24/10/13

שיעור שבוע 2

משחק שיתופי: (N,v) כאשר N קבוצת השחקנים; $v:2^N\to\mathbb{R}$ ו- $v(\emptyset)=0$

הליבה: (CORE)

דוגמא: L קבוצת השחקנים עם כפפה שמאלית; R - קבוצת השחקנים עם כפפה ימנית; $N=L\cup R$ ו- $v(S)=\min(|S\cap L|,|S\cap R|)$.

נניח ש $|L|=2$ ו- $|R|=3$ אז מתקיים $v(N)=2$. איך נחלק את הרווח בין כל השחקנים? נרצה שלא תהיה שום קואליציה שיכולה להשיג יותר ממה שהיא קיבלה.

$\boxed{\text{וקטור חלוקת הרווח}}$

כלומר נחפש $(x_1,x_2,\dots,x_5)$ כך ש $x_i\geq 0$ [כי כל אחד לבד יכול להרוויח 0]
כמו כן $\sum_{i\in N}x_i=2$ [כלומר מחלקים את כל הרווח]

כמו כן כמובן $x_1+x_3\geq 1$; $x_1+x_4\geq 1$ וכו'... $x_2+x_4\geq 1$ וכך הלאה.
כלומר אין אף קואליציה שיכולה (של שני שחקנים.) להשיג יותר ממה שהחלוקה נותנת לה.

כמו כן נרצה שכל רביעייה שמכילה את $\{1,2\}$ תקבל לפחות 2.
השאלה היא האם יש פתרון למערכת?

דוגמא לחלוקה שמקיימת את כל אי-השוויונים היא $x_1=1, x_2=1$ ורק השאר אפס. כלומר $(1,1,0,0,0)$.

זה ורק זה הפתרון!! נניח $\sum_{i=1}^{5}x_i=2$ ונניח בשלילה ש $x_3+x_4+x_5>0$
במקרה $x_1+x_2<2$; אם מסכמים אי-שוויונות

$$3(x_1+x_2)+2(x_3+x_4+x_5)\geq 6$$
$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+(x_1+x_2)\geq 6$$
$$(x_1+x_2)\geq 2$$

סתירה...
אז בהכרח $(x_1+x_2)\geq 2$ ולכן אין פתרון אחר...

24/10/13

המשך שיעור 2

השאלה אם כן היא מתי קיימת חלוקה "יציבה" כלומר מקיימת את הדרישות שציינו לעיל.

<u>הגדרה:</u> בהינתן (N,v) משחק שיתופי נגדיר את הליבה של v להיות

$|N|=n$

$$Core(v)=\left\{(x_1,\dots,x_n)\ \middle|\ \sum_{i\in S}x_i\geq v(S)\quad \forall S\subsetneq N \quad \text{וגם} \quad \sum_{i\in N}x_i=v(N)\right\}$$

כלומר כל החלוקות של העוגה, כך שאף קואליציה לא רוצה לפרוש יותר. טוב.

הקבוצה הזו נקראת הליבה של v.

<u>דוגמא:</u> $N=\{1,2,3\}$ ו $v(i)=0$ לכל $i\in N$; לכל $|S|=2$ מתקיים $v(S)=3$ ו $v(N)=4$.

אז נחפש (x_1,x_2,x_3) כך ש $x_i\geq 0$ לכל i ו $x_1+x_2+x_3=4$

<u>ובנוסף:</u>

$$\begin{cases}x_1+x_2\geq 3\\ x_2+x_3\geq 3\\ x_1+x_3\geq 3\end{cases}\longrightarrow 2(x_1+x_2+x_3)\geq 9\longrightarrow x_1+x_2+x_3\geq 4.5$$

סתירה!

לכן אין פתרון בליבה! כלומר אין יציבות לעולם.
כלומר הליבה ריקה... כלומר לכל חלוקה של העוגה תמיד תהיה קואליציה שתעדיף לפרוש

$\boxed{\text{מתי קיימת חלוקה בליבה?}}$

<u>נחזור למשחק השוק של הכפפות:</u> נניח לשם פשטות כי $|L|=|R|=2$. מהי הליבה?

נשים לב כי $(1,1,0,0)$ ~~אין~~ בליבה, וגם $(0,0,1,1)$ בליבה.

