סיבוכיות - תרגול 5

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

22.03.11

המחלקה NL

הגדרה נוספת עבור $NL = NSpace(\log n)$: אנחנו רוצים להפוך את ההגדרה שיהיה לה עד בדומה נגדי להגדרת NP. היינו רוצים סרט נפרד, סרט העד, ובו יש עדות שתשכנע שהקלט בשפה. במקרה של NP הרשינו עד פולינומיאלי, כי זה מספיק לבטא את הניחושים של המכונה הלא דטרמיניסטית. איך נגביל כאן את העד? מכונות NL רצה בזמן לכל היותר פולינומיאלי לכן כדי שסרט העד יבטא את הניחושים האי דטרמיניסטיים נרשה עד פולינומיאלי. כמו שסרט העד יהיה לקריאה בלבד כדי לא להשתמש במקום שלו.
הבעיה עכשיו היא שנוכל לראות את כל הניחושים בכל רגע נתון. מכונת NL יודעת רק את הניחוש הנוכחי שלה. כדי להגביל את זה נגדיר את סרט העד לקריאה חד פעמית.

הגדרה. NL היא מחלקת השפות $A \subseteq \{0,1\}^*$ עבורן קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית M עם סרט קלט לקריאה בלבד, סרט עד w לקריאה חד-פעמית (הראש הקורא נע רק ימינה) וסרט עבודה כך שיתקיים:

$$\forall x \qquad x \in A \Leftrightarrow \exists w \in \{0,1\}^{p(|x|)}.M(x,w) = T$$

כאשר p פולינום ו-M משתמשת ב- $O(\log|x|)$ מקום (על סרט העבודה) בריצתה על קלט x.

נרצה להראות שאפשר להכריע את $2SAT$ ב- NL.

תזכורת.

$$2SAT = \{\varphi | \text{ספיקה } 2CNF \text{ נוסחאת } \varphi\}$$

כאשר כל הסגר של φ הוא מורכב משני משתנים בדיוק.

משפט. $2SAT \in NL$.

הוכחה. מאחר ש $NL = coNL$ די להראות ש- $\overline{2SAT} \in NL$. עבור נוסחאת $2CNF$ φ נגדיר גרף מכוון G_φ על קבוצת הצמתים שהיא קבוצת המשתנים של φ ושלילתם.
ניזכר: $a \vee b \equiv \overline{a} \to b \equiv \overline{b} \to a$.
לכל הסגר $a \vee b$ נוסיף ל- G_φ שתי קשתות $(\overline{b}, a)$, $(\overline{a}, b)$ (הרעיון הוא שכל קשת מ- x ל- y פירושה שאם $x = T$ אז גם $y = T$).

אבחנה. אם ב- G_φ יש מסלול מכוון מ- u ל- v אז גם יש מסלול מכוון מ- $\overline{v}$ ל- $\overline{u}$.

טענה. φ אינה ספיקה $\Leftrightarrow$ קיים $1 \le i \le n$ עבורו יש ב- G_φ מסלול מכוון מ- x_i ל- $\overline{x}_i$ וגם מסלול מכוון מ- $\overline{x}_i$ ל- x_i.

בהיתן טענה זו נראה ש- $\overline{2SAT} \in NL$. בהינתן נוסחא φ ננחש i וננחש מסלול מכוון מ- x_i ל- $\overline{x_i}$ ומ- $\overline{x_i}$ ל- x_i בגרף G_φ (כמו ב- $STCON$).
אם שני המסלולים תקינים נקבל ואחרת נדחה. נגדיש שהמכונה אינה בונה את הגרף G_φ וכותבת אותו לסרט, אלא בכל צעד שבו נרצה לדעת אם שני צמתים מחוברים בקשת נעבור על φ ונבדוק אם מופיעים בה הסגרים שמהם קשת כזו עשויה להווצר.

הוכחה. $\Rightarrow$: נניח שקיים i עבורו יש מסלול מכוון ב- G_φ מ- x_i לשלילתו ולהפך. נסמן ב:

$$x_i \to u_1 \to \ldots \to u_l \to \overline{x_i}$$

$$\overline{x_i} \to v_1 \to \ldots \to v_{l'} \to x_i$$

נניח בשלילה שיש השמה מספקת ρ ל- φ. אם $\rho(x_i) = T$ אז $\rho(u_1) = T$ וגם $\rho(u_2) = T$ וכך הלאה עד שנקבל $\rho(\overline{x_i}) = T$. סתירה כי ההשמה לא עקבית. באופן דומה כאשר $\rho(x_i) = F$ (עפ"י המסלול השני).
$\Leftarrow$: נניח שלא קיים i עבורו יש מסלול מכוון מ- x_i ל- $\overline{x_i}$ ולהיפך ונראה ש- φ ספיקה.
נבנה השמה באופן הבא: אם x_i הוא משתנה שעדיין לא נקבע לו ערך נסמן ב- $u \in \{x_i, \overline{x_i}\}$ ליטרל עבורו אין מסלול מכוון מ- u ל- $\overline{u}$ (יש כזה לפי ההנחה). נקבע את הערך של כל מי שנגיש מ- u (כולל u) להיות T. נסיים כאשר נתנו ערך לכל משתני φ.
מה יכול ליצור בתהליך הנ"ל השמה לא עיקבית למשתני φ?

1. יש משתנה x שגם הוא וגם שלילתו נגישים מ- u. אם x וכן $\overline{x}$ נגישים מ- u, אז עפ"י האבחנה יש מסלול מ- u ל- $\overline{u}$ ($u \rightsquigarrow x \rightsquigarrow \overline{u}$) וזאת סתירה.
2. יש ליטרל v שקיבל בשלב קודם ערך F ואילו כעת v נגיש מ- u. אם v קיבל ערך $False$ אז יש מסלול מ- u' (מאיטרציה קודמת) ל- $\overline{v}$. כעת, מסלול מ- u ל- v מעיד שיש מסלול מ- $\overline{v}$ ל- $\overline{u}$ (עפ"י האבחנה) ולכן יש מסלול מ- u' ל- u' כלומר היינו אמורים לתת ל- u ערך בשלבים הקודמים.

נותר רק להראות שאכן קיבלנו השמה מספקת. וזה ברור. □

□