7/11/13

שיעור שבוע 4

נוכיח הוכח שאם קיים אוסף מאוזן $\{S_i\}_{i=1}^{l}$; $\{\gamma_i\}_{i=1}^{l}$
מקיים $\sum_{i=1}^{l} \gamma_i v(S_i) \le v(N)$ אז הליבה אינה ריקה.

משפט ההפרדה

טענה: D_1, D_2 קבוצות קמורות ב-$\mathbb{R}^n$ כך ש-D_2 מכילה כדור פתוח. אזי יש וקטור p כך שלכל $x \in D_1$ ו-$y \in D_2$: $\langle p, y \rangle \le \langle p, x \rangle$
ו- $p \neq 0$.

הוכחת המשפט הראשי:

נגדיר $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \le 0\}$; לכל $S \subseteq N$ נגדיר $w_S = \mathbb{1}_S - v(S)\mathbb{1}_N$.

$D_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i w_{S_i} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1 ,\ \alpha_i \ge 0 \right\}$ כלומר צירופים קמורים או למעטפת הקמור שנוצר ע"י w_{S_i}.

שלב 1: D_1 ו-D_2 קמורות.

הוכחה: D_2 קמורה באופן אינטואי... $(x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_n) \in D_2$ ו-
$0 \le \alpha \le 1$ אז בבירור לכל i מתקיים $\alpha x_i + (1-\alpha) y_i \le 0$ כי
x_i ו-$y_i \le 0$.

כמו כן D_1 קמורה... כי הוא קמור... תהיינה שתי נקודות ב-D_1.

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i w_{S_i} \;;\; \sum_{j=1}^{l_2} \beta_j w_{T_j} \xrightarrow{\text{ניקח } \alpha \in (0,1)} \alpha \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i w_{S_i} + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{l_2} \beta_j w_{T_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l_1} \alpha \alpha_i w_{S_i} + \sum_{j=1}^{l_2} (1-\alpha) \beta_j w_{T_j}$$

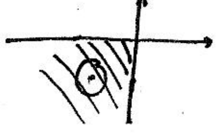
צריך לראות שסכום המקדמים הוא 1:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha \alpha_i + \sum_{j=1}^{l_2} (1-\alpha) \beta_j = \alpha \sum \alpha_i + (1-\alpha) \sum \beta_j = \alpha + 1 - \alpha = 1$$

לכן הצירוף הקמור גם כן שייך לקבוצה...
לכן D_1 קמורה.

שלב 2: ב-D_2 יש סביבה פתוחה.

הוכחה: $(-1,\dots,-1) \in D_2$; הרדיוס בגודל $1/2$ סביב נקודה זו נמצא כולו ב-D_2.



המשך שיעור 4

7/11/13

שלב 3: D_1 ו D_2 זהות.

הוכחה: נראה שאין נקודה ב D_1 שנמצאת גם ב D_2. תהי $x=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i w_{s_i}\in D_1$ כלשהי.

$$x=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\left(1_{S_i}-v(S_i)1_N\right)=\underbrace{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i 1_{S_i}}-\sum\alpha_i v(S_i)1_N$$

נזכר כי $\sum_{i=1}^{l}\alpha_i=1$; לכן המקסימום של כל הקואורדינטות של וקטור זה ≤ 1.
נסמן ב A את המקסימום, $A=\max_k\left(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i 1_{S_i}\right)_k$ אזי $A\le 1$.

נראה שלפחות קורדינטה אחת ב

$$\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i 1_{S_i}}{A}}_{\text{בוקטור זה כל הקואורדינטות חיוביות בין 0-1 ואחת שווה ממש 1. נזכר כי } \alpha_1\ge 0 \text{ וכו שלקחנו המקסימום...}}-\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i v(S_i)}{A}1_N}_{\text{וקטור קבוע, כל הקורדינטות זהות.}}\ge 0$$

$[\dots 0<A]$ למה?

נראה כי:

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i v(S_i)}{A}\le 1$$

ובזה נסיים. [כי אז תהיה קורדינטה אי-שלילית [illegible]...] **תזכורת:** המשחק v מנורמל 0-1, כלומר $1=v(N)$, $(i)=0$

נביט על האוסף [שאינו בהכרח מאוזן] $\left(\{S_i\},\left\{\frac{\alpha_i}{A}\right\}\right)$ [נרצה להפוך אותו למאוזן...]

