21/11/13

שיעור שבוע 6

משחקים קמורים:

הגדרה: משחק $(N;v)$ נקרא קמור אם לכל זוג קואליציות S,T מתקיים (1971)
$v(S)+v(T)\le v(S\cup T)+v(S\cap T)$; נשים לב שמשחק קמור הוא סופר אדיטיבי.

סופר אדיטיבי:
$\emptyset=S\cap T$
אז $v(S)+v(T)$
$\le v(S\cup T)$

ההגדרה המתאימה עבור משחקי הוצאות:
עבור משחק הוצאות $(N;C)$ נקרא קמור אם לכל זוג קואליציות S,T מתקיים $C(S)+C(T)\ge C(S\cup T)+C(S\cap T)$

* כדאי לשחקנים להתגבש לקואליציה גדולה יותר.

משפט: הטענות הבאות שקולות:

1) המשחק $(N;v)$ קמור.

2) לכל $S\subseteq T\subseteq N$ ולכל $R\subseteq N\setminus T$ מתקיים

$$\underbrace{v(S\cup R)-v(S)}_{\text{התרומה של R ל-S}}\le \underbrace{v(T\cup R)-v(T)}_{\text{התרומה של R ל-T}}$$

כלומר התרומה של R ל-S קטנה מהתרומה של R ל-T, כי T גדולה מ-S. יש עדיפות להצטרף לקואליציות גדולות.

3) לכל $S\subseteq T\subseteq N$ ולכל $i\in N\setminus T$ מתקיים

$$v(S\cup\{i\})-v(S)\le v(T\cup\{i\})-v(T)$$

כלומר התרומה השולית של כל שחקן לקואליציה גדולה יותר אם הקואליציה גדלה, גם היא גדלה.

הוכחה:

$1\to 2$: אזי $(N;v)$ קמור. יהיו $S\subseteq T\subseteq N$ קואליציות ו-$R\subseteq N\setminus T$.
מתקיים $v(S\cup R\cup T)+v((S\cup R)\cap T)\ge v(S\cup R)+v(T)$.
⊖ נשים לב כי $R\cup T=S\cup R\cup T$ כי $S\subseteq T$.
⊖ נשים לב כי $S=(S\cup R)\cap T$
לכן
$v(S\cup R)+v(T)\le v(R\cup T)+v(S)$
$v(S\cup R)-v(S)\le v(R\cup T)-v(T)$ כנדרש.

$2\to 3$: ברור... זה מקרה פרטי!

$3\to 1$: תהיינה $S,T\subseteq N$ שתי קואליציות
נגדיר $A=S\cap T$ ו-$G=S\setminus(S\cap T)$.
נסמן $G=\{i_1,\dots,i_k\}$; אם G ריקה, כלומר $S\subseteq T$ אז $k=0$.
ולכן v קמור.

גע

21/11/13

המשך שיעור

<u>המשך הוכחה:</u> כיון ש $A\subseteq T$ אז לכל $0\le l\le k-1$ מתקיים

$$v(A\cup\{i_1,\dots,i_l,i_{l+1}\})-v(A\cup\{i_1,\dots,i_l\})\le v(T\cup\{i_1,\dots,i_l,i_{l+1}\})-v(T\cup\{i_1,\dots,i_l\})$$

ע"פ הנחה 3! [כי $i_{l+1}\notin T$] [$A\subseteq T$]

טלסקופי ← נסכם את k אי-השוויונים עבור $0,1,\dots,k-1$ ונקבל

$$v(T\cup G)-v(T)\ge v(A\cup G)-v(A)$$
$$v(T\cup S)-v(T)\ge v(S)-v(S\cap T)$$
$$v(T\cup S)+v(S\cap T)\ge v(S)+v(T)$$

לכן v קמור!

<u>מסקנה:</u> הליבה של משחק קמור אינה ריקה!

עבור סידור של השחקנים

<u>הוכחה:</u> יהי (N,v) משחק קמור, ונבנה בוקטור התשלומים הבא

$$\begin{cases} x_1=v(\{1\})\\ x_2=v(\{1,2\})-v(\{1\})\\ \vdots\\ x_n=v(\{1,\dots,n\})-v(\{1,2,\dots,n-1\})\end{cases}$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$; נראה ש x בליבה!

