9/1/14

שיעור שבוע 13

משחקי מיקוח:

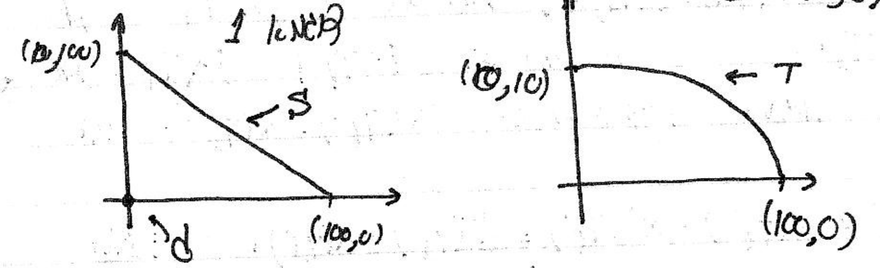
אני נמדל משחק מיקוח בין שני צדדים בעזרת קבוצה $S\subseteq\mathbb{R}^2$ ווקטור $d\in\mathbb{R}^2$. כאשר S זה אוסף התוצאות האפשריות במשא ומתן והוקטור d התוצאה במקרה של אי-הסכמה.

קשה לדמיין את התועלות של מחלק נכסים בעולם האמיתי

דוגמא: חלוקה רווח פוטנציאלי של 100 שקלים, אם $S=\{(x,100-x)\mid 0\le x\le 100\}$ תחת הנחה שפונ' התועלת של כל שחקן מא' הוא x עצמו אז סביר שהחלוקה תהיה 50-50

דוגמא 2: התועלת של שחקן 1 מהכסף הוא $U_1(x)=x$. התועלת של שחקן 2 מהכסף היא $U_2(x)=\sqrt{x}$.
במישור התועלות קבוצת ההסכמים האפשריים היא $\{(x,\sqrt{100-x})\mid 0\le x\le 100\}$

בשני המקרים $d=(0,0)$



(*) נשים לב שלבחירת פונ' התועלת יש השפעה רבה

(*) כיצד נמצא את נקודת השווה? איזה עקרונות צריך לקיים הפתרון ההוגן? האם זה פתרון יחיד רצה? זה עניין של גוונות.

סימונים:

1) $x,y\in\mathbb{R}^2$;

$x\ge y \leftrightarrow x_1\ge y_1$ ו $x_2\ge y_2$

$x>y \leftrightarrow x\ge y$ אבל $x\ne y$

$x\gg y \leftrightarrow x_1>y_1$ ו $x_2>y_2$

2) יהיו קבוצה $S'\subseteq\mathbb{R}^2$ נגדיר: $x+S=\{x+s\mid s\in S\}$

$x\cdot S'=\{\langle x,s\rangle\mid s\in S\}$

3) יהיו $S,T\subseteq\mathbb{R}^2$ נסמן $S+T=\{x+y\mid x\in S, y\in T\}$

4) אם $c\in\mathbb{R}$ אז $c\cdot S=\{c\cdot x\mid x\in S\}$

9/1/14

המשך שיעור 13

משחק מיקוח: הינו זוג סדור (S,d) כך ש- $S\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצת אפשרויות קמורה קומפקטית לא ריקה ! $d\in\mathbb{R}^2$ וקיים $x\in S$ כך ש $d<<x$.

כלומר יש נק' שבה שני הצ' מרוויחים יותר משלא מגיעים להסכמה

⊖ נסמן ב $\mathcal{F}$ את קבוצת כל משחקי המיקוח.

פתרון: הינו פונ' φ המתאימה לכל משחק מיקוח $(S,d)\in\mathcal{F}$ נקודה $\varphi(S,d)\in S$.

