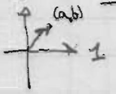
20/10/08

מרוכבות - שיעור 1

קפלן 328 , טל' 640-6351 , saudry@post.tau.ac.il . אין זמני קבלה.

פרק א': מספרים מרוכבים



$z = a + bi$, $a,b \in \mathbb{R}$.

$\underset{Re(z)}{a}$, $\underset{Im(z)}{bi}$

הצמוד: $\bar{z} = a - bi$ תכונות:

(1) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(4) $\bar{\bar{z}} = z$

(5) $Re\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$Im\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

(6) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

$z \in \mathbb{R} \cdot i \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

(7) $z \cdot \bar{z} \geq 0$

הגדרה:

עבור $z \in \mathbb{C}$ נגדיר $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

אם $z = a+bi$ אז נקבל: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} =$ המרחק של z מהראשית

(* אם $z = a \in \mathbb{R}$ אז $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$)

למה: (תכונות הערך המוחלט)

(1) $|z| \geq 0$ ומתקיים $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(3) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + 2Re(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2$

(4) $-|z| \leq Re(z), Im(z) \leq |z|$

(5) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ (אי' המשולש)

הוכחה:

(2) $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2$

$\Rightarrow |z_1 z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ▫

(3) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 + \underbrace{z_1\bar{z}_2 + (\overline{z_1\bar{z}_2})} + |z_2|^2 \underset{\text{תכונה (5)}}{=} |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

(4) נובע מפיתגורס: צלע של משולש קטנה מיתר.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| = |Re(z)|$

$\geq \sqrt{b^2} = |b| = |Im(z)|$

(5) $|z_1+z_2|^2 \underset{(3)}{=} |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \underset{(4)}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2$

$|z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$= (|z_1|+|z_2|)^2$

<u>מסקנה:</u>

$\left(z_1 = t\cdot z_2 \Longleftrightarrow |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \right)$

כלומר המשוואה של שוויון $\Longleftrightarrow$ הם z_1,z_2 פרופורציונים ע״י קבוע ≥ 0

<u>הוכחה:</u>

לפי ההוכחה של (5) יש שוויון כאשר המשוואה אמ״מ $Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1\cdot\bar{z}_2|$

מתוך כלל קל שראינו: $Re(z) = |z| \Longleftrightarrow \mathbb{R} \ni z \geq 0$ ([illegible] $a = \sqrt{a^2+b^2}$)

ולכן הנ״ל נכון אמ״מ $z_1\cdot\bar{z}_2 \geq 0$.

אם $z_2=0$ אז $z_2 = 0\cdot z_1$ ובמקרה מתקיים גם המשוואה.

אם $z_2\neq 0$ אז $z_1\cdot\bar{z}_2 > 0$,

ולכן הנ״ל נכון אמ״מ $\frac{z_1\cdot\cancel{\bar{z}_2}}{z_2\cdot\cancel{\bar{z}_2}} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \geq 0$ (נסמן $t = \frac{z_1}{z_2}$, אז $t \geq 0$ ו- $z_1 = t\cdot z_2$)

<u>מסקנה:</u>

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leq |z_1|+\ldots+|z_n| \quad \forall z_i\in\mathbb{C}.$$

וקי״ם שוויון $\Longleftrightarrow$ כל שני מחוברים שונים מאפס הם פרופורציונים ע״י קבוע חיובי.

<u>הוכחה:</u>

הוכחת אי-השוויון קלה. אפשר להניח כי כל המחוברים שונים מ-0.

נניח כי יש שוויון:

$$|z_1|+\ldots+|z_n| = |z_1+\ldots+z_n| = |(z_1+z_2)+z_3+\ldots+z_n|$$
$$\leq |z_1+z_2|+|z_3|+\ldots+|z_n|$$
$$\leq (|z_1|+|z_2|)+|z_3|+\ldots+|z_n|$$

סגירות

מכאן נסיק כי מתקיים $|z_1+z_2|+|z_3|+\ldots+|z_n| = |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$

ולכן $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$.

ואז מהמשפט קודם $\frac{z_1}{z_2} > 0$, ובאותן שיקולים לכל זוג $i\neq j$ $\left(\frac{z_i}{z_j} > 0\right)$

כיוון שני:

נניח כי כל שני מחוברים פרופ' ע״י קבוע חיובי.

$$|z_1+\ldots+z_n| = \left|z_1\left(1+\frac{z_2}{z_1}+\ldots+\frac{z_n}{z_1}\right)\right| = |z_1|\cdot\left|1+\underbrace{\frac{z_2}{z_1}}_{>0}+\ldots+\underbrace{\frac{z_n}{z_1}}_{>0}\right|$$

$$\overset{\text{לפי ההנחה}}{=} |z_1|\cdot\left(1+\frac{z_2}{z_1}+\ldots+\frac{z_n}{z_1}\right) \underset{0<\frac{z_k}{z_1}=\left|\frac{z_k}{z_1}\right|=\frac{|z_k|}{|z_1|}}{=} |z_1|\cdot\left(1+\frac{|z_2|}{|z_1|}+\ldots+\frac{|z_n|}{|z_1|}\right) = |z_1|+\ldots+|z_n|$$

∎

<u>הגדרה:</u>

(1) המרחק האוקלידי של z_1 מ-z_2 כנק' במישור $= |z_1-z_2|$.

