סיבוכיות - הרצאה 10

כל העולם הוא חישוב אחד גדול

17.5.11

אלגוריתמי קירוב

נתונה לנו בעית אוטימיזציה. מה זה? עד עכשיו דיברנו על בעיות הכרעה, התשובה שלהן כן או לא. לבעיות אופטימיזציה יש הרבה פתרונות אבל לכל פתרון יש מחיר. אנחנו כמובן מעוניינים במחיר הקטן ביותר או לפעמים במחיר הגדול ביותר.

דוגמא. מציאת קליקה הכי גדולה בגרף. הקלט הוא גרף $G = (V, E)$. יש לנו אוסף פתרונות אפשריים- כל הקליקות בגרף. לכל פתרון מוצמד ערך - גודל הקליקה. נרצה למצוא פתרון עם ערך מקסימלי.

לא תמיד נרצה למצוא את הפתרון הטוב ביותר, אלא לעיתים אנו מוכנים להתפשר. באופן פורמלי:
יש לנו יחס $R(x, y)$ כאשר x הוא מקבוצת הקלטים ו-y מקבוצת הפתרנות. w פתרון ל-x אם $(x, w) \in R$. $W_x = \{w : (x, w) \in R\}$ קבוצת הפתרונות. תהיה לנו פונקצית מחיר $\varphi : W_x \to \mathbb{R}^+$. פתרון מקסימלי (מינימלי) ל- x זהו $w \in W_x$ עם $\varphi(w)$ מקסימלי (מינימלי).
אמרנו שאנחנו לעיתים מוכנים להתפשר. נאמר שאלגוריתם A מקרב בעית מקסימום אם לכל-c x, $A(x)$ מחזיר ערך

$$\frac{\mathrm{opt}(x)}{c} \le A(x) \le \mathrm{opt}(x)$$

כאשר,

$$\mathrm{opt}(x) = \max_{w \in W_x} \varphi(x)$$

נשים לב שזה אלגוריתם החלטה. הוא מחזיר מספר (ולא את הפתרון). באופן דומה בעית חיפוש: נאמר ש- A מוצא פתרון ש- c- מקרב בעיית המקסימום אם $A(x)$ מוציא $w \in W_x$ כך ש-

$$\frac{\mathrm{opt}(x)}{c} \le \varphi(x) \le \mathrm{opt}(x)$$

באופן דומה עבור בעיית מינימום:

$$\mathrm{opt}(x) \le A(x) \le c \cdot \mathrm{opt}(x)$$

כמובן שעבור $c = 1$ זה פתרון מדוייק. ככל ש- c גדול יותר, הפתרון מדוייק פחות. אלה אם כן נאמר אחרת, כל אלגוריתמי הקירוב יהיו ב- P.
נראה שתי דוגמאות לאלגוריתמי קירוב.

דוגמא. אלגוריתם 2–קירוב ל–VC.
הקלט: גרף $G=(V,E)$.
פתרון: $A\subseteq V$ כך שלכל $e=(i,j)\in E$ מתקיים או $i\in A$ או $j\in A$.
המחיר של פתרון יהיה $|A|$. אנחנו מעוניינים בפתרון מינימלי. הבעיה VC היא NP קשה (נזכר את הרדוקציה בהמשך כדי להראות שקשה לקרב טוב את VC).

הערה. הוכיחו שקירוב טוב יותר מ- 1.43 הוא NP קשה.

אלגוריתם הקירוב:

1. נמצא זיווג מקסימלי בגרף. אבל במובן שאי אפשר להרחיב אותו ולא זיווג שמספר הצלעות בו מקסמלי. זה קל. נתחיל מקבוצה ריקה S. כל עוד אפשר למצוא צלע $e=(i,j)$ שזרה ל- S נוסיף את e לזיווג, את i,j ל- S ונמשיך.

2. הפלט: כל הקודקודים שמופיעים בזיווג.

זה האלגוריתם. די ברור שהוא יעיל. אבל למה הוא בכלל נכון?

טענה. האלגוריתם 2–מקרב את VC.

