4/11/13 18 <u>שיעור שבוע 4</u>

⊛ ראינו בעצם padding שאפשר לסמלץ אי-דטרמיניזם באופן דטרמיניסטי בחלק מהבעי' במקרים. שעות חישובים חסומים בזמן...]

⊛ כעת נראה ש $Co\text{-}NL = NL$ ע״י שנראה ש $NONCONN \in NL$
כי $NONCONN \in Co\text{-}NL\text{-}complete$ משום ש $CONN \in NL\text{-}Complete$.

[בשונה ממחלקות חסומי זמן שם לא יודעים אם $NP = Co\text{-}NP$]

<u>הוכחה:</u> [משפט Immerman: $Co\text{-}NL = NL$]
נמצא $w \notin$ רק שאין מסלול מ $s \to t$ וניתן לעשות אותו במקום לוגריתמי.

<u>נגדיר:</u> $R(G) = \{v \mid s \longmapsto v\}$ כל אלה שיש מסלול מ s
ברור. אם $t \notin R(G)$ זה מספיק.
<u>בנוסף לכך:</u>
$G_{-t} = (V, E - (V \times \{t\}))$ - מוחקים כל הקשתות שנכנסות ל t. אז בגרף t אינו נגיש מ s.
אם נוכיח כי $|R(G)| = |R(G_{-t})|$
אזי נסיים.

הסף יהיה פשוט מחולק לשני חצאים, החצי שבעצם נמצא את $|R(G)|$ ואז החצי השני ימצא באותו האופן בדיוק עבור $|R(G_{-t})|$ ואז יוודא שוויון.

לכן אנחנו צריכים רק שיוכח כי $R(G) = r$ עבור $r \in \mathbb{N}$ כלשהו, אם נמצא איך כזה סימני, כי נעשה אותה פעמיים ונבדוק שוויון מספרי.

<u>נגדיר:</u> $R_\ell(G) = \{v \mid s \longmapsto v$ מאורך קטן שווה $\ell\}$ [מונוטוניות עולה]

כעת נוכיח באינדוקציה שאנחנו יודעים את ערך של $R_n(G)$ בעזרת הצעדים $R_k(G)$? עבור $k \leq n-1$. [בהוכחה שבצעדים הקטנים ימי ביניים]

לומר עם שנוי עבור $R_k(G)$ נהיה אוצרים מספר שהוא הערך, ושבנוי זה תהיה הוכחה שניתן לוודא במקום לוגריתמי שזה אכן הערך הנכון.

4/11/13 19

המשך שיעור 4

⊛ בסופו של דבר העד שלנו יהיה שרשור כל העדים עבורים הקטנים יותר. ובאינדוקציה נראה שבהינתן זה איך נוכל לוודא את נכונות העד הבא.

המוודא בסופו של דבר יעבור על העד לפי הסדר וכל פעם ישתכנע במקום לוגריתמי שאכן המספר שרשום בעד הוא גודל הקבוצה של הקודקודים שנגישים מ-s באורך לכל היותר מספר הצעד שלו.

כלומר צעד האינדוקציה:

קיבלנו $w\#r_\ell\#$ כאשר w עד חוקי שניתן לוודא במקום לוגריתמי לכל $k \le \ell$ ונרצה למצוא עבור $\ell+1$.

שאכן r_ℓ נכון!

העד שלנו יהיה וקטור של אפסים ואחדים שבכל קודקוד יהיה 0/1 בהתאם לאם הוא ב-$Readable_{\ell+1}$, ולאחר מכן עוד דבר.
אם יש מסלול בינהם, העד יהיה המסלול עצמו, זה קל.
אם אין מסלול, כלומר יש 0, כלומר אין מסלול באורך היותר ℓ קשה,
אזי נשתמש בווקטור שהוא ההוכחה שלנו לכך שקודקודים נגישים/לא נגישים ב-ℓ צעדים לכל היותר, מהנחת האינדוקציה זה קיים, וניתן לוודא זאת במקום לוגריתמי, וכל פעם שנמצא קודקוד שהוא כן נגיש ב-ℓ צעדים ורואים שאין קשת ממנו לקודקוד שלנו, וזו תהיה ההוכחה.

⊛ כלומר: אנחנו יודעים את המספר של R_ℓ מהנחת האינדוקציה. את ה-1-ים נוודא בעזרת קיום מסלול, את האפסים נוודא על ידי המעבר לאחדים R_ℓ. כלומר נספור את האחדים ונוודא שמספרם הוא R_ℓ, ולכן לא נצטרך לוודא את האפסים!! זה בעצם לבדוק שמספר האחדים הוא R_ℓ!

את R_ℓ
אנחנו יודעים
ומשתמשים לוודא
מהנחת האינדוקציה.

ולכן זה עובד! $R_{\ell+1}$ בעזרת ידיעת ערכו של R_ℓ.

כי בהינתן R_ℓ והווקטור אנחנו יודעים מי נגיש ב-ℓ צעדים, ואז נבדוק שאין קשת מכל אחד כזה לקודקוד שלנו, ולכן זה יוודא שהוא לא נגיש ב-$\ell+1$ צעדים.