תחילה נשים לב ש x הינו וקטור תשלומים חוקי, כלומר

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}v(\{1,\dots,i\})-v(\{1,\dots,i-1\})\overset{\text{טלסקופי}}{=}v(N)$$

כעת נוכיח כי $x(S)>v(S)$ לכל S. באינדוקציה על גודל המשחק.

אם $n=1$! $x_1=v(\{1\})$ ולכן המשחק מנוון, ולכן x בליבה.

נניח באינדוקציה שלכל משחק עם $n-1$ שחקנים מתקיים שהוקטור שנבנה לעיל הוא בליבה.

נסתכל על המשחק $(N\setminus\{n\};v)$ שהוא המשחק N מצומצם לקבוצת השחקנים $\{1,\dots,n-1\}$; גם משחק זה קמור [כי כל תת משחק של משחק קמור הוא גם קמור]

לכן נפעיל את הנחת האינדוקציה על המשחק $(N\setminus\{n\},v)$, ולכן הוקטור $y=(v\{1\},v\{1,2\}-v\{1\},\dots,v\{1,\dots,n-1\}-v\{n-2,\dots,1\})$ בליבה של משחק זה.

כעת נראה כי x [המקורי] נמצא בליבה של $(N;v)$

הערך שפירס

<u>המשך הוכחה:</u> תהי S קואליציה כלשהי, אם $n\notin S$ אזי מכיון ש-y בליבה של המצומצם אז מתקיים $x(S)=y(S)\ge v(S)$ כנדרש.

אם $n\in S$ אז

כי $n\notin S\setminus\{n\}$

$$x(S) = x(S\setminus\{n\})+x(n) \ge v(S\setminus\{n\}) + x(n) = v(S\setminus\{n\}) + v(N) - v(N\setminus\{n\})$$

$$\ge v(S)$$

מהתנאי השקול לקמירות, של תוספת שחקן חופשי.

כי מהיות המשחק קמיר

$$v(N) - v(N\setminus\{n\}) \ge v(S) - v(S\setminus\{n\})$$

<u>נשים לב:</u> הוקטור x חולק תשלומים לפי הסדר $1,2,\dots,n$. היינו מקבלים אותה תוצאה לכל סידור של השחקנים...
כלומר לכל סידור π של המספרים $[n]$ וקטור התשלומים הבא:

$$w^{\pi} = \big(v(\pi(1)),\, v(\{\pi(1),\pi(2)\}) - v(\pi(1)),\, \dots,\, v(\{\pi(1),\dots,\pi(n)\}) - v(\{\pi(1),\dots,\pi(n-1)\})\big)$$

<u>הגדרה:</u> הקמור של הנקודות w^{π} נקרא קבוצת וובר ומכיון שהליבה היא קבוצה קמורה נובע שבמשחק קמיר הליבה מכילה את קבוצת וובר.

<u>טענה:</u> קבוצת וובר הוא פוליטופ בעל לכל היותר $n!$ קודקודים.
⊖ כאשר $w^{\pi}=w^{\pi'}$ עבור שני פרמוטציות שונות אז מספר הקודקודים של פוליטופ זה יהיה קטן יותר.

<u>נזכר:</u> הליבה מוגדרת כחיתוך של חצאי מרחב $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x(S)\ge v(S)\}$ לכל הקואליציות S והמישור $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x(N)=v(N)\}$

⊖ ישנם משחקים עבורם הליבה <u>אינה</u> נוגעת בחלק מהמישורים העל-יים הבאים $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x(S)=v(S)\}$ כלומר יש קואליציה שלכל וקטור בליבה נותן לה משהו יותר ממה שהיא מקבלת לבד.

