(a) = t$$

31.10.11

גיאומטריה קריבית

אם מוגדר פרמטריזציה אבסולוטית של קו?

$$l(t) = \text{Length}(\gamma|_{[a,t]}) \quad \gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$l: [a,b] \rightarrow [0, \text{Length}(\gamma)] \quad |l'(t)| = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

$$\gamma_2: [0, \text{Length}(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{הפרמטריזציה האבסולוטית}$$

$$\gamma_2(t) = \gamma(l^{-1}(t))$$

הפרמטריזציה אבסולוטית

$$\begin{aligned} \text{Length}(\gamma_2|_{[\alpha, \beta]}) &= \text{Length}(\gamma|_{[l^{-1}(\alpha), l^{-1}(\beta)]}) \\ &= l(l^{-1}(\beta)) - l(l^{-1}(\alpha)) = \beta - \alpha \end{aligned}$$

הערה: נסחו ודברו את האספט בפרמטריזציה האבסולוטית. היא יחידה.

אם מוגדר פרמטריזציה אבסולוטית של קו? $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

קו ספירלה: $\mathbb{R}^3$ helix

$$l(t) =$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\dot{\gamma}(t)|^2 = R^2 + 1 \Rightarrow \text{Length}(\gamma|_{[0,t]}) = \sqrt{R^2 + 1} \cdot t$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\frac{t}{\sqrt{R^2+1}}) \\ R \sin(\frac{t}{\sqrt{R^2+1}}) \\ \frac{t}{\sqrt{R^2+1}} \end{pmatrix}$$

$$l^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{R^2+1}}$$

פרמטריזציה אבסולוטית של קו

(הערה: זה עובד לרוב קו-ספירלה, $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, t)$)

הערה: $\forall t \in \mathbb{R}$ $\gamma(t)$ הוא נקודה

$l(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}(s)| ds$ $\gamma_2(t) = \gamma(l^{-1}(t))$ הוא מייצג פרמטריזציה אבסולוטית.

עקומה במישור

נניח γ עקומה γ' , רגולרית, בהרמוניזציה אבסולוטי.

הוקטור $\gamma'(s)$ (שהוא וקטור יחידה) נקרא הוקטור המשיק ל- γ . נסמנו $v(s) = \gamma'(s)$.

האנורמל במישור?

יש וקטור נורמלי. וקטור יחידה שמונק ל- $v(s)$.

הסדרה: בסיס אורטונורמלי $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ נקרא חיובי אם $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 1$

(הגורם למכונה v_2 הוא סגור מ- 90° נקב כיוון) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ באינטגרל v_1 .

אם γ סימטרית: $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ וקטור יחידה,

אם $v_2 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ v_1 לבחור בסיס אורטונורמלי חיובי.

הוכחה: $|v_2| = 1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = -xy + xy = 0$

$$\det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 - (-y^2) = +1$$

הסדרה: לכל $s \in I$ נבחר $u(s)$ ("הנורמלי") $v(s)$ הוקטור

היחיד סק $v(s), u(s)$ בסיס אורטונורמלי חיובי (נקרא בסיס Frenet).

$$\gamma(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R)) \quad \text{קוטר}$$

$$v(s) = (-\sin(s/R), \cos(s/R)) \quad \text{נרמל וקטור משיק}$$

$$u(s) = -\gamma(s)/R$$

נרמל וקטור קוטר משיק חסמי בסיס Frenet.

למשל, נניח γ הוא C^2 .

$$\left[\begin{array}{l} \alpha(s), \beta(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{מכונה: } (B \text{ פונקציה}) \\ \frac{d}{ds} \langle \alpha(s), \beta(s) \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \alpha(s), \beta(s) \right\rangle + \left\langle \alpha(s), \frac{d}{ds} \beta(s) \right\rangle \end{array} \right]$$

31.10.11

גיאומטריה דיפרנציאלית

$$(1) \langle v(s), v(s) \rangle = 1$$

Frenet אינטגרלים בסיסיים

$$(2) \langle n(s), n(s) \rangle = 1$$

נצטרף:

$$(3) \langle v(s), n(s) \rangle = 0$$

$$\frac{d}{ds} \langle v(s), v(s) \rangle = 0$$

$$v'(s) \perp v(s) \Leftrightarrow 2 \langle v'(s), v(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{v'(s)} \mathbb{R} \xrightarrow{\kappa(s)} \mathbb{R}^2$$

לכן, קיים מספר $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ כך ש-

$\kappa(s)$ מספר קרוטואים המכונה "curvature"

(curvature =) $\kappa(s)$ מספר s .

$$\kappa(s) n(s) = v'(s) = \gamma''(s)$$

$$\Leftrightarrow \gamma(s) = \gamma'(s)$$

$$|\kappa(s)| = |\gamma''(s)|$$

$$2 \langle n'(s), n(s) \rangle = 0 \quad (2) \quad \text{נצטרף}$$

לכן, $n'(s) \perp n(s)$. $n'(s)$ כיוון כיוון $n(s)$.

$$\langle v'(s), n(s) \rangle + \langle v(s), n'(s) \rangle = 0$$

(3) נצטרף

$$\kappa(s) n(s) \Rightarrow \kappa(s) + \langle v(s), n'(s) \rangle = 0$$

$$n'(s) = -\kappa(s) \cdot v(s) \quad \text{לכן, נכנס}$$

$$\begin{pmatrix} v'(s) \\ n'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \end{pmatrix} \quad \text{בסיס, } \rho$$

$$|\dot{\gamma}(s)| = \kappa(s) \quad !$$

Frenet נקרא משוואה

הערה: אם $\alpha(s), \beta(s)$ בסיס אורתונורמלי s ב $\mathbb{R}^2$ אז $A(s)$ כך ש-

$$\begin{pmatrix} \alpha'(s) \\ \beta'(s) \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{הערה: } \left\{ \begin{array}{l} v(s) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s)) \\ \sin(\alpha(s)) \end{pmatrix} \text{ אם } \alpha(s) \\ \kappa(s) = \alpha'(s) \end{array} \right. \text{ שיהיה } \text{הכאן}$$

המשפט

המשפט

$$|v| = 1, \quad \delta(t) = x_0 + vt \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v(s) = v & \quad v'(s) = 0 \Rightarrow \kappa(s) = 0 \\ n(s) = n & \quad n'(s) = 0 \end{aligned}$$

$$v(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \end{pmatrix}$$

$$\delta(s) = \begin{pmatrix} R \cos(s/R) \\ R \sin(s/R) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$n(s) = \begin{pmatrix} -\cos(s/R) \\ -\sin(s/R) \end{pmatrix}$$

$$v'(s) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos(s/R) \\ -\sin(s/R) \end{pmatrix} = \frac{1}{R} n(s)$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{R} \quad n'(s) = \dots = -\frac{1}{R} v(s)$$

31.10.11

המשפט

www.tau.ac.il/~levradzi

levradzi@hotmail.com

המשפט

המשפט

המשפט

$$\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{המשפט}$$

המשפט

$$v(t) = \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$x = x_0 + t x_1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

המשפט

$$y = y_0 + t y_1$$

המשפט

$$\Rightarrow y_1 x - x_1 y = y_1 x_0 - x_1 y_0$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \gamma \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \dot{\gamma}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

המשפט