26/12/13

המשך שיעור 11

הוכחה: נהי W כל הקואליציות המנצחות יהי $\cap W = I$ [שחקני וטו]

אם $I=\emptyset$ אזי הליבה ריקה, כי

$$|W| = \sum_{T\in W} x(T) \le |W|-1 \leftarrow \text{[כי אין שחקן שמופיע בכולם]}$$

כי זה ליבה... וזו סתירה לליבה...

ואם $I\neq\emptyset$ אזי הליבה מורכבת מכל החלוקות של 1 בין שחקני הוטו I.

לכן אם נחזור למקרה שאינו אד יש שם שחקן וטו, שחקן 1, לכן הליבה היא בדיוק $\{(1,0,0)\}$. לכן הגרעין הוא $(1,0,0)$.

ושים לב שאם יש איבר בליבה אז הגרעין חייב להיות בליבה! (שוב מהגדרה סדר לקסיקוגרפי)

נבקש הגרעין.

2/1/14

שיעור 12

בעיית פשיטת רגל:

בעיית פשיטת רגל הינה $[E; d_1,\dots,d_n]$ רק ש $d_1\le\dots\le d_n$

$\sum_{i=1}^{n} d_i \ge E$!

⊖ הגדרנו פתרון של שניים אוחזים במקרה של שתי נושים.

⊖ בגמרא הזאת הגדרנו פתרון שהוא קונסיסטנטי עם שניים אוחזים.

משחק מייצג:

יהי v משחק רק ש N קבוצת הנושים, לכל $S\subseteq N$ מגדירים $v(S)=\max\{0,E-d(S^c)\}$

המטרה: להראות שהגרעין של v הוא קונסיסטנטי עם שניים אוחזין, ולכן יהיה הפתרון בגמרא שהיינו על המשנה לקונסיסטנטי.

⊖ ראינו שאם $n=2$ אז הגרעין (וגם שאפלי) מסכים עם שניים אוחזין.

עבור $T\subseteq N$, נגדיר בעיה חדשה עבור חלוקה כלשהי x באופן הבא

$[x(T); (d_i)_{i\in T}]$ ← זו בעיית פשיטת רגל חדשה.

כלומר מחלקים בתוך T את סך מה שהם קיבלו באמצעות החלוקה x.

$$[E, (d_i)_{i\in N}] \xrightarrow{\text{מצמצם}} [x(T), (d_i)_{i\in T}]$$

המשך שיעור 12

10/1/11

כמו כן נגדיר משחק מצומצם של v על T במצב x $\leftarrow$ W_T^x [הגדרה שיותר שפויה]

איך?

$$\begin{tikzcd}
{[E, d_1, \dots, d_N]} \arrow[r] \arrow[d] & \cancel{\ } \arrow[d] \\
{[x(T), d_1, \dots, d_T]} \arrow[r] & W_T^x
\end{tikzcd}$$

<u>הגדרה:</u> בהינתן $T \subseteq N$ וחלוקה x של E, נגדיר את המשחק

$$W_T^x(R) = \begin{cases} v(N) - x(T^c) & R = T \\ \max\limits_{Q \subseteq T^c} v(R \cup Q) - x(Q) & R \subsetneq T \\ 0 & R = \emptyset \end{cases}$$

לכל $R \subseteq T$

$R = T$ ← הקואליציה T פורשת, לוקחת הכל לעצמה וגורפת את כל השווי ומשאירה להם כמו ש-x היה נותן להם

$R \subsetneq T$ ← אותו קונספט, רק עבור R פורש שלוקחת את הקואליציה הטובה ביותר מהנותרים

פשיטת הרגל

נראה ש- W_T^x הוא למעשה המשחק שמוגדר $v\left([x(T), (d_i)_{i \in T}]\right)$ ← כמו שהגדרנו את המשחק.
ובפרט במקרה שיש רק 2 שחקנים זה מתאים לשניים אחרים, ואם x יהיה הגרעין של W_T^x
אז נקבל עם שניים אחרים יהיה גם הגרעין של המשחק כולו! [הוכחה בהמשך]

<u>טענה:</u> (א) x חלוקה כך ש- $x_i \le d_i$ ותהי $T \subseteq N$ קואליציה. נגדיר לכל $R \subseteq T$
$W(R) = (x(T) - d(R^c))$ ← ממש כמו משחק פשיטת רגל, רק מצומצם על קואליציה.
אזי $W_T^x = W$! [כלומר לצמצם כך או כך זה אותו הדבר!]