אבל $(\frac12,\frac12,0,0)$ לא בליבה... $(\frac23,\frac23,\frac13,\frac13)$ כן בליבה

נשים לב שכל מי שבליבה הוא מהצורה $(\alpha,\alpha,1-\alpha,1-\alpha)$
כלומר צירוף קמור של $(1,1,0,0)$ ו $(0,0,1,1)$

וכל מי שבצורה הזו הוא בליבה.

(*) אם יש שתי נקודות בליבה אז כל צירוף קמור שלהן בליבה

24/10/13

המשך שיעור 2

הגדרה: קבוצה $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא קמורה אם לכל $x,y\in G$ ולכל $\alpha\in[0,1]$ אז $\alpha x+(1-\alpha)y\in G$.

טענה: אם G_1, G_2 קמורות אז $G_1\cap G_2$ קמור. נניח $y,x\in G_1\cap G_2$ ויהי $\alpha\in[0,1]$ אז $\alpha x+(1-\alpha)y\in G_1$ ו $\alpha x+(1-\alpha)y\in G_2$ [מקמירות]
ולכן $\alpha x+(1-\alpha)y\in G_1\cap G_2$

מסקנה: אם $G_1,\dots,G_k$ קמורות אזי $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$ קמורה.

הגדרה:
יהי $a>0$ ו $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ לטרנספורמציה הבאה נקרא טרנספורמציה אפינית חיובית
$(x_1,\dots,x_n)\to a(x_1,\dots,x_n)+(b_1,\dots,b_n)$

* נניח כי v ו u הם שני משחקים שקולים אסטרטגית כלומר קיים $a>0$ ו $b_1,\dots,b_n$ כך שלכל $S\subseteq N$ מתקיים $u(S)=av(S)+\sum_{i\in S}b_i$ כלומר
$u(S)=a\cdot v(S)+b(S)$

טענה: הליבה של u היא תוצאת הטרנספורמציה האפינית המתאימה של הליבה של v. כלומר אם $u(S)=a\cdot v(S)+b(S)$ אזי

$$Core(u)=\left\{a(x_1,\dots,x_n)+(b_1,\dots,b_n)\,\middle|\,(x_1,\dots,x_n)\in Core(v)\right\}$$

הוכחה: יהיו $a,b_1,\dots,b_n$ כך ש $u(S)=a\cdot v(S)+b(S)$ לכל $S\subseteq N$.

יהיו $(x_1,\dots,x_n)\in Core(v)$. כלומר $v(N)=\sum_{i\in N}x_i$

וכן $v(S)\le\sum_{i\in S}x_i$ לכל $S\subseteq N$.

ניקח טרנספורמציה אפינית של $(x_1,\dots,x_n)$: $a(x_1,\dots,x_n)+(b_1,\dots,b_n)$
ומתקיים:

$$a(x_1+\dots+x_n)+(b_1+\dots+b_n)=a\cdot v(N)+(b_1,\dots,b_n)=u(N)$$

יהי $S\subsetneq N$ אז מתקיים:

כמו שלא תקף לכל אחד הקואליציות

$$\sum_{i\in S}(ax_i+b_i)=a\sum_{i\in S}x_i+\sum_{i\in S}b_i\ge av(S)+b(S)=u(S)$$

ולכן $a(x_1,\dots,x_n)+(b_1,\dots,b_n)$ נמצא בליבה של u.

24/10/13

המשך שיעור 2

שוב שינוי אסטרטגי זה יחס שקילות אז נשאר אותו הדבר בכיוון ההפוך ונקבל הגרעין קו-וריאנטי.

אפשר להוכיח גם כך:

נניח כי $x \notin Core(v)$ כלומר או ש $\sum_{i\in N} x_i \neq v(N)$ אז ברור כי $a(x_1+\ldots+x_n)+(b_1+\ldots+b_n) \neq u(N)$

או ש קיימת $S \subseteq N$ כך ש $v(S) < \sum_{i\in S} x_i$; ובגלל הטרנספורמציה ונקבל

$$u(S) = av(S)+b(S) > a\sum_{i\in S} x_i + b(S)$$

$$\boxed{x(S)=\sum_{i\in S} x_i}$$

כלומר $ax+(b_1,\ldots,b_n) \notin Core(u)$

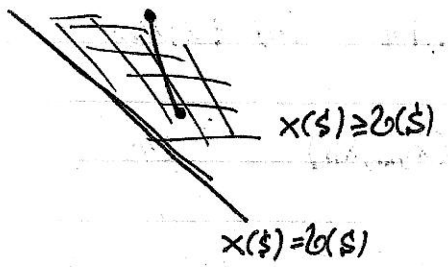
טענה: הליבה של v היא קבוצה קמורה.

