19/12/13

## המשך שיעור 10

* נעבור לעולם המשחקים הפשוטים. אז האקסיומה שמחליפה האדיטיביות בהגדרת ערך שפלי היא אקסיומה שאומרת $\Psi(v)+\Psi(u)=\Psi(v\vee u)+\Psi(v\wedge u)$.

פתרונות במודל
באוסף של 1

תרגילים:
890 : $4\to 6$
891 : 13
892 : 20

20/12/13

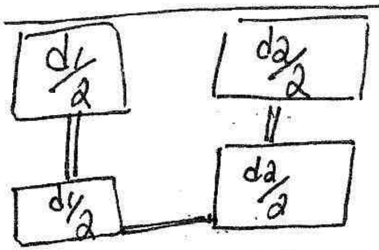
## שיעור מס' 11

בעיות פשיטת רגל והקשר שלהן לגרעינון:

בעיית פשיטת רגל: $(E, d_1, d_2, \dots, d_n)$ בלי הגבלת הכלליות $d_1\le d_2\le\dots\le d_n$ וכמו כן $E\le\sum_{i=1}^{n} d_i$.

בעיית שניים אוחזין בטלית: $(E; d_1, d_2)$

דוגמא: נניח כי $D_2=200; D_1=100; E=150$ ואם עוקבים אחרי עקרון הדליים השלובים הפתרון הוא 100 ! 50 ; וזה מקביל כששני הדליים התחתונים מתמלאים.



ושופכים מים למערכת תוך חוק כלים שלובים וכל אחד מקבל את כמות המים בקצה שלו של המערכת.

אז נגדיר הפתרון לבעיה:

הערך שאותו אחד מקבל.

$$f_1(E,d_1,d_2)=\begin{cases}\frac{E}{2} & E\le d_1,d_2\\ \frac{d_1}{2} & d_1\le E\le d_2\\ \frac{d_1}{2}+\frac{E-d_2}{2} & d_1,d_2\le E\end{cases}$$

$$f_2(E,d_1,d_2)=\begin{cases}\frac{E}{2} & E\le d_1,d_2\\ E-\frac{d_1}{2} & d_1\le E\le d_2\\ \frac{E+d_2}{2}-\frac{d_1}{2} & d_1,d_2\le E\end{cases}$$

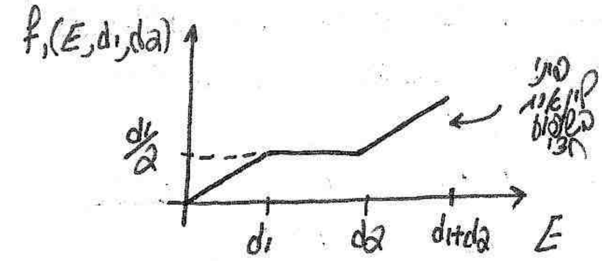
נשים לב שהמקרה מהתלמוד עם הנשים מקיים שכל זוג מקיימים את תנאי הפתרון של שניים אוחזים. וזה מסביר את הטבלה התמוהה הזו.

לב

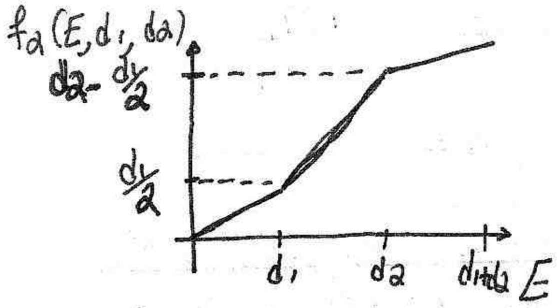
26/12/13

## השלמת שיעור 11

**נשים לב:** עבור $d_1,d_2$ הקבועים



נשים לב שמחלקים חצי חצי את מה שניהם רבים עליו, ואחרי שכיסינו הנשים לחוקה שוב מחלקים חצי חצי.



(*) זה הפתרון האפשרי לשניים אמצים.

על בסיס בעיית פשיטת הרגל $(E,d_1,\dots,d_n)$ נגדיר משחק $v(S)=\max(0,E-d(S^c))$

(-) כלומר המקסימום בין אפס לבין מה שנשאר אחרי ששילמו את כל החובות לשאר הנושים.

**שאלה:** [נראה שהשיטה מובילה לאותו פתרון] מגיע...
(א) חלוקה של $E$ על בסיס עקרון שניים אמצים (ב) הגרעין של $v$ הנ"ל.
כעת נגיע לשאלה א,

כלומר פרק פתרון...