<u>הוכחה:</u> תחילה נראה ש- $W(T) = W_T^x(T)$; $0 = W(\emptyset) = W_T^x(\emptyset)$

<u>אכן:</u>

$$W(\emptyset) = 0 \left[\begin{array}{c} \text{הנתון כי } x_i \le d_i \\ \text{ולוקחים מקס עם אפס} \end{array}\right]$$

לפי הגדרה...

$W_T^x(\emptyset) = 0$ ←

<u>מסקנה:</u> אם x גרעין של הגרעין של W_T^x הוא x!

נגדיר $f(x) = x_+$ שהוא מקס של x ואפס. זו פונקציה 1 וקמורה. לכן $\frac{f(x)+f(y)}{2} \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ולכן! $f(x+y) \overset{1}{=} 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le f(x) + f(y)$

<u>נשים לב:</u> $W(T) = x(T)$

$W_T^x(T) = (v(N) - x(T^c))_+ = (E - x(T^c))_+ \overset{!}{=} (x(N) - x(T^c))_+ = x(T)$ קבלנו...

2/1/14

המשך שיעור 12

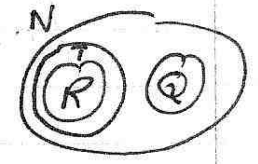
המשך הוכחה: נראה שלכל $\emptyset\neq R\subseteq T$ מתקיים $W_T^x(R)\le w(R)$

אזי מתקיים: נניח כי $W_T^x(R)$. תהי $Q\subseteq T^c$ הממקסמת את הערך הנ"ל.

כלומר $W_T^x(R)=v(R\cup Q)-x(Q) \leftarrow W_T^x(R)=[E-d((R\cup Q)^c)]_+-x(Q)$

נשים לב ש $Q\subseteq T^c$ ובפרט $Q\subseteq R^c$. לכן $R\cap Q=\emptyset$ לכן

$$N\setminus Q = R\uplus(N\setminus(R\cup Q))$$



בגלל ש x חלוקה אז $x_i\ge 0$ לכל i אז $0\le x(Q)$

לכן $x(Q)=(x(Q))_+$

$$W_T^x(R)=\Big[E-d(\underbrace{N\setminus(R\cup Q)}_{=(R\cup Q)^c})\Big]_+-x(Q)_+\le\big[E-d(N\setminus(R\cup Q))-x(Q)\big]_+=$$

$$=\big[x(N)-x(Q)-d(N\setminus(R\cup Q))\big]_+=\big[x(T)+x(T^c\setminus Q)-d(N\setminus(R\cup Q))\big]_+=$$

$$=\big[x(T)+x(T^c\setminus Q)-(d(T\setminus R)+d(T^c\setminus Q))\big]_+=$$

$$\big[\underbrace{x(T^c\setminus Q)-d(T^c\setminus Q)}_{\text{אי-חיובי}}+x(T)-d(T\setminus R)\big]_+\le\big[x(T)-d(T\setminus R)\big]_+=$$

$\boxed{(a+b)_+\le a_++b_+}$

לפי הגדרה של w ... $=w(R) \longrightarrow W_R^+(R)\le w(R)$

כעת נראה $W_T^x(R)\ge w(R)$ לכל קואליציה $\emptyset\ne R\subseteq T$ ואז

$$W_T^x(R)\ge v(R\cup(N\setminus T))-x(N\setminus T)=[E-d(T\setminus R)]_+-x(N\setminus T)=$$

כי הוא מקס' בפרט גדול מאחד בקבוצה

$$=[E-d(T\setminus R)]_+-x(N)+x(T)=[E-d(T\setminus R)]_+-E+x(T)$$

$$\ge E-d(T\setminus R)-E+x(T)=x(T)-d(T\setminus R)$$

קמירות ה+.

נותר להראות ש $W_T^x(R)\ge 0$, זה מקסימום ובפרט גדול מאשר אם ניקח עבור הקבוצה הריקה

$$W_T^x(R)\ge v(R\cup Q)-x(Q)=v(R)\ge 0$$

לכן $W_T^x(R)\ge \max(x(T)-d(T\setminus R),0)$ קיבלנו

לפי תכונת שני קודים לצמצום השוק. [illegible] ... W_T^x

2/1/14

המשך שעור 10

⊙ על מנת להשלים את התמונה נראה שהגרעין x^* מקיים $x_i^* \le d_i$ כי השתמשנו בזה בהוכחה.

אבל נזכר ש v משחק קמור, כפי שהראנו אז, ולכן הליבה אינה ריקה, ולכן הגרעין בליבה, לכן $x_i^* \ge v(i)$ ←

$$E - x_i^* = x^*(N\setminus i) \underset{\text{בליבה}}{\ge} v(N\setminus i) = [E-d(i)]_+ \ge E - d_i$$

ולכן! $x_i^* \le d_i$

[לכן הגרעין מתנהג עם קונסיסטנטי בליבה]

שידוכים יציבים

⊙ נרצה לדון בליבה של שוק סחר חליפין.