הוכחה. נגיד הקלט $G=(V,E)$ ופתרון מקסימלי העלות שלו opt. אנחנו צריכים להראות שעלות הפתרון שלנו $\leq 2\,\mathrm{opt}$. חוץ מזה צריך להראות שבכלל מה שמצאנו הוא VC, כלומר שכל צלע מכוסה ע"י S.
נתחיל מלהראות שזה באמת כיסוי. נניח S אינו כיסוי. אזי קיימת צלע $e=(i,j)\in E$ כך ש- $i\notin S$ או $j\notin S$. אבל אם יש כזאת היינו יכולים להוסיף את e לזיווג (כי הוא זר לקודקודים עד עכשיו) בסתירה ללהיות S מקסימלית.
מה לגבי אופיטמליות? אם $|S|>2\,\mathrm{opt}$ אז יש צלע $e=(i,j)\subseteq$, כך שבפתרון האופטימלי לא מופיע לא i ולא j. אבל אז זה לא כיסוי. $\square$

דוגמא. אלגוריתם קירוב ל- $Set-Cover$. נזכר בבעיה: יש עולם U, כאשר $|U|=n$ וקבוצות $S_1,\ldots,S_m\subseteq U$. פתרון הוא קבוצת אינדקסים $i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,m\}$ כך ש– $S_{i_1}\cup\ldots\cup S_{i_k}=U$. עלות פתרון כזה היא k.
הבעיה $Setcover$ היא NP קשה. וזה בגלל ש- $VC\leq Setcover$ ע"י $U=E$ ולכל צומת $v\in V$ נבנה קבוצה $S_v=\{e\in E: v\in e\}$.
אלגוריתם הקירוב: אלגוריתם חמדן. בכל שלב נבחר את הקבוצה שמכילה הכי הרבה איברים שלא כוסו עד כה.

טענה. האלגוריתם החמדן נותן יחס קירוב של $\log n$.

הוכחה. נסמן ב- U_i את האיברים שעדיין לא כוסו בשלב ה- i. $U_0=U$. נראה ש–

$$|U_{i+1}|\leq\left(1-\frac{1}{\mathrm{opt}}\right)|U_i|$$

כאשר opt - גודל הכיסוי המינימלי. ואכן, אפשר לכסות את כל U ב– opt קבוצות ולכן אפשר לכסות גם את U_i ב– opt קבוצות. לכן, יש קבוצה בכיסוי האופטימלי שמכסה לפחות $\frac{|U_i|}{\mathrm{opt}}$ איברים שלא כוסו עד עכשיו. האלגוגיתם החמדן יבחר קבוצה שמכסה הכי הרבה אברים חדשים לכן יכסה לפחות $\frac{|U_i|}{\mathrm{opt}}$ איברים חדשים, $|U_{i+1}|\leq\left(1-\frac{1}{\mathrm{opt}}\right)|U_i|$ ולכן $|U_i|\leq\left(1-\frac{1}{\mathrm{opt}}\right)^i\underbrace{n}_{=|U_0|}$.
כאשר $|U_i|<1$ בהכרח סיימנו. נשים לב,

$$\left(1-\frac{1}{\mathrm{opt}}\right)^t n\leq e^{-\frac{t}{\mathrm{opt}}}n=e^{-c}\cdot n<\frac{1}{n}\cdot n=1$$

כאשר $t = c \cdot \mathrm{opt}$, $c > \log n$.
לכן בהכרח נסיים בתוך $(\log n)\,\mathrm{opt}$ צעדים ולכן עלות הפתרון $\leq (\log n)\,\mathrm{opt}$.

$\square$

אנחנו לא נמשיך יותר בלחפש אלגוריתמי קירוב. נמשיך לכיוון הקושי. המטרה שלנו להראות שיש בעיות ש- NP–קשה לקרב אותן לפקטור c. קודם כל, צריך להגדיר מה זה אומר שבעיית קירוב היא NP קשה. נגדיר מה זה רדוקציה מבעיית NP לבעיית קירוב.

הגדרה. בעיית הבטחה (promise problem) היא זוג קבוצות (Y, N), $Y, N \subseteq \{0,1\}^*$ ו– $Y \cap N = \varnothing$.
בעיית הבטחה היא שפה אם $Y \cup N = \{0,1\}^*$.

