סיבוכיות - תרגול 1

22.02.11

מודל החישוב - מכונת טיורינג

מרכיבי מכונת טיורינג M:

- Q - קבוצת המצבים ביניהם מצב התחלה q_{start}, קבלה q_{accept}, דחייה q_{reject}.
- Σ א"ב הקלט.
- Γ א"ב העבודה.
- סרט.
- ראש קורא.
- פונקצית המעברים $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$.

מ"ט M מכריעה שפה $A \subseteq \Sigma^*$ אם לכל $x \in \Sigma^*$ אם $x \in A$ M בריצתה על x מגיעה למצב הקבלה ואם $x \notin A$ בריצתה על x מגיעה במצב דחייה.
סימון: עבור מכונת טיורינג M וקלט x נסמן: $time_M(x)$ מספר הפעלות פונקצית המעברים של M על x. $space_M(x)$ מספר התאים על הסרט שהראש הקורא מצביע עליהם בריצת M על x.

אבחנה. לכל M, x

$$time_M(x) \geq space_M(x)$$

הסבר: בכל מכונת טיורינג שמבקרת ב- k תאים על הסרט נדרשות k הפעלות של פונקצית המעברים.

מכונת טיורינג רב-סרטית עם k סרטים. פונקצית המעברים $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{R, L\}^k$.

תרגיל. מודל מ"ט רגילה עם סרט אחד "שקול" למ"ט עם k סרטים.

"שקול" הכוונה שמה שניתן לחשב/ להכריע במודל אחד אפשר לחשב גם במודל השני ולהפך. זה לא מספיק. נרצה להראות שלא מפסידים יותר מדי משאבים. כלומר, שאין הבדל "משמעותי" בין סיבוכיות הזמן והמקום של שני המודלים.

הוכחה. ברור שכל שפה שניתנת להכרעה ע"י מכונת טיורינג רגילה ניתנת גם להכרעה עם אותן סיבוכיות זמן וסיבוכיות מקום ע"י מכונת טיורינג עם k סרטים (ע"י הרחבה מנוונת של פונקציית המעברים).
בכיוון ההפוך, תהא A שפה המוכרעת ע"י מ"ט M עם k סרטים. נתאר מכונת טיורינג M' שתסמלץ את M המכריע את A. רעיונות:

1. סירוג סרטים – תוכן הסרט ה- i יופיע בתאים שמיקומם $k \mod i$.
2. הגדלת א"ב.
3. שרשור הסרטים אחד אחרי השני.

נרחיב בסימולציה ע"י הגדלת א"ב.
נשתמש בא"ב $\Gamma' = \Gamma^k \times \{0,1\}^k$ כך שכל תא יכיל את תוכן k הסרטים במיקום המתאים וכן 1 יבטא שהראש הקורא מצביע על התא ו-0 אם לא.
כל צעד של המכונה M ימומש בשני שלבים:

1. נעבור על הסרט משמאל לימין כדי למצוא את התווים שעליהם מצביעים k הראשים הקוראים במכונה המקורית M. נשתמש בקבוצת המצבים $Q \times (\Gamma \cup \{*\})^k$. אם המצב הנוכחי הוא q נתחיל מ- $(q * * \ldots *)$ ובכל פעם שנגיע לתא שהראש הקורא מצביע עליו (לפחות באחד הסרטים) נהפוך $*$ לתו המתאים.
2. נעבור שוב על הסרט משמאל לימין. נשתמש במצבים נוספים: $Q \times \Gamma^k \times \{R, L\}^k$.
בכל פעם שנתקל ב-1 נעדכן את התו של הסרט המתאים וכן נהפוך 1 ל-0 ונהפוך 0 ל-1 בתא שמימין או משמאל (בהתאם R/L שבמצב). כעת נחזור לסעיף הקודם.

לא נוכיח נכונות. במקום זה נאמוד את סיבוכיות הזמן והמקום של M' ביחס לזו של M:

$$space_{M'}(x) \le space_M(x)$$

$time_{M'}(x) \le$

$\le time_M(x) \cdot$ מספר הצעדים בסימולציית פעולה אחת של M במכונה M' $\le$

$\le time_M(x) \cdot O(_M) \le O(time_M(x))^2$

לכן שני המודלים "שקולים פולינומיאלית" , כלומר מה שניתן לחשב באחד בזמן פולינומיאלי אפשר גם בשני ולהפך.

□