**הגדרה:** $\varphi$ הוא מושג פתרון של בעיית פשיטת רגל אם לכל בעיה כזו $\varphi$ מתאים וקטור $(x_1,\dots,x_n)$ כך ש $x_i\ge 0$ ו $\sum_{i=1}^{n} x_i = E$.

**הגדרה:** $\varphi$ הוא מושג פתרון של בעיית פשיטת רגל קונסיסטנטי עם שניים אמצים אם $[\varphi(d_1,\dots,d_n,E)=(x_1,\dots,x_n)]$ לכל $i$ ו $j$: $(x_i,x_j)=\varphi(x_i+x_j,d_i,d_j)$ כאשר החלוקה עבור זוג שניים היא לפי שניים אמצין.

ככה מחלקים שניים אמצין שני נושים שמתנים. כלומר כשזוגות מקיימים ביניהם שניים אמצין

**נראה שני דברים:**
1. יש פתרון שהוא קונסיסטנטי עם שניים אמצין.
2. הפתרון הזה יחיד.

**הוכחה:** נניח שיש שני פתרונות למשחק $(E,d_1,\dots,d_n)$. נסמנם $(y_1,\dots,y_n);(x_1,\dots,x_n)$ ושניהם קונסיסטנטים עם שניים אמצין. ידוע כי $\sum_{i=1}^{n}x_i=E=\sum_{i=1}^{n}y_i$, אם הפתרונות שונים אז יש $i,j$ כך ש $x_i<y_i$ ומשוויון הסכומים $x_j>y_j$.
בה"כ $x_i+x_j\ge y_i+y_j$

26/12/13

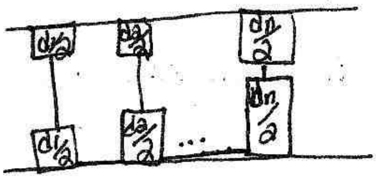
## המשך שיעור 11

המשך הוכחת יחידות: מקונסיסטנטיות עם שניים אוחזים נקבל
$f_1(x_i+x_j; d_i, d_j) \ge f_1(y_i+y_j, d_i, d_j)$ וזה ממונוטוניות כתלות בפרמטר הראשון.

וזה בסתירה לכך ש $x_i < y_i$ כי ידוע $f_1(x_i+x_j, d_i, d_j) = x_i$
וכמו כן $y_i = f_1(y_i+y_j, d_i, d_j)$ וזה מקונסיסטנטיות.

לכן הפתרונות שווים, לכן הפתרון יחיד. ← [נשים לב שזה נכון לכל f מונוטונית ב-E ולא בהכרח עבור שניים אוחזים]

קיום הפתרון: אפשר לצייר תמונה מוכללת של עקרון הכלים השלובים...
חלוקת E ע"פ הכלל הזה היא קונסיסטנטית
עם שניים אוחזים.
לכן יש פתרון... וראינו שהוא יחיד.



נחזור למשחק $v$ שהגדרנו כבר קודם:

⊖ יהי $v$ משחק כלשהו [לאו דווקא של פשיטת רגל] בעל שני שחקנים, אזי ערך שפלי והגרעין מתלכדים!

כי: משחק שני שחקנים שקול אסטרטגית למשחק שבו השחקנים מתחלפים.
בה"כ $v(1) \le v(2)$, נגדיר משחק חדש $u(S) = v(S) + (v(2)-v(1)) \cdot \mathbb{1}_{\{1\in S\}}$ כלומר לכל הקואליציות פרט ל $\{2\}$ נוסיף את ההפרש.

לכן $u(1) = v(2)$ ; $u(2) = v(2)$ ; $u(12) = v(12) + v(2) - v(1)$ וב-$u$ הם מתחלפים!

גם ערך שפלי וגם הגרעין מקיימים:

[גם הפתרון שהוא בשקילות צריך להחסיר אותו מהפתרון] ← (א) קו-וריאנטיות לשקילות אסטרטגית

(ב) עקרון הסימטריה ↩ דרך לוודא שהגרעין אכן מקיים עקרון זה.

⊖ לכן גם הגרעין וגם ערך שפלי יחלקו ב-$u$ את הסכום שווה בשווה בין שני השחקנים.

$$x_1 = \frac{v(12)+v(2)-v(1)}{2} - (v(2)-v(1)) = \frac{v(12)+v(1)-v(2)}{2}$$

$$x_2 = \frac{v(12)+v(2)-v(1)}{2}$$

מה שהוספנו לו בהתחלה.