כאן להשתמש ב ⊛

נזכר שראינו כי כל קורדינטה של $\sum\frac{\alpha_i}{A}1_{S_i}$ נמצאת בין 0 ל 1. כדי שנקבל את האיזון נוסיף הקואליציות שיוכלו שחקן בודד, משום שזה משחק מנורמל, v של משחק זה יהיה אפס...

נתבונן ב $\beta=1_N-\sum\frac{\alpha_i}{A}S_i$ אזי כל קורדינטה β הן בין 0 ל 1.

נתבונן באוסף:

$$\left(\{S_i\}_{i=1}^{l}\cup\{\{i\}\}_{i=1}^{n},\ \left\{\frac{\alpha_i}{A}\right\}_{i=1}^{l}\cup\{\beta_j\}_{j=1}^{n}\right)$$

שחקנים בודדים

בבירור האוסף הזה מאוזן... [הוספנו בדיוק כמה שהיה חסר לאיזון].

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i}{A}S_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_j 1_j=1_N$$

מתנאי ⊛ נקבל:

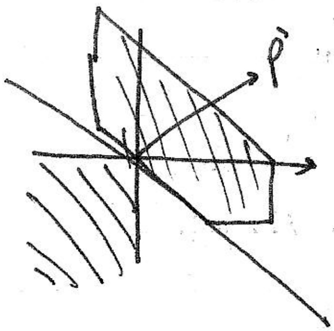
$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\alpha_i v(S_i)}{A}+\sum_{j=1}^{n}\overbrace{v(j)\beta_j}^{\text{אפס...}}\le v(N)=1$$

לכן יש קורדינטה אחת לפחות אי-שלילית ולכן המשפט תקף!

7/11/13

המשך שיעור 4

<u>שלב 4:</u> נשתמש במשפט ההפרדה כדי להפריד בין D_1 ו-D_2 ע"י $\hat{p}\in\mathbb{R}^n$
ו- $\hat{p}\neq 0$.
אז לכל $x\in D_1, y\in D_2$ מתקיים $\langle \hat{p}, y\rangle \le \langle \hat{p}, x\rangle$



<u>שלב 5:</u> נראה שכל קורדינטות $\hat{p}$ הן אי-שליליות.
נניח בשלילה שקיים i כך ש $(\hat{p})_i<0$. אז נביט
ב $y_M=(-1,-1,\dots,\underset{i}{-M-1},\dots,-1)\in D_2$.

אז $\langle y_M,\hat{p}\rangle\to\infty$ גדול כרצוני. ובפרט
גדול מ $\langle \hat{p},x\rangle$ לכל $x\in D_1$ עבור בחירת M מתאימה... אז סתירה.

אז כל קורדינטות $\hat{p}$ הן אי-שליליות.

<u>שלב 6:</u> נגדיר את p באופן הבא: $p=\frac{\hat{p}}{\sum_{j=1}^{n}\hat{p}_j}$; [הגדרה טובה שכן שליליים כי אינו בליבה]

אז p וקטור אי שלילי שסכומו 1.

<u>שלב 7:</u> נראה ש p בליבה.
ראינו כי $\sum_{j=1}^{n}p_j=1=v(N)$ כנדרש. כעת <u>צריך להראות</u> שלכל הקואליציה S
מתקיים

$$p(S)=\sum_{j\in S}p_j\ge v(S)$$

אנו יודעים כי $w_S\in D_1$ וכמו כן $-\varepsilon\mathbb{1}_N\in D_2$ לכל $\varepsilon>0$.

אז $\left[\text{סכום קורדינטות } p \text{ הוא } 1\right]-\varepsilon=\langle p,-\varepsilon\mathbb{1}_N\rangle\le\underbrace{\langle p,w_S\rangle}$
$=\langle p,(\mathbb{1}_S-v(S)\mathbb{1}_N)\rangle=p(S)-v(S)$

אז $-\varepsilon\le p(S)-v(S)$ לכל $0<\varepsilon$
ולכן $v(S)\le p(S)$ כנדרש.
אז p בליבה!!