אנחנו מחפשים תוצאת של טוב שרק

מה יהיה פתרון טוב עבורנו? [העקרונות של נאש]

⊛ **סימטריה:** משחק מיקוח (S,d) נקרא סימטרי אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

⊖ $d_1=d_2$ ⟵ נק' אי ההסכמה הינה סימטרית

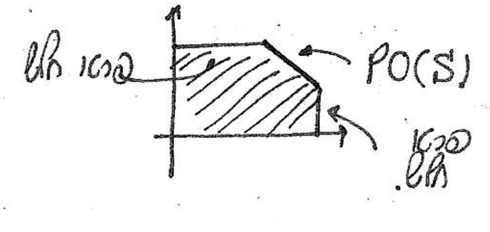
⊖ אם $(x_1,x_2)\in S$ אז גם $(x_2,x_1)\in S$

פתרון φ מקיים את עקרון הסימטריה אם לכל משחק מיקוח (S,d) סימטרי מתקיים $\varphi_1(S,d)=\varphi_2(S,d)$. [נשמע הוגן שבכה הדברים יתנהגו...]

כלומר עבור משחקים סימטריים נרצה לפתרון סימטרי, ונרצה שהפתרון שלנו יתלכד עם השוויון הזה של השחקנים הללו

⊛ **יעילות:** נקודה $x\in S$ נקראת נקודה יעילה ב-S אם אין נקודה $y\in S$ $y\neq x$ המקיימת $y\geq x$. את אוסף הנקודות היעילות נסמן ב $PO(S)$.

פתרון מקיים את עקרון היעילות אם לכל משחק מיקוח (S,d) מתקיים $\varphi(S,d)\in PO(S)$



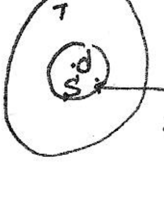
פורשים שלא קיימת נקודה שמשפרת לפחות אחד בתשלום (השגה)

פרטו חלש: לא קיימת נקודה שלה הוא טובה ממש בשתי הקורדינטות

⊛ **קווריאנטיות לטרנספורמציות אפיניות:**

פתרון φ מקיים קווריאנטיות תחת טרנספורמציה אפינית אם לכל משחק מיקוח (S,d), לכל וקטור a כך ש $a>>0$ ולכל וקטור $b\in\mathbb{R}^2$ מתקיים $a\varphi(s,d)+b=\varphi(aS+b,ad+b)$. [כלומר שינוי יחידות המידה לא משנה הפתרון וגם הוספת קבוע לא תשפיע על הפתרון!]

⊛ **אי-השפעה של אפשרויות לא רלוונטיות:**



$\varphi(T,d)=\varphi(s,d)$

פתרון φ מקיים עקרון אי תלות באפשרויות לא רלוונטיות אם לכל משחק מיקוח (T,d), ולכל תת-קבוצה $S\subseteq T$ כך ש $\varphi(T,d)\in S$ אז $\varphi(S,d)=\varphi(T,d)$

נתון לויכוח. לא בהכרח שזה מייצג המציאות בצורה נכונה...

9/1/14

המשך שיעור 13

קיום, יחידות ואיפיון פתרון נאש

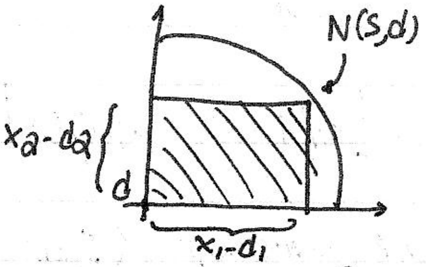
נקודה $x\in S$ נקראת סבירה פרטית אם $x\geq d$.

<u>משפט</u>: קיים פתרון <u>יחיד</u> N עבור המשפחה $\mathcal{F}$ המקיים את עקרונות נאש שראינו לעיל. יתר על כן $N(S,d)$ הוא הנקודה הסבירה פרטית $x\in S$ שעבורה המלבן שקודקודו השמאלי תחתון הוא d וקודקודו הימני עליון הוא x ובעל שטח מקסימלי.

הנקודה $N(S,d)$ נקראת נקודת ההסכמה של נאש, למשחק המיקוח (S,d).

<u>דוגמא</u>:

במידה שאם S לא סגורה אז לא ודאי ניתן להבטיח של פתרון, כי תמיד ניתן לשפר



<u>משפט עזר</u>: לכל משחק מיקוח (S,d) ישנה נקודה אחת ויחידה בקבוצה
$$\underset{x\in S,\ x\geq d}{\arg\max}\ (x_1-d_1)(x_2-d_2)$$
← כלומר שטח מקסימלי למלבן.