[חלקנו שווה בשווה במשחק $u$, ואז הורדנו חזרה את מה שהוספנו, $x_N$ ההתלכדות של שפלי והגרעין]

[כלומר במשחק של שני שחקנים הוא שקול למשחק סימטרי שבו הגרעין ושפלי מתלכדים לכן הם מתלכדים במשחק המקורי!]

⊖ עבור המשחק $v$ $[E; d_1, d_2]$ בעל שניים אוחזים:

$v(12) = E$ ; $v(2) = [E-d_1]_+$ ; $v(1) = [E-d_2]_+$. לכן אם נחשב ערך שפלי או גרעין במשחק זה נקבל בדיוק הפתרון של שניים אוחזים

26/12/13

## המשך שיעור 11

⊖ הוכחנו זה נכון רק שהשפלי/גרעין [שמתלכדים על המשחק] למשחק שהגדרנו עבור בעיית פשיטת הרגל של שני שחקנים יהיה ~~א~~ פתרון שניים אוחזין!
ראינו שזה מתלכד עם שניים אוחזין ע"פ יחידות בתכונות מוקדם.

מסקנה:
עבור בעיה $[E; d_1, d_2]$ הגרעין של ט שהגדרנו הוא בדיוק מתלכד עם פתרון שניים אוחזין.

⊖ כעת נרצה להראות שהגרעין של ט הוא פתרון קונסיסטנטי של בעיית שניים אוחזין, ולכן מתלכד עם רעיון הדליים השווים [כי ראינו יחידות...]

מושג המשחק המצומצם:

יהי ט משחק שיתופי ! X הוא חלוקה של $\vartheta(N)$. לכל $T \subseteq N$ (נגדיר משחק חדש שיקרא המשחק המצומצם באופן הבא:

לכל $R \subseteq T$
$$W^x_T(R) = \begin{cases} \max\limits_{Q \subseteq R^c} \vartheta(R \cup Q) - x(Q) & \emptyset \neq R \subsetneq T \\ 0 & R = \emptyset \\ \vartheta(N) - x(T^c) & R = T \end{cases}$$
הגדרת המשחק המצומצם

משפט (ללא הוכחה):

יהי ט משחק ! X הגרעין שלו. לכל $T \subseteq N$ הגרעין של $W^x_T$ מתלכד עם $x|_T$. [x רק על קורדינטות בT].

בכללי:

$$\begin{tikzcd} {[E; d_1,\dots,d_n]} \arrow[r] \arrow[d, "(x_1,\dots,x_n)\ \text{לכל } T"'] & \vartheta^N_{(x_1,\dots,x_n)} \arrow[d, "\text{לכל } T"] \\ {[X(T); d_i\ i \in T)} \arrow[r, "??"] & W^x_T() \end{tikzcd}$$

ואז נפעיל את זה לבעיה...

הראו שהפתרון קו-וריאנט לשפלי ולגרעין ומקיים סימטריה

הראו שלא קיים מצב של הסדר הלקסיקוגרפי עבור פוי נושא $U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

תרגילים לשבוע הבא: 21 [לתרגלים מ B] עמוד 892
24 עמוד 829 כאשר $\varepsilon$ גבוה זה יבוא ש $x(S) \ge \vartheta(S) - \varepsilon$

⊖ הראו שהסדר הלקסיקוגרפי על $\mathbb{R}_+$ הוא לא רציף ומקסימלי

26/12/13

## המשך שיעור 11

תרגיל: מצא סדרה $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ כך ש $x_n \to x$ וכמו כן $x_n \geq_L y$ אבל $x \leq_L y$.

פתרון:
① $x_n = (\frac{1}{n}, -1)$ ! $Y = (0,0)$ ; כמו כן $X_n \longrightarrow (0,-1)$ ולכן מקיים קבל.

תרגיל 5 890:

$v(1)=0;\ v(2)=1;\ v(3)=4;\ v(12)=2$

$v(13)=0;\ v(23)=-1;\ v(123)=5$

וכמו כן $x=(1,1,3)$ ; $Y=(1,3,1)$.