הוכחה: עבור $\emptyset \neq S \subsetneq N$ נגדיר $D_S = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x(S) \geq v(S)\}$

$$E_N = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x(N) = v(N)\}$$

נשים לב כי $E_N \cap \left(\bigcap_{\emptyset \neq S \subsetneq N} D_S\right) = Core(v)$

ובגלל ב D_S ; נשים לב $x(S)=v(S)$ היא משוואה ליניארית עם $|S|$ נעלמים.
מרחב הפתרונות שלה היא על-מישור ב $\mathbb{R}^n$.
קבוצת הפתרונות של $x(S) \geq v(S)$ בפרט קמורה.



כמו כן E_N קמורה באופן דומה
בצורה טריוויאלית.
לכן הליבה היא חיתוך סופי של קבוצות
קמורות ולכן בעצמה קמורה. ■

(1969) **משפט:** Shaply - Bondareva [משפט אפיון למשחקים בעלי ליבה לא ריקה]

נזכר בדוגמא במשחק 3 השחקנים שכל זוג מקבלים 3 וכולם מקבלים 4. ראינו שהליבה ריקה.
הא-שוויון

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\geq 3 \\ x_2+x_3 &\geq 3 \\ x_1+x_3 &\geq 3 \end{aligned} \longrightarrow 2(x_1+x_2+x_3) \geq 3\cdot 3$$

24/10/13

12

המשך שיעור 2

באותו אופן יכולנו לכתוב:

$$\frac{1}{2}x(1,2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 1.5$$
$$\frac{1}{2}x(2,3) = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq 1.5$$
$$\frac{1}{2}x(1,3) \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \geq 1.5$$

כלומר הקואליציה של כולם.
$$+ \quad x(1,2,3)$$

סימון: תהי $\emptyset \neq S \subseteq N$

הוקטור 1_S יקרא **הוקטור המציין:**

$$1_S^{(i)} = \begin{cases} 1 & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases}$$

[וקטור מגודל n]

$$x(1,2,3) = 1_N$$

אז קיבלנו

$$\frac{1}{2} 1_{\{1,2\}} \geq 1.5$$
$$\frac{1}{2} 1_{\{2,3\}} \geq 1.5$$
$$\frac{1}{2} 1_{\{1,3\}} \geq 1.5$$

הגדרה: אוסף מאוזן: זוג $\Big(\underbrace{\{S_k\}_{k=1}^{l}}_{\text{מספר סופי של קואליציות}}, \underbrace{\{x_i\}_{i=1}^{l}}_{\text{מספר סופי של מקדמים אי-שליליים}}\Big)$ כך ש:

$$\sum_{i=1}^{l} x_i 1_{S_i} = 1_N$$

למשל: $N=\{1,\dots,n\}$; $S_i=\{i\}$; $x_i=1$ ...

שיעור מס' 3

31/10/13

הגדרה:

(N,v) משחק שיתופי;

$$Core(v) = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \;\middle|\; \begin{matrix} \forall \emptyset \neq S \subseteq N \\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \end{matrix} : x(n)=v(n) \right\}$$

(*) מהם התנאים שמאפיינים משחק שהליבה שלו לא ריקה?

אוסף מאוזן: $(\{S_i\}_{i=1}^{l} ; \{\delta_i\}_{i=1}^{l})$ לכל i $S_i \subseteq N$ כך ש

$$\sum_{i=1}^{l} \delta_i 1_{S_i} = 1_N$$

דוגמה: $N=\{1,2,3\}$;

$$v(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq 1 \\ 3 & |S| = 2 \\ 4 & |S| = 3 \end{cases}$$

ובמשחק זה הליבה ריקה.