סיבוכיות - תרגיל 2

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

1.3.11

הגדרנו $coNP = \{\overline{A} | A \in NP\}$. הגדרה קצת יותר דומה:

הגדרה. $coNP$ - מחלקת השפות $A \subseteq \{0,1\}^*$ עבורן קיימת מ"ט דט' פול' M ופולינום p כך שלכל $x \in \{0,1\}^*$:

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \forall w \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x,w) = T$$

נתבונן בשפות הבאות:

$$IS = \{\langle G,K \rangle | K \text{ קיימת קבוצה ב"ת בגודל } G\text{-ב}\}$$

$$MAX - IS = \{\langle G,K \rangle | K \text{ הגודל המרבי של קבוצה ב"ת הוא בדיוק } \}$$

ברור ש- $IS \in NP$ כי בהינתן עד (K צמתים) אפשר לוודא הזמן פול' שהם ב"ת. מה עם עד עבור $MAX - IS$? עד שיראה שיש קבוצה ב"ת בגודל K זה קל. אבל איך הוא יראה שאין קבוצה ב"ת גדולה יותר?
נכתוב בנוחות:

$$MAX - IS = IS \cap \{\langle G,K \rangle | \langle G, K+1 \rangle \notin IS\}$$

אבחנה. $MAX - IS \in P^{IS}$ ($MAX - IS \underset{\text{Cook}}{\leq} IS$).

הוכחה. בהינתן קלט $\langle G,K \rangle$ נבדוק בעזרת האורקל האם $\langle G,K \rangle$ ב-IS וגם האם $\langle G, K+1 \rangle \notin IS$. אם כן נקבל ואחרת נדחה. $\square$

נרצה להראות ש- $MAX - IS$ היא NP קשה וגם $coNP$ קשה ולכן אינה שייכת ל-NP תחת ההנחה $NP \neq coNP$.

טענה. IS היא NP שלמה.

הוכחה. ראינו כבר $IS \in NP$. נראה כי היא NP קשה ע"י: $SAT \underset{p}{\leq} IS$. בהינתן נוסחאת CNF φ עם m הסגרים נגדיר גרף G שצמתיו הם ליטרלים של φ (כמספר ההופעות שלהם ב- φ) ונחבר שני צמתים בקשת עם המשתנים המתאימים הם באותו הסגר או שהם משתנה ושלילתו. הרדוקציה תחזיר את $\langle G,m \rangle$.
כעת נראה $\varphi \in SAT \Leftrightarrow \langle G,m \rangle \in IS$:

$\Leftarrow$ נניח φ איבר ב-SAT, אז קיימת השמה מספקת. נבחר מכל הסגר ליטרל שערכו $true$ בהשמה ונקבל קבוצה של m צמתים שמהווה קבוצה ב"ת (כי אין בתוכה משתנה ושלילתו).
$\Rightarrow$ נניח $\langle G,m\rangle \in IS$ אז ב- G יש קבוצה ב"ת של m צמתים. אסור שני צמתים מאותו רכיב קישרות (הסגר) אז חייב להיות צומת אחד בדיוק מכל הסגר ואין לנו משתנה ושלילתו אז אפשר להגדיר השמה שנותנת $true$ לליטרלים של צמתים אלה ונרחיב אותה אם יש צורך.
זה אפשר כי בקבוצה שלנו אין משתנה ושלילתו! לכן $\varphi \in SAT$.
זמן הריצה הוא כמובן פולינומיאלי כי לא עשינו שום דבר מיוחד.

$\square$

תרגיל. הוכיחו ש- $MAX - IS$ היא:

1. NP קשה.
2. $coNP$ קשה.

הוכחה.

1. הרדוקציה שראינו מ-SAT ל-IS היא גם רדוקציה מ-SAT ל-$MAX - IS$ כי בגרף שהרדוקציה החזירה הקבוצה הבלתי תלויה בגודל לכל היותר m כי לא יכולים להיות שני צמתים מאותה קליקת-הסגר.
2. ראינו ש- $IS \in NPC$ לכן $\overline{IS} \in coNPC$ ובפרט $\overline{IS}$ היא $coNPC$ קשה.
לכן נראה $\overline{IS} \underset{\mathrm{P}}{\leq} MAX - IS$:

הרדוקציה: ניקח קלט $\langle G,k\rangle$ ל- $\overline{IS}$. נהפוך אותו לקלט הבא ל-$MAX - IS$:
נוסיף קליקה בגודל $k-1$ ונחבר אותה לכל צמתי הגרף. נותר להראות שאכן $\langle G,k\rangle \in \overline{IS} \Leftrightarrow \langle G',k-1\rangle \in MAX - IS$:

$\Leftarrow$: נניח $\langle G,k\rangle \in \overline{IS}$ אז אין קבוצה ב"ת בגודל k. אז ברור שב- G יש קבוצה ב"ת בגודל $k-1$ (זאת שהוספנו) וברור שהיא מקסימלית מבחירת הגרף.

$\Rightarrow$: נניח $\langle G',k-1\rangle \in MAX - IS$ אז $k-1$ היא קבוצה ב"ת מקסימלית ואז ברור שאין קבוצה ב-G בגודל k לכן $\langle G,k\rangle \in \overline{IS}$.

זמן ריצה, נו אתם יודעים, פולינומיאלי.

$\square$