הגדרה. נגיד שאלגוריתם A פותר בעיית הבטחה (Y, N) אם לכל $x \in Y$, $A(x)$ מקבל, לכל $x \in N$ $A(x)$ דוחה ואחרת לא אכפת לנו מה הוא אומר.

הגדרה. $\mathrm{Gap}_{[a,b]}\,SetCover$:
בעיית הבטחה. Y - U, $S_1, \ldots, S_m \subseteq U$ כך שיש a סטים שהאיחוד שלהם מכסה את U.
N - U, $S_1, \ldots, S_m \subseteq U$ כך שכל k סטים שמכסים את U מקיימים $k \geq b$.

יכול להיות קלט $U, S_1, \ldots, S_m$ כך שהכיסוי המינימלי שלו מכיל k סטים $a < k < b$. אז קלט כזה לא ב- Y ולא ב- N.
אלגוריתם שניגש לפתור את $\mathrm{Gap}_{[a,b]}\,Setcover$ יכול להניח שאו שיש לו כיסוי מאוד קטן $(< a)$ או כל כיסוי של מאוד גדול $(> b)$. אז למשל $\mathrm{Gap}_{[a,2a+1]}\,VC \in P$ בהינתן קלט $G = (V, E)$, נריץ את אלגוריתם 2–קירוב ונקבל תוצאה A. יודעים $\mathrm{opt} \leq A \leq 2\,\mathrm{opt}$.
אם $\mathrm{opt} \leq a$ אז $A \leq 2a$ (מקרה של Y), ואם $\mathrm{opt} \geq b = 2a+1$ אז $A \geq 2a+1$ (מקרה של N). נסתכל על A. אם $A \leq 2a$ נגיד Y ואם $A \geq 2a+1$ נגיד N.
נרצה להראות שיש פרמטרים a, c כך ש- $\mathrm{Gap}_{[a,c\cdot a]}\,VC$ היא NP קשה. בשביל זה צריך להסביר מהי בעיית NP Gap קשה.

הגדרה. אם $\Pi_1 = (Y_1, N_1)$, $\Pi_2 = (Y_2, N_2)$ אם יש רדוקציה $\varphi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ כך ש-

$$x \in Y_1 \Rightarrow \varphi(x) \in Y_2$$

$$x \in N_1 \Rightarrow \varphi(x) \in N_2$$

נסמן $\Pi_1 \leq \Pi_2$ אם קיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- Π_2 ל- Π_1.

טענה. אם $\Pi_1 \in P$ ואם $\Pi_2 \leq \Pi_1$ אז $\Pi_2 \in P$.

הגדרה. בעיית הבטחה Π היא NP קשה אם לכל $L \in NP$ קיים $L \leq \Pi$.

נראה דוגמא לרדוקציה.

דוגמא. $\mathrm{Gap}_{[\alpha,1]}\,max3SAT \geq \mathrm{Gap}_{[\frac{\alpha n}{7},\frac{n}{7}]}\,maxClique$.
הקלט של $max3SAT$ הוא פסוק $3SAT$ $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} c_i$. Y - יש השמה מספקת את כל הפסוקיות, N - כל השמה מספקת לכל היותר αm פסוקיות.
הקלט של $maxClique$ הוא גרף. Y - יש קליקה בגודל $\frac{n}{7}$, N - הקליקה הכי גדולה היא מגודל $\geq \frac{\alpha n}{7}$.
ניזכר ברדוקציה $3SAT \geq Clique$. הקלט הוא פסוק $3SAT$ $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} c_i$, c_i פסוקית $3CNF$. לכל פסוקים נשים 7 קודקודים שמתאימים להשמות של המשתנים שלה שמספקים