נחשב את $\theta$.

| $s$ | $e(x,s)$ | $e(y,s)$ |
|---|---|---|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | 0 | -2 |
| 3 | 1 | 3 |
| 12 | 0 | -2 |
| 23 | -5 | -5 |
| 13 | 2 | 4 |
| 123 | 0 | 0 |

$\longrightarrow \theta(Y) = (4,3,0,-1,-2,-2,-5)$

$\searrow \theta(x) = (2,1,0,0,0,-1,-5)$

לכן $\theta(x) \leq_L \theta(Y)$

תרגיל 6 890:

אם $a>0$ ! $b \in \mathbb{R}$ אז $N_u(av+b) = aN_u(v)+b$.

פתרון:

$$\underset{av+b}{e}(ax+b,S) \overset{!}{=} (av+b)(S)-(ax+b)(S) = av(S)+b(S) - (ax(S)+b(S)) =$$
לפי הגדרה
$$= a(v(S)-x(S)) = ae(x,S)$$

לכן! $\theta_{av+b}(ax+b) = a\theta_v(x)$. כמו כן $x$ תלוים ב$v$ אמ"מ $ax+b$ וקטור תשלומים ב $av+b$, ולכן יש שוויון בין הקבוצות של ה$\theta$.
המינימום הלקסיקוגרפי $x^*$ ב$v$ מקיים כי $ax^*+b$ מינימום לקסיקוגרפי ב$av+b$
לכן קיבלנו הנדרש... [הגרעין זה המינימום]

תרגיל 13 891

יהי $v$ המשחק הבא: $\cancel{0}=v(2)=v(3)=v(23)$ ! $v(13)=v(12)=v(123)=1$

פתרון:
מה הליבה של משחק כזה? נניח $T_1,T_2,T_3$ מנצחת ! $\emptyset = T_1 \cap T_2 \cap T_3$

בסתירה
$2X(N) \geq X(T_1)+X(T_2)+X(T_3) = 3 \leftarrow$ ; $i=1,2,3$ לכל $X(T_i) \geq 1$ אז
כי כל שחקן מופיע לכל היותר 2
לכן הליבה ריקה.

26/12/13

## המשך שיעור 11

המשך: תהי $W$ כל הקואליציות הזוכות. יהי $\cap W = I$ [שחקני וטו]

אם $I=\emptyset$ אזי הליבה ריקה, כי

$$|W| = \sum_{T\in W} x(T) \le |W|-1 \leftarrow \left[\text{כי אין שחקן שמופיע בכולם}\right]$$

כי זה ליבה... וזו סתירה לליבה...

ואם $I\neq\emptyset$ אזי הליבה מורכבת מכל החלוקות של 1 בין שחקני הווטו $I$.

לכן אם נחזור למקרה שלנו אז יש שם שחקן וטו, שחקן 1, לכן הליבה היא בדיוק $\{(1,0,0)\}$. לכן הגרעין הוא $(1,0,0)$.

ושים לב שאם יש איבר בליבה אז הגרעין חייב בליבה! משום סדר לקסיקוגרפי

המשך לגרעין.

2/1/14

## שיעור 12

בעיית פשיטת רגל:

בעיית פשיטת רגל היא $[E; d_1,\dots,d_n]$ כך ש $d_1\le\dots\le d_n$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \ge E \quad !$$

⊖ הגדרנו פתרון של שניים אוחזים במקרה של שני נושים.

⊖ לבעיה הכללית הגדרנו פתרון שהוא קונסיסטנטי עם שניים אוחזים.

משחק מייצג:

יהי $v$ משחק כך ש $N$ קבוצת הנושים, ולכל $S\subseteq N$ מתקיים $v(S)=\max\{0,E-d(S)\}$

המטרה: להראות שהגרעין של $v$ הוא קונסיסטנטי עם שניים אוחזין, ולכן יהיה הפתרון מהטענה שראינו על הפתרון הקונסיסטנטי.

⊖ ראינו שאם $n=2$ אז הגרעין (וגם שאפלי) מתאים עם שניים אוחזין.

עבור $T\subseteq N$, נגדיר בעיה חדשה עבור חלוקה כלשהי $x$ באופן הבא:

$[X(T);(d_i)_{i\in T}]$ ← זו בעיית פשיטת רגל חדשה.

כלומר מחלקים בתוך $T$ את סך מה שהם קיבלו באמצעות החלוקה $x$.

$$[E,(d_i)_{i\in N}] \xrightarrow{\text{צמצום}} [X(T),(d_i)_{i\in T}]$$