מתקיים: $|z_1-z_2| = |(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i|$

$= \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$

(2) המכפלה הסקלרית של z_1, z_2 כנק' במישור $\mathbb{R}^2$: $a_1a_2+b_1b_2 = Re(\underbrace{z_1\bar{z}_2}_{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)})$

זווית

(3) נניח כי $z_1, z_2 \neq 0$,

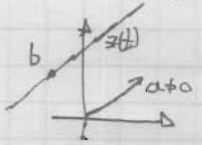
$$\boxed{\cos\theta = \frac{Re(z_1\bar{z}_2)}{|z_1 z_2|}}$$

הזווית בין z_1 ל-z_2 כווקטורים ב-$\mathbb{R}^2$

מסקנה הזווית ישרה $\iff Re(z_1\bar{z}_2)=0$

$\iff z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}\cdot i$ $\quad (\iff z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0)$

ישר ב-$\mathbb{C}$:



ישר ב-$\mathbb{C}$ אשר מקביל ל- $a\in\mathbb{C}\neq 0$ (נחשוב עליו כעל וקטור כיוון) ועובר דרך הנק' $b\in\mathbb{C}$ נתון כאוסף הנק' $z(t) = a\cdot t + b$ כש- $t\in\mathbb{R}$

נניח כי $a = a_1+a_2i$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ וכן $b=b_1+b_2i$, $b_1,b_2\in\mathbb{R}$.

נניח למשל כי $a_2\neq 0$, ונכתוב $z(t) = x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

$$(a_1+a_2i)t+b_1+b_2i = x+yi$$

$$(a_1t+b_1)+(a_2t+b_2)i = x+yi \implies \begin{cases} x = a_1t+b_1 \\ y = a_2t+b_2 \end{cases}$$

ומכאן: $t = \frac{y-b_2}{a_2} \Leftarrow x = a_1\frac{y-b_2}{a_2}+b_1$

$$a_2x = a_1y - a_1b_2 + a_2b_1$$

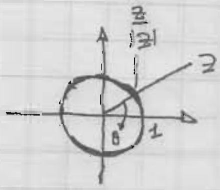
$$\boxed{a_2x - a_1y = a_2b_1 - a_1b_2}$$ ← זוהי משוואה של ישר במישור xy במונחי x,y.

מעגל ב-$\mathbb{C}$:

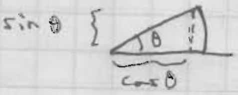
מעגל סביב $a\in\mathbb{C}$ עם רדיוס $r>0$: $\left\{ z\in\mathbb{C} : |z-a| = r \right\}$

קואורדינטות קוטביות

נניח כי $z\neq 0$ ב $\mathbb{C}$.



כי $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$ ← על מעגל היחידה



נסמן $\boxed{r=|z|}$

אז $\frac{z}{r} = \cos\theta + i\sin\theta$ ולכן $z = \underset{\substack{\vee\\0}}{r}\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$.

(r נקרא מודולוס של z , ו- θ נקבע עד כדי כפולה של 2π)

אם נקבע קטע של מחזור ונדרוש כי θ יקיים משהו (למשל $0\leq\theta<2\pi$) אז θ נקבע באופן יחיד.

כך נקבל כי: $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi)$ מתאר מודולוס של $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

סימון: $\boxed{\theta = \arg(z)}$ $(=\theta+2\pi\mathbb{Z})$

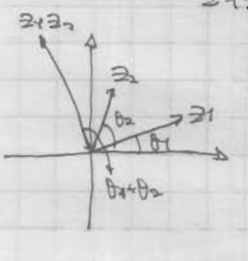
הערה: קואורדינטות קוטביות:

$\theta = Const$: קרן היוצאת מהראשית.

$r = Const$: מעגל ברדיוס r סביב הראשית.

משמעות גיאומטרית של הכפל:

$0 \neq z_k = \underset{>0}{r_k}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ $(k=1,2)$. אז



$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)$$

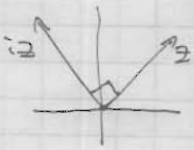
$$= \underbrace{r_1r_2}_{|z_1||z_2| = |z_1z_2|}(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \blacksquare$$

לכן כפל ב- $\cos\theta + i\sin\theta$ גורם לסיבוב המישור סביב הראשית בזווית θ.