4/11/13

המשך שיעור 4

* הוכחה פורמלית תפורסם באתר.

אלגוריתמים הסתברותיים

* נרצה להעריך ממוצע בעזרת מדגם כלשהו.

א"ש מרקוב:

מ"מ f אי-שלילי אז $Pr[f(x)\ge k]\le\frac{E[f]}{k}$ [חשוב גם מקרי הקצה]

א"ש צ'בישב:

$$Pr[|f(x)-E[f]|\ge k]\le\frac{Var[f]}{k^2}$$

[שוב לגבי מקרי קצה]

קשור באינטואיציה
של מיקום ההסתברות
מבלי לשלב הרבה...

* התפלגות של מ"מ
בינומיים בלתי תלויים
זה נורמלי

א"ש צ'רנוף:

יהי x_i מ"מ בלתי תלויים. נתבונן ב $\sum x_i$. אז

$$Pr\Big[\sum x_i\ge \underbrace{k+E[\textstyle\sum x_i]}_{\text{חיבור בקבוע חיובי.}}\Big]\overset{\text{ממוני האקספוננט}}{=}Pr\Big[e^{\sum x_i}\ge e^{k+E[\sum x_i]}\Big]=$$

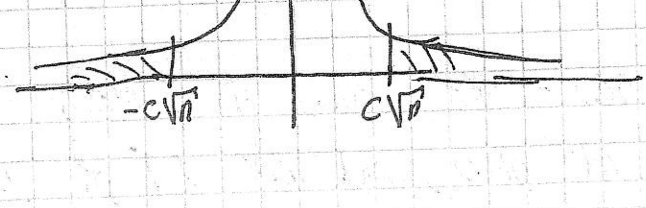
$$=Pr\Big[\prod_i e^{x_i}\ge e^{k+E[\sum x_i]}\Big]\overset{\text{עבור } t>0 \text{ כלשהו.}}{=}Pr\Big[\prod_i e^{tx_i}\ge \underbrace{e^{tk+tE[\sum x_i]}}_{\text{מספר שאינו תלוי ב מ"מ שהוא שווה הסכום.}}\Big]$$

$$\overset{\text{אי-שוויון מרקוב.}}{\le}\frac{E_x\big[\prod_i e^{tx_i}\big]}{e^{tk+tE[\sum x_i]}}\overset{\text{הם בלתי תלויים לכן מכפלת התוחלות היא תוחלת המכפלה.}}{=}\frac{\prod_i E_{x_i}[e^{tx_i}]}{e^{tk+tE[\sum x_i]}}$$

נרצה שנתפוס את t לקבל חסם ההדוק ביותר.

נקח $t=\frac{1}{\sqrt{n}}$ כאשר n הוא מספר המ"מ.

אם נקח x_i להיות או -1 או 1...



4/11/13 21

השלמת שיעור 4

אי-שוויון צ'רנוף הגרסה השימושית: עבור $x_i \in \{0,1\}$ בלתי תלויים.

$$\Pr\left[\sum x_i > (1+\delta)\cdot E\left[\sum x_i\right]\right] < \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{E[\sum x_i]}$$

חסם על סטייה כפלית מהתוחלת.

נובע מהחסם הקודם שהראינו

$k = \delta E[x_i]$ ו $t = \ln(1+\delta)$.

7/11/13

תרגול שבוע 4

סגורות תחת משלים:

⊖ כל מחלקה G דטרמיניסטית אז $G = co\,G$. ע"י החלפת מצבים מקבלים ודוחים.

⊖ $NL = co\text{-}NL$.

⊖ $NP \overset{?}{=} co\text{-}NP$ שאלה פתוחה. $NPG \overset{?}{=} co\text{-}NPG$ שאלה פתוחה...

⊖ $NPspace = co\,NPSPACE$ נובע מיידית מהמשפט של Immerman

או נובע ממשפט savitch.

השוואות:

⊖ $space(f(n)) \subseteq Time(exp(f(n)) \subseteq space(exp(f(n))$ ← $L \subseteq P \subseteq Pspace$.

⊖ $DSPACE(n) \overset{?}{\subseteq} P$ שאלה פתוחה! $SAT \in DSPACE(n)$ כי זה מספיק לעבור על 2^n.

⊖ $DSPACE(n) \neq P$!!

כי נניח בשלילה, עושה ריפוד ונקבל $DSPACE(n^2) \subseteq DSPACE(n)$ בסתירה! [משפט...]

אם בפ"ל השפה שפה נבדק רק עד השלמה של הכל, ולא ~~[illegible]~~ נבדק תקינות הכל

כלומר תקינות של הכל זה בפ"ל כי פשוט ופורש פולי' מקום לוגריתמי בפ"ל... כי זה פשוט להשוות תווים.

⊛ נזכר בהבדלים בין ניחוש לעד - העד זה פשוט רצף הניחושים שבחרתי, לכן אסור לחזור אחורה, כאילו לא נזכר את הניחוש שלי...