סיבוכיות – תרגיל 3

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

08.03.11

מחלקות זמן אקספוננציאלי

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} Time(n^k) \qquad NP = \bigcup_{k=1}^{\infty} NTime(n^k)$$

זה אנחנו מקרים. באותו אופן אפשר להגדיר עוד מחלקות:

$$EXP = \bigcup_{k=1}^{\infty} Time(2^{n^k}) \qquad NEXP = \bigcup_{k=1}^{\infty} NTime(2^{n^k})$$

קשרים שקל לראות:

$$P \subseteq NP$$

כי מכונת טיורינג דטרמיניסטית היא מקרה פרטי של מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

$$NP \subseteq EXP$$

בזמן אקספוננציאלי ניתן לעבור על כל תסריטי הריצה של מ"ט שזמן הריצה שלה פולינומיאלי.
מה אנחנו מחפשים? ענף שמקבל.

$$EXP \subseteq NEXP$$

שוב, מכונת טיורינג דטרמיניסטית היא מקרה פרטי של מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.
שאלות פתוחות:

$$P \stackrel{?}{=} NP \quad NP \stackrel{?}{=} EXP \quad EXP \stackrel{?}{=} NEXP$$

משפט. היררכיית הזמן:
לכל פונקציה t כך ש- $t(n) \geq n$, $Time(t(n)) \subsetneq Time(t(n)^2)$

תרגיל. הוכיחו כי $P \neq NP$ או $NP \neq EXP$.

הוכחה. נניח בשלילה $P = NP$ וגם $NP = EXP$. אזי $P = EXP$. ממשפט הירכיית הזמן:

$$P \subsetneq Time(2^n) \subsetneq EXP$$

סתירה. $\square$

תרגיל. הוכיחו שאם $EXP \neq NEXP$ אז $P \neq NP$. באופן שקול, אם $P = NP$ אז $EXP = NEXP$.

הוכחה. נניח $P = NP$. נוכיח ש- $EXP = NEXP$. ברור $EXP \subseteq NEXP$ ונראה ש- $NEXP \subseteq EXP$:
תהא $A \in NEXP$. אזי קיימת מכונת טיורינג אי-דטרמיניסטית M_A שרצה בזמן 2^{n^k} על קלט באורך n (k קבוע) ומכריעה את A.
נגדיר:

$$A_{pad} = \{x\#1^{2^{|x|^k}} | x \in A\}$$

נראה ש- $A_{pad} \in NP$. נסתכל על מ"ט שבהינתן קלט y בודקת האם $y = x\#1^{2^{|x|^k}}$ עבור x כלשהו. אם לא נדחה ואם כן נריץ את M_A על x ונחזיר תשובתה.
זאת מ"ט אי-דטרמיניסטית שמכריעה את A_{pad} בזמן ריצה $O(2^{|x|^k})$ וזהו זמן פולינומיאלי בגודל הקלט.
קיבלנו ש- $A_{pad} \in NP$ לכן מההנחה $A_{pad} \in P$. כעת נראה ש- $A \in EXP$. מאחר ש- $A_{pad} \in P$ קיימת מ"ט דטר' פול' שמכריעה את A_{pad}. נסמן אותה ב-M. כדי להכריע את A בהינתן x נריץ את M על $x\#1^{2^{|x|^k}}$. זמן הכנת הקלט הוא $O(2^{|x|^k})$ והרצת M עליו $poly(2^{|x|^k}) = 2^{O(|x|^k)}$ ולכן אקספוננציאלי ב- $|x|$.

$\square$

הערה. טכניקת ההוכחה נקראת padding – ריפוד.

תרגיל. האם לכל $A \in EXP$ מתקיים $EXP^A = EXP$?

חימום. האם לכל $A \in P$ מתקיים $P^A = P$? כן. ברור ש- $P \subseteq P^A$. כדי להראות ש- $P^A \subseteq P$ ניקח $B \in P^A$ אז יש מ"ט פול' שמכריעה את B (עם זמן ריצה $p(n)$ על קלט באורך n כאשר p פולינום), עם גישה לאורקל A שאותו ניתן להכירע בזמן ריצה $q(n)$ כאשר q פולינום. $B \in P$ משום שניתן לסמלץ את המכונה שלעיל ובמקום קריאות לאורקל נכריע את A. זמן הריצה $\geq p(n) \cdot q(p(n))$. והרכבת פולינומים היא פולינום.

פתרון. נשים לב שהוכחה זו אינה עובדת במקרה של EXP משום שבזמן אקספוננציאליות ניתן ליצור קלט לאורקל באורך 2^n והרצת המכונה שמכריעה את האורקל עליו תצריך זמן 2^{2^n}. כלומר פונק' אקספוננציאליות אינן סגורות להרכבה.
התשובה היא לא. נגדיר:

$$A = \{\langle M, x, 1^n \rangle | \text{צעדים } 2^n \text{ מקבלת את } x \text{ תוך לכל היותר } M\}$$

עלינו להראות כי $A \in EXP$ וכי $EXP^A \neq EXP$.
נראה כי $Time(2^{2^n}) \subseteq EXP^A$ ואנחנו יודעים כבר $EXP \subsetneq Time(2^{2^n})$.
תהא $B \in Time(2^{2^n})$ אזי קיימת מ"ט דט' M_B שמכריעה את B בזמן 2^{2^n} על קלט באורך n. נראה ש- $B \in EXP^A$. בהינתן קלט x נדפיס נדפיס לסרט האורקל $\langle M_B, x, 1^{2^{|x|}} \rangle$ נשים לב שההדפסה מצריכה זמן אקספ' ב- $|x|$ ונחזיר את תשובת האורקל. הנכונות נובעת מכך ש- $x \in B \Leftrightarrow M_B$ מקבלת את x תוך $2^{2^{|x|}}$ צעדים $\Leftrightarrow \langle M_B, x, 1^{2^{|x|}} \rangle \in A$.

נראה ש- $A \in EXP$. בהינתן קלט $\langle M, x, 1^n \rangle$ נריץ את M על x למשך 2^n צעדים. ניתן לעשות זאת ב- $2^{O(n)}$ צעדי ריצה, זהו זמן ריצה אקספ' בגודל הקלט משום שאורך הקלט גדול מ- n. לסיכום מצאנו $A \in EXP$ עבורה $EXP \supsetneq EXP^A$.