סיבוכיות – תרגול 4

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

15.03.11

סיבוכיות מקום לוגריתמית

$Space(s(n))$ היא מחלקת השפות שניתן להכריע ע"י מ"ט אשר משתמשת בלכל היתר $O(s(n))$ תאים על סרט העבודה בריצתה על קלט באורך n.
לסיבוכיות זמן תת–לינארית אין באמת משמעות כי זה אומר שאפילו לא קראנו את הקלט כמו שצריך. לעומת זאת, סיבוכיות מקום תת–לינארית יש הגיון, כי ייתכן ששמרנו ממש מעט חישובי ביניים. אז פשוט נמדוד בכמה מקום באמת השתמשנו בשביל החישוב ולא בשביל לשמור את הקלט. בגלל זה ההגדרה של סיבוכיות מקום היא מעט שונה מההגדרה של סיבוכיות זמן, ודורשת הגדרת מכונת טיורינג עם סרט קלט לקריאה בלבד וסרט עבודה לקריאה וכתיבה.
למשל,

$$(Logspace =)L = Space(\log n)$$

$$NL = NSpace(\log n)$$

תרגיל. תהא $A = \{0^k1^k | k \in \mathbb{N}\}$. הראו כי $A \in L$.

פתרון. נגדיר מכונת טיורינג M שבהינתן קלט x מונה את מספר ה–0–ים שבראשיתו ואז מונה את מספר ה–1–ים שאחריהם. אם מופיע 0 לאחר 1 נדחה. אחרת אם המונים שווים נקבל ואחרת נדחה.
מאחר שהמונים הם בין 0 ל– n (כאשר n הוא גודל הקלט) סיבוכיות המקום תהיה $O(\log n)$.

לעיתים מדד הזכרון באמת יבוא על חשבון סיבוכיות זמן.

בעיית $stCON$

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני צמתים $s, t \in V$.
שאלה: האם קיים מסלול מכוון מ- s ל- t ב- G?

משפט. $stCON$ NL שלמה. כלומר $stCON \in NL$ ו- $\forall A \in NL A \leq_L stCON$.

תזכורת. $A \leq_L B$ אם קיימת רדוקציה φ שמשתמשת במקום לוגריתמי על סרט העבודה ומקיימת $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x) \in B$.

הסבר: בהינתן שלשה (G, s, t) ננחש מסלול מכוון מ-s ל- t. בכל רגע נתון נשמור את הצומת הנוכחי ואת הצומת הקודם ונוודא שאכן מחוברים בקשת. כמו כן נשמור מונה ואם נחרוג בו ממספר הצמתים בגרף נדחה. אם המסלול הגיע ל- t נקבל ואחרת נדחה.

תרגיל. Strongly connected

$$SC=\left\{G\,\middle|\,\begin{array}{c}\text{G גרף מכוון בחוזקה,}\\ \text{כלומר לכל שני צמתים x, y קיים מסלול מכוון מ- x ל- y בגרף}\end{array}\right\}$$

הוכיחו כי SC היא NL-שלמה.

פתרון. $SC \in NL$: בהינתן גרף G נעבור על כל זוגות הצמתים x,y ועל כל זוג כזה נפעיל את האלגוריתם של $stCON$ על (G,x,y). אם נקבל בכל הריצות האלה אז נקבל (כי אז יש מסלול מכוון בין כל שני צמתים) ואחרת נדחה. סיבוכיות המקום היא לוגריתמית כי יש שני מונים ד- x ול- y ו-$O(\log n)$ מקום עבור $stCON$.

כעת נראה SC היא NL-קשה. נראה: $stCON \leq_L SC$. $(G,s,t) \mapsto G'$.

הרדוקציה: בהינתן גרף $G=(V,E)$ נחזיר גרף $G'=(V',E')$ כאשר: $E' = E \cup \{(x,y)|x \in V\} \cup \{(t,x)|x \in V\}$.

את הרדוקציה אפשר לממש בסיבוכיות מקום לוגריתמים על סרט העבודה, מאחר שלצורך חישוב עלינו לשמור מונים כדי להדפיס את הקלט המקורי בתוספת הקשתות החדשות.

נכונות: $(G,s,t) \in stCON \Leftrightarrow G' \in SC$.

$\Leftarrow$: נניח שיש מסלול מכוון מ-s ל- t ב- G. אזי ב-G' לכל שני צמתים v_1, v_2 קיים מסלול מ- v_1 ל- v_2 מהצורה: $v_1 \to s \rightsquigarrow t \to v_2$.

$\Rightarrow$: נניח G' קשיר בחוזקה. אז בפרט יש מסלול מכוון מ-s ל- t ב-G'. נסתכל על המסלול המכוון הקצר ביותר מ- s ל- t ונשים לב שמסלול כזה אינו משתמש בקשתות החדשות שנוספו ולכן $(G,s,t) \in stCON$.

תרגיל.

$$SC_{1/2}=\left\{G\,\middle|\,\text{G גרף מכוון על n צמתים שיש בו רכיב קשירות חזקה בגודל לפחות}\ \frac{n}{2}\right\}$$

פתרון. נראה ש- $SC_{1/2} \in NL$.

נתאר מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית עם זכרון לוגריתמי שמכריעה את $SC_{1/2}$. בהינתן גרף G ננחש סדרה של $\frac{n}{2}$ צמתים ממויינים בסדר עולה $v_1, \ldots, v_{n/2}$. את v_1 נשמור לאורך החישוב. בשלב ה- i נוודא $v_{i-1} < v_i$ וכן נפעיל את $stCON$ על (G, v_1, v_i) ועל (G, v_i, v_1). אם לאורך החישוב קיבנו מכל ההרצות "כך" וכן $v_{i-1} < v_i$ לכל i נקבל ואחרת נדחה.

נכונות: $G \in SC_{1/2} \Leftrightarrow$ קיימים צמתים $v_1, \ldots, v_{n/2}$ כך שלכל i יש מסלול מכוון מ- v_1 ל- v_i ולהפך $\Leftrightarrow$ קיימת סדרת צמתים ממויינת $v_1, \ldots, v_{n/2}$ שעבורה המכונה מקבלת בריצתה על G. נשים לב שבבידקת המיון של הצמתים לא מאפשרים חזרה לאותו צומת יותר מפעם אחת.

סיבוכיות מקום: נשמור את v_1, v_i, v_{i-1} מונה שיספור עד $\frac{n}{2}$ וכן את המקום הדרוש להרצת $stCON$ בסה"כ $O(\log n)$.

אפשר להראות ש- $SC_{1/2}$ NL-קשה ע"י רדוקציה מ- SC שעל גרף עם k צמתים מוסיפה k צמתים מבודדים.