[אזי הוכחנו עבור משחק מנורמל 0-1, אבל ראינו שהליבה נשמרת תחת שקילות אסטרטגית, וכל משחק שקול ל 0-1, 0-0 או 0-(-1).]

כמו כן (*) נשמר בשקילות אסטרטגית

פג

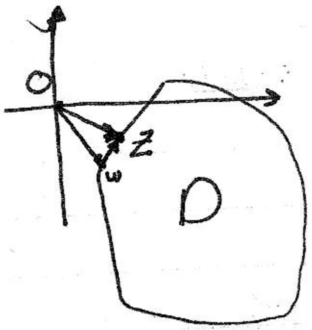
המשך שיעור 4

7/11/13

<u>פתרונות תרגילים:</u>

1) נתון D_1 ו D_2 סגורות ומינימום המרחק ביניהם מתקבל ב $x_0\in D_1$ ו $y_0\in D_2$ ו $\|x_0-y_0\|>0$ ו D_1, D_2 קמורות, אז יש וקטור מפריד.

<u>פתרון:</u> $D=\{x-y \mid x\in D_1, y\in D_2\}$; נשים לב כי D קמורה באופן ברור.
כמו כן $\emptyset = D_1\cap D_2$ ולכן $0\notin D$ כי אחרת היו שניים שווים בשתי הקבוצות השונות.



מינימום המרחק בין נקודה ב D לבין $\vec{0}$ מתקבל ב $z=x_0-y_0$

נראה ש z הוא וקטור מפריד בין $\{0\}$ ו D.

ידוע כי $\|z\|^2>0$. נראה שאם $w\in D$

רצינו

$$\langle z;\vec{0}\rangle < \langle z,z\rangle \le \langle z,w\rangle$$

[illegible]

נניח בשלילה ש $\langle z;w\rangle < \langle z;z\rangle \leftarrow 0<\langle z;z-w\rangle$

נקח $t\in[0,1]$ ונתבונן ב

שייך ל D מקמירות.

$$\|tz+(1-t)w\|^2-\|z\|^2 =$$
$$= t^2\|z\|^2+2t(1-t)\langle z,w\rangle+(1-t)^2\|w\|^2-\|z\|^2$$

אם $\langle z;w\rangle<\langle z;z\rangle$ אז $\langle z;w\rangle=\|z\|^2-\varepsilon$ ולכן

$$\|tz+(1-t)w\|^2-\|z\|^2=(t^2+2t(1-t)-1)\|z\|^2-2t(1-t)\varepsilon+(1-t)^2\|w\|^2=$$

נחלק ב $(1-t)$

$$=(1-t)\|z\|^2-2t\varepsilon+(1-t)\|w\|^2 \xrightarrow{t\to 1} -2\varepsilon<0$$

לכן עבור t מספיק קרוב ל 1 הביטוי שלילי. ולכן

$$\|tz+(1-t)w\|^2-\|z\|^2<0 \longrightarrow \|tz+(1-t)w\|^2<\|z\|^2$$

וזו סתירה לכך ש ~~[illegible]~~ z הקרוב ביותר ל $\{0\}$.

<u>לכן:</u> z מפריד בין D לבין אפס.
ולכן לכל $x-y\in D_1-D_2$ נקבל

$$0\le\langle z,x-y\rangle$$
$$\downarrow$$
$$\langle z,y\rangle\le\langle z,x\rangle$$

ולכן z מפריד בין D_1 לבין D_2.

ברור שהוקטור z ניצב למרחב הפתרונות, כלומר לישר המפריד.
כי כך בחרנו ~~[illegible]~~! ~~[illegible]~~ את מרחב הפתרונות כל אלה שמתאפשר הפתרונות שלהם עם z הוא [illegible]

7/11/13

המשך שיעור 4

<u>תרגיל המשך:</u> D חסומה וקמורה; D_a קמורה ובפרט פנים לא ריק והן זרות. [אבל המרחק שלא בהכרח חיובי] המשכה הנו להפריד ביניהם.

<u>תרגיל:</u>

v^* היינו המשחק הדואלי. הוכח שהליבה של v ושל v^* שניהן אינן ריקות. מה זה אומר על v?