דבר זה <u>לא</u> קורה במשחקים המורים

<u>משפט:</u> יהי (N,v) משחק קמיר אזי לכל קואליציה $S\subseteq N$ יש וקטור תשלומים $x\in Core(v)$ המקיים $x(S)=v(S)$

<u>הוכחה:</u> נסדר את השחקנים כך שחברי S יהיו ראשונים, כלומר אם $S=\{i_1,\dots,i_{|S|}\}$ אז נתבונן בפרמוטציה

$$\pi=(i_1,i_2,\dots,i_{|S|},\dots,i_N)$$

21/11/13

המשך שיעור 6

<u>המשך הוכחה:</u> הווקטור w^{π} מוגדר כפי שאינו מקופח, w^{π} בליבה ומקיים $w^{\pi}(S)=v(S)$ כי

$$w^{\pi}(S) = \sum_{i\in S} v(\{1,\dots,i\}) - v(\{1,\dots,i-1\}) = v(S)$$

כי הם דיוספם בהגדלה!

כנדרש.

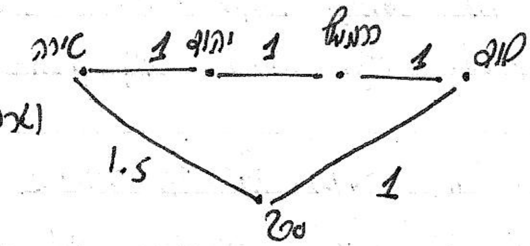
משחקי עץ פורש

<u>הגדרה:</u> מערכת עץ פורש הוא שישיה (N, V, E, v_0, a, I) כך ש:

- (V,E) גרף סופי קשיר עם קודקודים V וקשתות E. [לא מכוון...]
- $v_0\in V$ יקרא קודקוד הבסיס/מקור.
- $a: E \to \mathbb{R}_+$ פונ' המתאימה לכל קשת $e\in E$ עלות $a(e)$ [הוצאה] חיובי ממש!
- ~~[illegible]~~ פונ' המתאימה לכל שחקן קודקוד שאינו המקור.
  $I: N \to V\setminus\{v_0\}$

(*) שימוש לפרש רשת חשמל/ביוב וכו'...

<u>דוגמא:</u>



וארבעה שחקנים, המשויכים כל אחד לעיר.

- לכל מערכת עץ פורש כיון להתאים משחק עץ פורש $(N;c)$ שבו לכל קואליציה S - $C(S)$ היא הקואליציה המינימלית הדרושה כדי לחבר את כל חברי S למקור v_0. חיבור חברי S למקור נעשה באמצעות אוסף קשתות המחבר לכל שחקן i ב S מסלול המחבר מהקודקוד $I(i)$ למקור.
  הוצאה של אוסף קשתות היא סכום ההוצאות של כל הקשתות באוסף, !$C(S)$ היא ההוצאה המינימלית מבין הכולות של האוספים המחברים את חברי S למקור.

נסמן אוסף קשתות שכזה עבור קואליציה S ועל קודקודי S ב (V^S, E^S) ונקרא לו עץ הוצאה מינימלית של הקואליציה S. זה עץ פורש לקודקודים $S\cup\{v_0\}$

<u>עבור הדוגמא שלנו</u>

קואליציה	ערך עץ מינימלי
{עירה}	1.5
{כרמיאל}	2
{עירה, יהוד}	2.5

קואליציה	ערך מינימלי
{עירה, טוב}	2.5
{עירה, כרמיאל}	3.5
כולם	4

נשים לב לתופעת ה Free-rider שחקן שלו בקואליציה משנית מרוויח מחיבור הקואליציה הזו.

21/11/13

המשך שיעור ט

⊖ נתבונן במקרה ש I הפונ' שמתאימה לשחקן קודקוד היא חח"ע ועל. במקרה זה עץ ההוצאות המינימלי (V^N, E^N) מכיל n קשתות [כי יש $n+1$ קודקודים כולל v_0]. לכל שחקן i נוכל לשייך הקשת היוצאת ממנו לכיוון המקור, קשת-שורש. כי בעץ יש רק מסלול אחד בין כל שני צמתים.

משפט: יהי (N, V, E, v_0, a, I) משחק עץ פורש שבו I חח"ע ועל. אזי הליבה של משחק העץ הפורש אינה ריקה והוקטור הבא
$x_i := a(e_i)$ כאשר e_i קשת השורש של שחקן i הוא בליבה.

הוכחה: נזכר כי $E^N = \{e_i\}_{i\in N}$ הרי ש

$$C(N) = \sum_{i\in N} a(e_i) = x(N)$$

עלות העפ"מ. קבלנו את x

ולכן x יעיל.