<u>רקע:</u> יש n סוחרים ו-l סחורות, וזה שוק סחר חליפין. כל סוחר i מגיע לשוק עם סל התחלתי $x_i \in \mathbb{R}^l_+$ וכמו כן לכל סוחר יש סדר העדפה [שלם, טרנזיטיבי, רפלקסיבי] שנסמנו $\succ_i$ על פני $\mathbb{R}^l_+$. [כלומר לכל סוחר יש סדר על הסלים אותם הוא מעדיף ואת אלו הוא מעדיף פחות]

מהי הליבה של שוק סחר חליפין המוגדר $(\{x_i\}_{i\in N}, (\succ_i)_{i\in N})$?

אז כן הליבה היא חלוקה $(z_i)_{i\in N}$ של סכום הסלים x_i, כלומר

(א) $z_i \in \mathbb{R}^l_+$ (ב) $\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\boxed{\text{שוויון וקטורים ב } \mathbb{R}^l_+}$

(ג) כך שלא קיימת קואליציה S של סוחרים וחלוקה $(z_i)^S$ של $\underbrace{(x_i^S)}_{\text{סך כל הסחורות ב }S}$ כך ש $z_i^S \succ_i z_i$ (עדיף ממש) לכל $i \in S$.

[כלומר לכל קואליציה וחלוקה קיים שחקן שלא ירוויח מהחלופה]

[הליבה היא חלוקה יציבה בפני פרישה של כל קואליציה]

(*) מעתה נעסוק (תיאום לשוק ספציפי) - משחק שוק דו-צדדי למשל כמו זוגות של בנים-בנות או סטודנטים מסיימים שימובים למקום עבודה. - שידוך יציב זה שידוך בליבה - כלומר אין זוג שכל אחד מעדיף יותר אחד את השני ~~...~~ מאשר מי שהוא זוג אליו.

<u>שוק דו-צדדי:</u> יש שחקנים למשל n נשים (W) ו-n גברים (M). לכל אישה יש ~~...~~ יחס סדר חזק על הגברים $\succsim_{w_i}$ ולכל גבר יש יחס סדר חזק על הנשים $\succ_{m_i}$.

הליבה היא שידוך, זוג, בין הגברים לנשים כלומר φ חח"ע ועל $\varphi: W \to M$ כך שאין זוג שיעדיפו לפרוש ולהתחתן אחד לשני.

אפשר להכריע השווה את הנושא משתי פני ההצבעה גם למצבו	שהוא מיוחד טוב של השוק! 6 הפעמי! שבו לא נמצא מחיר, פותח טוויגבונט של שלב	הקושה של מחיר זה נכס לקושה של מוצר כי זה בעיה

2/1/14

המשך שיעור 12

כלומר לא קיים כה של ובן M רק ש $\psi(w) \cdot_w M$! $\psi^{-1}(M) \cdot x$

<u>משפט:</u> תמיד קיים זוג יציב. [נראה אלגוריתם א-סימטרי למציאת הזוג [נתאר המקרה שהבנים מציעים אחרי הבנות...]

אלגוריתם משו. תמיד

הבנים מרוויחים הבנות מפסידות

[אבל זה עדיין בעייה]

(*) זוכה פרס נובל שלושה של שיפורים מאוד שימושי

<u>תרגילים לפעם הבאה:</u> 7,9 921

17,19 922

<u>פתרונות לתרגילים:</u>

<u>Q4 תמ 892:</u> (מספר ε ליבה של v) מתוך $G_\varepsilon(v) = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} x(N)=v(N) \\ x(S) \geq v(S)-\varepsilon \\ S \subseteq N \text{ לכל} \end{array} \right\}$

ובכן, שים לב כי $G_0(v)$ זו הליבה.

כמו כן קיים ε גדול מספיק כך ש $G_\varepsilon(v)$ אינה ריקה... ברור...

כמו כן אם $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ אזי $G_{\varepsilon_2}(v) \supseteq G_{\varepsilon_1}(v)$. כמו כן לכל ε מתקיים $G_\varepsilon(v)$ קבוצה סגורה. [ברור כי זה א"ש חלש]

כמו כן זו קבוצה חסומה, ולכן קומפקטית.

לכן $\bigcap_{G_\varepsilon(v)\neq\emptyset} G_\varepsilon(v) \neq \emptyset$ כי זה חיתוך קומפקטים.