<u>דוגמא:</u> $v=\{1,2\}$; $v^*=$

$v(1)=\frac{1}{3}$, $v^*(1)=\frac{2}{3}$

$v(2)=\frac{2}{3}$, $v^*(2)=\frac{1}{3}$

$v(N)=1$, $v^*(N)=1$

ולכן הליבות השוות.

נסמן $x\in core(v)$! $y\in core(v^*)$ ולכן $x(S)\ge v(S)$; $x(\bar S)\ge v(\bar S)$

ולכן $v(S)+v(\bar S)\le x(N)=v(N)$

$$y(S)\ge v^*(S)=v(N)-v(N-S)$$
$$y(\bar S)\ge v^*(S^c)=v(N)-v(S)$$
$$\xrightarrow{y(N)=} v^*(N)\ge 2v(N)-v(\bar S)-v(S)$$

לכן $v(N)\le v(S)+v(S^c)$

ולכן יש א"ש פו-כיוון ולכן שוויון. $v(N)=v(S)+v(\bar S)$

וכמו כן חייב להיות $x(N)=v(N)$ כי $x(N)\ge v(N)$ טוענו ראינו שיש שוויון בסוף ולכן לא ותק א"ש חזק.

ולכן v אדיטיבי! ולכן $v^*(S)=v(S)$

<u>הגדרה:</u> משחק v יקרא קמור [סופר-מודולרי] אם לכל S,T

$$v(S)+v(T)\le v(S\cup T)+v(S\cap T)$$

<u>תרגילים לפעם הבאה:</u>

775: 30, 26

780: 54

781: 55

7/11/13

המשך שיעור 4

פתרון תרגיל וב:

הגדרה: אוסף $(\{S_i\},\{\gamma_i\})$ משקלות יקרא מינימלי אם לא קיים אוסף מאוזן אחר שמוכל בו ממש.

הוכח שאוסף מינימלי מהוות וקטורים בת"ל ב $\mathbb{R}^n$. [כלומר $\mathbb{1}_{S_i}$ בת"ל לינארית]

פתרון: אם $\mathbb{1}_{S_i}$ תלויים לינארית אז יש מקדמים α_i לא כולם אפס כך ש $\sum \alpha_i \mathbb{1}_{S_i}=0$ מצד שני $1=\sum \gamma_i \mathbb{1}_{S_i}$. לכן

לכל $t\in\mathbb{R}$
$$\sum(\gamma_i+t\alpha_i)\mathbb{1}_{S_i}=1$$

לכן לכל נגדיל את t עד שה γ_i הראשון יתאפס, וזה יהיה אוסף מאוזן מוכל ממש בסתירה... [הפונ' רציפה לכן מערך הביניים יש הראשון שמתאפס].

14/11/13

שיעור שבוע 5

הליבה ומשחקי שוק:

תזכורת: (N,v) משחק. $|N|=n$. ! $(x_1,\dots,x_n)$ בליבה אם $\sum_{i=1}^n x_i=v(N)$! $\sum_{i\in S} x_i\ge v(S)$ לכל S.

משפט שפלי-בונדרבה: הליבה אינה ריקה אמ"מ לכל אוסף מאוזן
$$\sum_{i=1}^n \gamma_i v(S_i)\le v(N)$$

משחקי שוק: מוגדר באמצעות:

① l גורמי ייצור. ② n חברות/פירמות תקרא N.

② $x^i=(x^i_1,\dots,x^i_l)$ זה סל מוצרי הייצור שיש לפירמה i [שחקן i]

③ f_i נתוני פונ' הייצור של פירמה i כך ש $f_i:\mathbb{R}^l_+\to\mathbb{R}_+$

לא יורדת וקעורה. [כלומר עבור $x=(x_1,\dots,x_l)$, $y=(y_1,\dots,y_l)$ שניהם ב $\mathbb{R}^l_+$! $x_j\ge y_j$ לכל $j=1,\dots,l$ אז $f_i(x)\ge f_i(y)$] כלומר אם יש לך יותר גורמים ממש בסל הפונקציה אז נוכל לייצר יותר... מונו.

קעורה ← **כמו כן נדרוש:**

אם $x,y\in\mathbb{R}^l_+$! $\alpha\in(0,1)$ אז
$$f_i(\alpha x+(1-\alpha)y)\ge \alpha f_i(x)+(1-\alpha)f_i(y)$$

משמעות התנאים..