<u>הוכחה</u>: $(x_1-d_1)(x_2-d_2)$ נקראת מכפלת נאש ונסמנה $f(x)=f(x_1,x_2)$.
אם נזיז את נקודת המישור ע"י הוספת $-d$ לכל נקודה נקבל את המשחק המיקוח $(S-d,(0,0))$. מכיוון ששטח של מלבן הוא אינוואריאנטי להזזה, הנקודה בה מכפלת נאש מקסימלית עבור המשחק המקורי הן אותן הנקודות במשחק החדש, אחרי ההזזה.
לכן בה"כ ניתן להניח כי $d=(0,0)$, ואז $f(x)=x_1x_2$.
נסמן $D=\{x\in S \mid x\geq d\}$; קבוצה זו היא חיתוך לא ריק של הקבוצה קמורה וקומפקטית, ולכן קמורה וקומפקטית. [חיתוך של S ו-$\{x_1\geq d_1, x_2\geq d_2\}$!]

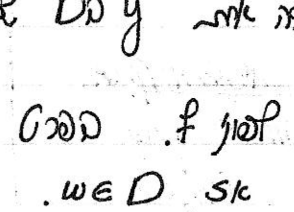
הפונ' f רציפה ו-D קומפקטית אזי ישנה לפחות נקודה אחת y ב-D שבה המקסימום מתקבל.
תהיינה $y\neq z$ שתי נקודות ב-D בהן המקסימום מתקבל לפונ' f. בפרט $y_1y_2=z_1z_2$; נגדיר $w=\frac{y+z}{2}$; מקמירות D אז $w\in D$.

נראה ש $f(y)<f(w)$; ואז

$$f(w)=\left(\frac{y_1+z_1}{2}\right)\left(\frac{y_2+z_2}{2}\right)=\frac{y_1y_2+z_1z_2}{4}+\frac{y_1z_2+z_1y_2}{4}>\frac{y_1y_2}{2}+\frac{y_1y_2}{2}=y_1y_2$$

מהסרטוט כך רואים

בסתירה.



9/1/14

המשך שיעור 12

⊖ אז הוכחנו קיום ויחידות של נקודה שממקסמת את שטח המלבן. נראה שנקודה זו מקיימת התכונות שלנו.

משפט עזר: הפתרון N מקיים את עקרונות נאש.

הוכחה:

סימטריה: יהי (S,d) משחק מיקוח סימטרי ויהי y^* הפתרון N שממקסם את שטח המלבן המבוקש. נסמן ב-Z את $Z=(y_2^*,y_1^*)$ ומכיוון שהמשחק סימטרי אז $Z\in S$, אבל בבירור $f(y^*)=f(Z)$ אבל y^* יחידה, לכן $Z=y^*$ לכן y^* סימטרי כנדרש.

$$(y_1^*-d_1)(y_2^*-d_2)=(Z_2-d_1)(Z_1-d_2)=(Z_1-d_1)(Z_2-d_2)$$

$$\boxed{d_1=d_2}$$

יעילות: אם $N(S,d)$ אינה יעילה ב-S אז קיימת נקודה $Z\in S$ כך ש- $Z\geq N(S,d)$. $Z\neq N(S,d)$! בבירור $f(Z)\geq f(N(S,d))$ אבל יש יחידות למקסימום לכן $Z=N(S,d)$ בסתירה.

עקרון הקווריאנטיות: הנקודה $N(S,d)$ מקיימת המקסימום של f בתחום D. הפעלה של טרנספורמציה אפינית $x\mapsto ax+b$ מגדילה השטח פי a_1a_2 לכן אם לפני הפעלת הטרנספורמציה ממקסמת ב-y אז אחרי ההפעלה תמקסם ב-$ay+b$

עקרון אי-תלות באפשרויות לא רלוונטיות:

אם $S\subseteq T$ אז $\max_S \le \max_T$ לכן אם המקסימום נמצא בקבוצה S אז עדיין נמצא שם.

⊛ כעת נרצה להראות שכל פתרון שמקיים עקרונות נאש מתלכד עם פתרון זה.

משפט: כל פתרון φ המקיים את עקרונות נאש מתלכד עם הפתרון N.

הוכחה: יהי φ פתרון המקיים את עקרונות נאש. יהי (S,d) משחק מיקוח ונסמן y^* להיות $N(S,d)$ כפי שהגדרנו קודם. נראה כי $\varphi(S,d)=y^*$.