את הפסוקית. נחבר זוג קודקודים בצלע אם תתי השמות שמוצמדות לקודקודים הן עקביות.
נראה נכונות הרדוקציה.
אם פסוק $3SAT$ הוא ספיק, יש השמה שמספקת את כל הפסוקיות ולכן יש קליקה בגודל n:
לכל c_i ניקח את הקודקוד המתאים להשמה המספקת. אם יש השמה שמספקת k פסוקיות מפסוק ה־$3SAT$ יש בגרף קליקה בגודל k (מאותו טיעון). אפשר גם להגיד הפוך. אם יש בגרף קילקה בגודל k אז יש בגרף השמה שמספקת k פסוקיות. ניקח את הקליקה, כל קודקוד בקליקה מתאר תת־השמה. כלום עקביים אחד עם השני אז ביחד הם מתארים השמה (תת־השמה) שמספקת k פסוקיות.
מספר הפסוקיות שמסתפק בהשמה אופטימלית ב־ x שווה לגודל הקליקה המקסימלית ב־ $\varphi(x)$. לכן אם התחלנו עם פסוק $3SAT$ שבו כל השמה מספקת $\leq a$ פסוקיות נקבל גרף עם קליקה מקסימלית $\leq a$.
אם התחלנו עם פסוקים $3SAT$ שיש השמה שמספקת כל פסוקיות נקבל גרף עם קליקה $\geq b$.

רדוקציה כזאת נקרא משמרת פער.
נדבר על שרשרת רדוקציות הבאה:

$$\underbrace{\mathrm{Gap}_{[\frac{9}{10},1]}\, max3SAT}_{NP-hard} \leq \mathrm{Gap}_{[\frac{9}{10}\frac{n}{7},\frac{n}{7}]}\, \underset{|V|=n}{maxClique} \overset{*}{\leq}$$

$$\leq \mathrm{Gap}_{[\frac{9}{70}n,\frac{n}{7}]}\, maxIS \leq \mathrm{Gap}_{[\frac{6}{7}n,\frac{61}{70}n]}\, minVC$$

את זה ש־ $\mathrm{Gap}_{[\frac{9}{10},1]}\, max3SAT$ היא NP קשה נראה בשיעור הבא.
$(*)$ נובע מהרדוקציה $G=(V,E)\mapsto \overline{G}=(V,\overline{E})$ גרף מתאים לגרף המתאים. והרדקוציה הזאת היא משמרת פער.
את הרדקוציה האחרונה דווקא כן נראה. רוצים להראות

$$\mathrm{Gap}_{[A,B}\, maxIS \leq \mathrm{Gap}_{[n-B,n-A]}\, minVC$$

נסמן את הרדוקציה ב־ φ. $G=(V,E)$ קלט של IS אז $\varphi(G)=G$. מדוע? $X\subseteq V$ הוא $IS \Leftrightarrow \overline{X}$ הוא VC. אם X הוא VC כל הצלעות נוגעות ב־ X. אז $(i,j)\in\overline{X}\times\overline{X}$ לא קשת. לכן $\overline{X}$ הוא IS. באותו אופן הכיוון השני.
נראה שהרדוקציה משמרת פער. אם יש IS בגדול $\leq B$ אז יש VC שהוא בגודל $\geq n-B$.
מצד שני, אם כל IS הוא מגודל $\geq A$ אז כל VC הוא מגודל $\leq nA$.
הוכחנו כמעת עד הסוף ש־ $\mathrm{Gap}_{[\alpha n,\beta n]}\, minVC$ היא בעיה NP קשה. נסיק מזה:

טענה. NP - קשה לקרב את VC לפקטור $\frac{\beta}{\alpha}$.

כלומר אם היה אלגוריתם $A\in P$ שהיה מקרב את VC עד כדי פקטור β/α אז $P=NP$.
מדוע? בהינתן שפה $L\in NP$ וקלט x, נעשה לה רדקוציה φ ל־ $\mathrm{Gap}_{[\alpha n,\beta n]}$. נפעיל את אלגוריתם הקירוב על $\varphi(x)$ ונקבל תוצאה A. אם ב־ $\varphi(x)$ יש VC מגודל $\geq \alpha n$ נקבל שגודל התוצאה A הוא $> \beta/\alpha = \beta n$ ואם ב־ VC כל VC מגודל $\leq \beta n$ נקבל שגודל התוצאה A הוא $\beta n \leq A$.
לכן אנחנו יכולים להפריד מופעי הכן ממופעי הלא ופתרנו את L.