ובכן אם $\inf\{\varepsilon \mid G_\varepsilon(v)\neq\emptyset\} = \varepsilon_0$ ומתקיים $\bigcap_{G_\varepsilon(v)\neq\emptyset} G_\varepsilon(v) = G_{\varepsilon_0}(v)$

וזה נקרא הליבה המינימלית.

נראה שה x^* (גרעין) נמצא בליבה המינימלית.

אם x^* לא בליבה המינימלית אזי יש קואליציה S כך ש $x^*(S) < v(S)-\varepsilon_0$ כאשר $G_{\varepsilon_0}(v)$ הוא הליבה המינימלית לכן $v(S)-x^*(S) > \varepsilon_0$ שגיאה משו!

לכן הקורדינטה הראשונה של $\theta(x^*) \geq \varepsilon_0$ [מהיותה מקסימלית]

אם יש $x \in G_{\varepsilon_0}(v)$ אזי כל העודפים $\varepsilon_0 \geq v(S)-x(S)$, בפרט הקורדינטה הראשונה של $\theta(x) \leq \varepsilon$, לכן $\theta(x) \leq \theta(x^*)$ ~~[illegible]~~

בסתירה לכך ש x^* הוא הגרעין.

2/1/16

המשך שיעור 12

תרגיל: הגרעין מקיים את עקרון הסימטריה, כלומר אם i ו-j מחליפים אזי $x_i^* = x_j^*$

הוכחה:

יהי x חלוקה של (N,v) ויהיו i ו-j מחליפים $i<j$. נסמן ב:

$$x' = (x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$$

נראה ש $\Theta(x)=\Theta(x')$ ונקבל מכך שאם x^* גרעין ו- $x_j^* \neq x_i^*$ אז $x^{*'}$ גרעין כי לשניהם יהיה אותו ה-Θ וזו סתירה ליחידות.

נסמן $\Theta(x) = (e(T_1^x),\dots,e(T_N^x))$ אם $\emptyset = T_l \cap \{i,j\}$ אז

$$e(T_l,x) = e(T_l,x')$$

אם $i,j \in T_l$ אז שוב $e(T_l,x)=e(T_l,x')$

אם $j \notin T_l$ ו- $i \in T_l$ אז נביט ב $T_l' = T_l \cup \{j\} \setminus \{i\}$

אזי $v(T_l') = v(T_l)$ כי הם שחקנים מחליפים.

המקרה ההפוך סימטרי לחלוטין

ואז:

$$e(T_l',x') = v(T_l') - x'(T_l') = v(T_l) - x(T_l) = e(T_l,x)$$

החלפנו ערכי i ו-j

ולכן $\Theta(x)=\Theta(x')$ ולכן $x_i = x_j$ ולכן יש סימטריה כנדרש.

(892) תרגיל 12: נסמן $f(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \alpha^k \Theta_k(x)$ עבור $\alpha>0$. אזי קיים $0<\alpha_0$ כך שלכל $\alpha \le \alpha_0$ מתקיים $\min f = \Theta(x^*)$ כך ש x^* הגרעין.

הוכחה: נביט על הקורדינטה הראשונה של $\Theta(x)$, המינימום מתקבל ב $\Theta(x^*)$ אז לכל $\alpha>0$ מתקיים $\alpha\Theta(x^*) \le \alpha\Theta(x)$ לכל x.

לכן $\Theta_2(x) \ge \Theta_2(x^*)$ ולכן שוויון... ולכן $\Theta(x)=\Theta(x^*)$

נ"נ בשלילה, לכל $0<\varepsilon_0$ קיים $\varepsilon<\varepsilon_0$ וחלוקה x כך ש $f(x,\varepsilon) \le f(x^*,\varepsilon)$

נסמן $\alpha_n < \frac{1}{n}$ כך ש $f(x_n,\alpha_n) < f(x^*,\alpha_n)$ [קיימים כאלה...] כל x_n הוא חלוקה ולכן מקומפקטיות, יש תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x$ ו-x חלוקה!

כמו כן f רציפה ~~[illegible]~~ בשני המשתנים. נסמן

$$\bar{f}(x_n,\alpha_n) = \frac{\sum_{k=1}^{2^n-1} \alpha_n^k \Theta_k(x_n)}{\sum_{k=1}^{2^n-1} \alpha_n^k}$$

ומתקיים $f(x^*,\alpha_n) > \bar{f}(x_n,\alpha_n)$ מהקודם ✓ $\xrightarrow[n\to\infty]{\text{בגבול}}$

בגבול: $\Theta_1(x) \le \Theta_1^*(x)$

לכן הם שווים $\Theta_1(x) = \Theta_1(x^*)$