שלב 1: הפעלת טרנספורמציה אפינית. הנקודה y^* מקיימת $d\ll y^*$ ונבחר טרנספורמציה L המעתיקה את d לראשית הצירים ואת y^* ל-$(1,1)$

$$L(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1-d_1}{y_1^*-d_1},\frac{x_2-d_2}{y_2^*-d_2}\right)$$

9/1/14

המשך שיעור 12

מכיוון שהפתרון N מקיים קווריאנטיות תח. הזזות אפיניות $N(aS+b,(0,0)) =$

$$= N(aS+b, ad+b) = ay^* + b = (1,1)$$ [a ! b הקבועים המתאימים]

כמו שהגדרנו להם: $d=(0,0)$! $y=(1,1)$

<u>שלב שני:</u> לכל $x \in aS+b$ מקיים $x_1+x_2 \le 2$.

יהי $x \in aS+b$, בבירור $aS+b$ קמורה ולכן גם הקטע המחבר את x עם $(1,1)$ נמצא ב-$aS+b$, כלומר לכל $\varepsilon \in [0,1]$ מתקיים $\varepsilon x + (1-\varepsilon)(1,1) = z_\varepsilon$ ~~...~~ $\in aS+b$. עבור ε קטן מספיק הנקודה הנ"ל שונה מ-$(0,0)$. לכן לכל ε כזה מתקיים

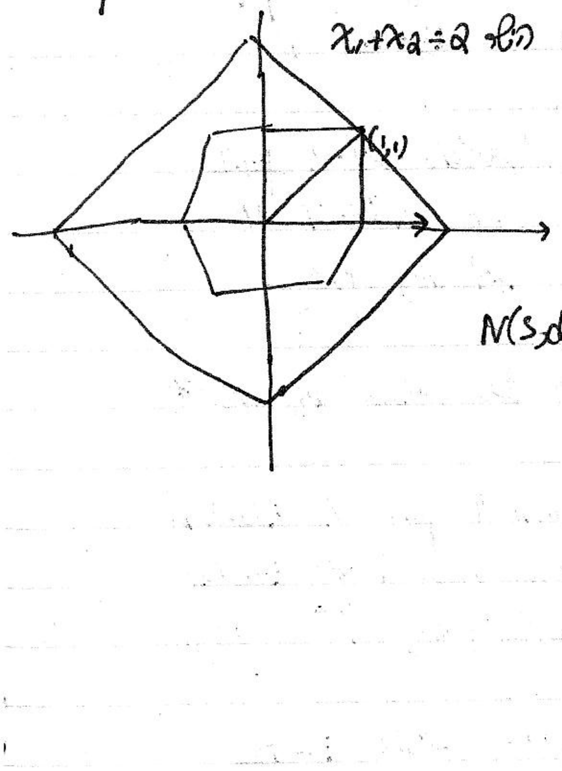
$$f(z_\varepsilon) \le \max_{\{w \in aS+b,\, w \ge (0,0)\}} f(w) = f(N(aS+b,(0,0))) = f(1,1) = 1$$

כך הגדרנו את y...

<u>מצד שני:</u> $f(z_\varepsilon) = z_{1\varepsilon} \cdot z_{2\varepsilon} = 1 + \varepsilon(x_1+x_2-2+\varepsilon(x_1-1)(x_2-1))$

כפי שלכל $\varepsilon>0$ קטן רצינו הביטוי שלנו יהיה קטן מ-1 [כמו שאנו יודעים שקורה]
אז $x_1+x_2-2 \le 0 \leftarrow x_1+x_2 \le 2$

<u>שלב שלישי:</u> נראה כי $\varphi(S,d)=N(S,d)$. יהי T ריבוע סימטרי ביחס לאלכסון הראשי המכיל את $aS+b$ ונמצא תחת הישר $x_1+x_2=2$



מעקרונות הסימטריה והיעילות של φ מתקיים
$\varphi(T,(0,0))=(1,1)$.
ומעקרון חוסר הרלוונטיות, נקבל שגם פתרון $\varphi(S,d)$
חייב להיות $(1,1)$ ולכן $\varphi(S,d)$ משתנה עם $N(S,d)$
בקפסל.