

נעשה: יהי θ זווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{v}$, אזי $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$, אז $|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$
 $\theta > 90^\circ$ אז $\cos \theta < 0$ אז $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$
 $\theta < 90^\circ$ אז $\cos \theta > 0$ אז $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

כנסו ל- $x^2 - dy^2 = 1$: Pell

אם d אינו רבוע מושלם אז יש פתרונות.

נסתכל ב- m פתרונות (x_m, y_m) של המשוואה.

הם יהיו $(x_{m-1} + y_{m-1}\sqrt{d})$, כלומר $x_{m-1}^2 - dy_{m-1}^2 = 1$.

אז $u_d = \{ \pm x_{m-1} \pm y_{m-1}\sqrt{d} \mid x_{m-1}^2 - dy_{m-1}^2 = 1 \}$ יהיו כל הפתרונות.

נעשה: $u_d = \{ \pm z_0^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ אז $z_0 = \min \{ z \in u_d \mid z > 1 \}$

אם $x^2 - dy^2 = -1$ אז יש פתרון ל- Pell.

אם לא, אז $x^2 - dy^2 = -4$ (אם $d \equiv 1 \pmod{4}$).

כיצד למצוא את המספרים הנתונים

$$\theta = \sqrt{5}$$

$$a_0 = [\sqrt{5}] = 2 \Rightarrow \theta = 2 + \frac{1}{\theta_1}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{1}$$

$$a_1 = [\theta_1] = \left[\frac{2 + \sqrt{5}}{1} \right] = 4 \Rightarrow \theta_1 = 4 + \frac{1}{\theta_2}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \theta_1 \Rightarrow \theta = [2, 4]$$

כיצד למצוא את המספרים הנתונים

$$\theta = \frac{49}{43}$$

$$a_0 = \left[\frac{49}{43} \right] = 1 \Rightarrow \theta = 1 + \frac{1}{\theta_1}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\frac{49}{43} - 1} = \frac{43}{6}$$

$$a_1 = \left[\frac{43}{6} \right] = 7 \Rightarrow \theta_1 = 7 + \frac{1}{\theta_2}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\frac{43}{6} - 7} = 6 \Rightarrow \theta = [1, 7, 6]$$

כיצד למצוא את המספרים הנתונים

$$\theta = [1, 2, 3, \overline{1, 4}] \Rightarrow \rho = [1, 4, \rho]$$

$$\rho = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\rho}} = 1 + \frac{1}{\frac{2\rho + 1}{\rho}} = 1 + \frac{\rho}{2\rho + 1} \Rightarrow 4\rho^2 + \rho = 4\rho + 1 + \rho$$

$$\Rightarrow 4\rho^2 - 4\rho - 1 = 0 \Rightarrow \rho = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

(! חשבו את ρ)

$$\theta = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\rho}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{\rho}{3\rho + 1}} = 1 + \frac{3\rho + 1}{4\rho + 1} =$$

! ראו

$(x^2 - dy^2 = 1)$ ~~is~~ Pell's equation #
 when d is not a square,
~~then~~ d is not a square, m is
 $(\pm p_n, \pm q_n)$ $n = 0, 1, 2, \dots$ and d is not a square.
 then d is not a square.