סיבוכיות - תרגול 11

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

31.5.11

בעיות הבטחה

$\text{Gap}-E3SAT[\alpha,\beta]$. הקלט הוא נוסחאת $E3CNF$ $\varphi=\bigwedge_{i=1}^{m}c_i$ עם m הסגרים כך שבכל הסגר מופיעים בדיוק 3 משתנים שונים.
YES: קיימת השמה שמספקת $\beta m \leq$ הסגרי φ.
NO: כל השמה מספקת $\alpha m \geq$ הסגרים ב- φ.

משפט. $Cook$ $\text{Gap}-E3SAT\left[1-\frac{1}{m},1\right]$ היא NP קשה.

פתרון. האם $\text{Gap}-E3SAT\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\in P$? כן. הטענה הבאה שהאלגוריתם "החזר כן" מכריע בעיה זו.

טענה. $\varphi=\bigwedge_{i=1}^{m}c_i$ נוסחאת $E3CNF$ אזי קיימת השמה שמספקת לפחות $\frac{7}{8}m$ מההסגרים.

הוכחה. נשתמש בשיטה ההסתברותית. נגריל השמה מקרית ל- φ שנותנת ערך T בהסתברות $\frac{1}{2}$ וערך F בהסתברות $\frac{1}{2}$ לכל משתנה באופן ב"ת. עבור $1\leq i\leq m$ נסמן:

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{ההסגר } c_i \text{ מסופק}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=1}^{m}X_i$$

כלומר X הוא מספר ההסגרים המסופקים ב- φ.

$$\mathbb{E}X=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}X_i=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}(X_i=1)\overset{(\star)}{=}\sum_{i=1}^{m}\frac{7}{8}=\frac{7}{8}m$$

$(\star)$ - הסיכוי שהסגר c_i מסופק הוא $\frac{7}{8}$ כי יש $8=2^3$ השמות למשתנים שמופיעים ב- c_i ו- 7 מהן מספקות את ההסגר.
לכן קיימת השמה שמספקת $\frac{7}{8}m\leq$ הסגרים ב- φ (אחרת התוחלת הייתה צריכה להיות קטנה יותר. $\square$

מסקנה. לכל $\alpha<\frac{7}{8}$ מתקיים $\text{Gap}-E3SAT[\alpha,\beta]\in P$.

משפט. לכל $\varepsilon>0$ $\text{Gap}-E3SAT[\frac{7}{8}+\varepsilon,1]$ היא NP קשה.

ללא הוכחה. זאת גרסא של משפט ה- PCP.
נראה רדוקציה בין בעיות הבטחה:

$$\mathrm{Gap}-E3SAT\left[\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right]\underset{\mathrm{P}}{\leq}\mathrm{Gap}-E4SAT\left[\frac{15}{16}+\frac{\varepsilon}{2},1\right]$$

אנחנו מכירים רדוקציה מ- $3CNF$ ל- $4CNF$:
בהינתן נוסחאת $3CNF$ φ, כל הסגר $c=(a\vee b\vee c)$ יוחלף בזוג הסגרים:
$(a\vee b\vee c\vee z)\wedge(a\vee b\vee c\vee\overline{z})$ כאשר z משתנה חדש, משותף לכל הסגרי הנוסחא החדשה φ'.
נבדוק מהם הפרמטרים המתקבלים מהרדוקציה (כלומר עד כמה היא שומרת פער). אם φ ספיקה, אז יש השמה שמספקת את כל m הסגריה, ובצירוף ערך כלשהו ל- z נקבל השמה שמספקת את כל הסגרי φ'.
כעת ניקח φ כך שכל השמה מספקת בה לכל היותר $\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)m$ הסגרים. כמה הסגרים אפשר לספק ב- φ'. כל השמה תספק m מההסגרים (בזכות משתנה z) ומהאחרים יסופקו לכל היותר $\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)m$ הסגרים. קיבלנו שהחלק היחסי של מספר ההסגרים המסופקים הוא $\frac{m+\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)m}{2m}=\frac{15}{16}+\frac{\varepsilon}{2}$.

מסקנה. NP קשה לקרב את $Max-4SAT$ עם פקטור $c>\frac{15}{16}$.

באופן כללי יותר, אם $\mathrm{Gap}-E4SAT$ היא NP קשה, אז לא ניתן לקרב בזמן פולינומיאלי את $Max-4SAT$ עם פקטור $c>\frac{\alpha}{\beta}$ אלא אם $P=NP$.

הסבר. נניח שקיים אלגוריתם פולינומיאלי A אשר בהינתן נוסחא φ מחזיר ערך $A(\varphi)$ המקיים:

$$c\cdot OPT(\varphi)\leq A(\varphi)\leq OPT(\varphi)$$

ונראה שבעזרתו ניתן להכריע את $\mathrm{Gap}-E4SAT[\alpha,\beta]$.
בהינתן נוסחא φ נריץ עליה את אלגוריתם הקירוב. אם $\varphi\in YES$ אז יש לה השמה שמספקת $\beta m\leq$ הסגרים ולכן האלגוריתם יחזיר:

$$\alpha m=\frac{\alpha}{beta}\beta m<c\beta m$$

אם $\varphi\in NO$ אז ניתן לספק ב- φ לכל היותר αm הסגרים ולכן האלגוריתם יחזיר $\alpha m\geq$.
לכן מתשובת האלגוריתם אלגוריתם הקירוב נוכל להסיק את הקלט הוא YES או NO.