כעת נראה כי $x(S) \le C(S)$ כלומר אף קואליציה לא רוצה לשלם יותר, יהי S קואליציה כלשהי, $S \subseteq N$ נתבונן בקבוצת הקשתות הבאה

$$E^* = E^S \cup \{e_i : i \notin S\}$$

קבוצה זו מכילה את כל הקשתות בעץ ההוצאות המינימלי של S, ולכל שחקן שאינו ב S את הקשת היוצאת ממנו בעץ ההוצאות המינימלי של הקואליציה N [העפ"מ של הגרף...]

נראה כי (V, E^*) תת-גרף פורש כלומר שהוא גרף זה כל קודקוד מחובר למקור. אוסף הקשתות E^* מכיל את כל קודקודי E^S ומכיון ש (V^S, E^S) עץ ההוצאות המינימלי עבור S, כל קודקודי S מחוברים למקור ע"י קשתות ב E^*.
יהי $v_1 \notin S$, קיים שחקן $I^{-1}(v_1)$ שמתאים לקודקוד זה. הקשת $e_{I^{-1}(v_1)}$ נמצאת ב E^* ומחברת את v_1 לקודקוד אחר בגרף v_2. אם v_2 הוא המקור אז סיימנו, אם $v_2 \in S$ אז הרי ש v_2 מחובר למקור, לכן v_1 מחובר למקור כנדרש, אם $v_2 \notin S$ אז הקשת $e_{I^{-1}(v_2)}$ נמצאת ב E^* ומחברת את v_2 אל קודקוד v_3 ונמשיך באינדוקציה. התהליך נגמר כי המרחק קטן ממש ב 1 כל פעם.

כי הקודקוד חדש כי המרחק למקור קטן ממש ב 1

לכן (V, E^*) פורש את הגרף. כמו כן זה גם עץ כי E^S עץ ומוסיפים לו קשתות שמחברות כל קודקוד מחוץ ל V^S והן עצמן לא יוצרות מעגל.

מכיוון שהגרף (V, E^*) פורש של V^N עלותו גדולה או שווה ל $C(N)$ כי $C(N)$ זה עלות העפ"מ...
כמו כן מחושב חגים שעלות כל הקשתות של גרף פורש זה $= C(S) + \sum_{i \notin S} a(e_i)$ ← הגרף המינימלי עבור S.

21/11/13

המשך שיעור 6

לכן: $X(N) = G(N) \le G(s) + \sum_{i \notin S} a(e_i) = G(s) + \sum_{i \notin S} x_i$

ולכן בפרט. $x(S) = \sum_{i \in S} x_i \le G(S)$

נזכר כי $x_i = a(e_i)$ בפועל כמו שרצינו

אינטואיציה: נמצא עפ"י צלע, נניח שיש קואליציה כלשהי שיכולה לשלם פחות, אז נגרום אותה לחפש כך שתשלם פחות, ואז כל השאר יחברו באותו הסכום.

משחק זרימה

הגדרה: רשת זרימה היא שביעייה $F = (V, E, v_0, v_1, C, N, I)$ כך ש:

1) (V, E) גרף מכוון. V הוא הקודקודים ! E קבוצת הקשתות מכוונות.
2) $v_0, v_1 \in V$ הם מקור ויעד לגבי הזרימה שלנו.
3) $C: E \to \mathbb{R}_+$ קיבולת של הקשתות.
4) N היא קבוצת השחקנים
5) $I: E \to N$ המתאימה לכל קשת שחקן השולט עליה.

הגדרה: תהי $F = (V, E, v_0, v_1, C, N, I)$ נגדיר זרימה להיות פונקציה $b: E \to \mathbb{R}^+$ שמתאימה לכל קשת בגרף מספר אי-שלילי שמקיימת:

1) $b(e) \le C(e)$ לכל $e \in E$
2) $\sum_{(u,v) \in E} b(u,v) = \sum_{(v,u) \in E} b(v,u)$ לכל קודקוד v שאינו v_0, v_1.

זרימה שהתפוקה מקסימלית מבין כל הזרימות נקראת זרימה מקסימלית.