דוגמה: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

לכן הפונ' $f(z) = iz$ מסובבת את z ב- $90°$ (נגד כיוון השעון)

ואכן $(x+yi)i = -y+xi$ כי $(x,y) \mapsto (-y,x)$



דוגמה:

$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ מתאים $z \mapsto \frac{z}{\sqrt{2}}(1+i)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+yi)(1+i) = \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \frac{x+y}{\sqrt{2}}i$$

פולינה

[illegible]

virtual

פונקציות מרוכבות 1 - תרגול 1

trinami@gmail.com

שעת קבלה: יום ג', 15.
[illegible], חדר 6.

תכונות מספרים מרוכבים

שאלה 1: כיצד פותרים משוואה ריבועית ב-$\mathbb{C}$?

$$az^2+bz+c=0 \qquad a\neq 0,\ a,b,c\in\mathbb{C}$$

תזכורת:
$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0$$
$$z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$
$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

איך מוציאים שורש של מספר מרוכב?

דרך I (אלגברית):

$$(x+iy)^2=\overbrace{u+iv}^{z}$$

$$x^2+2xyi-y^2=u+iv \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=u \\ 2xy=v \end{cases}$$

אם $v=0$ יש שתי אפשרויות:
- אם $u\geq 0$, $y=0 \Leftarrow x=\pm\sqrt{u}$
- אם $u\leq 0$, $x=0 \Leftarrow y=\pm\sqrt{-u}$

אחרת, מ-II נקבל $y=\frac{v}{2x}$.

[illegible]:

$$x^2-\left(\frac{v}{2x}\right)^2=u \Rightarrow 4x^4-v^2=u\cdot 4x^2$$
$$4x^4-4u\cdot x^2-v^2=0$$

נבחר את החיובי.

$$x^2_{1,2}=\frac{4u\pm\sqrt{16u^2+16v^2}}{8}=\frac{u\pm\sqrt{u^2+v^2}}{2}=\frac{u\pm|u+iv|}{2}$$

← מכיוון שכאן מספר ריבועי הוא [illegible]
אי שלילי, ולכן נפסול את [illegible].

$$x=\pm\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}$$

$$y=\frac{v}{2x}=\pm\frac{v}{\sqrt{2(u+|u+iv|)}}$$

דרך II (קוטבית):

$$z^2=u+iv=\rho\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$z=\pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

ידוע:
$$\begin{cases}\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\end{cases}$$

תלוי ברביע

דוגמא:

$$z^2-3z+(3+i)=0$$

$$z_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4(3+i)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$$

$$r=\sqrt{3^2+4^2}=5 \rightarrow -3-4i=5\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right) \rightarrow \cos\theta=-\frac{3}{5}$$

$$\sqrt{-3-4i} = \pm\sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

לפי סימנים $\textcircled{\pm}\sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \pm\sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

אז $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$$\Longrightarrow z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 \pm (-1+2i)\right) \begin{matrix} \nearrow 1+i \\ \searrow 2-i \end{matrix}$$

תיאור העתקות במישור

תרגיל:

תארו סיבוב ב-90° (נגד כיוון השעון) סביב הנק' $5+2i$.

פתרון:

סיבוב סביב 0 בזווית $\frac{\pi}{2}$ זה $z \mapsto iz$ (כפל ב- $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ כופל את האורך ב-r ומסובב בזווית φ)

נזכור ש- $|zw| = |z|\cdot|w|$, $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

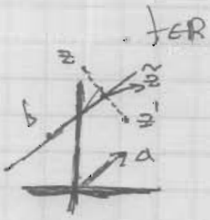
צריך למצוא $z \mapsto z'$ כך ש- $z' - (5+2i) = i(z - (5+2i))$

$\leftarrow z' = iz + 7 - 3i$

$$\left(\begin{matrix} i(x+iy)+7-3i \\ -y+7+i(x-3) \\ \Downarrow \\ (x,y) \mapsto (-y+7, x-3) \end{matrix}\right)$$

תרגיל:

תארו שיקוף של מספר מרוכב z מעבר לישר $t\cdot a+b$ כאשר $a,b \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$.



פתרון:

נמצא את נק' החיתוך של הישר עם הניצב לו מ-z:

$$\tilde{z} = \tilde{t}\cdot a + b$$

וכיוון שהם אנך: $\quad \mathrm{Re}\left[(z-\tilde{z})\cdot\bar{a}\right] = 0$

נציב נוסחה עבור הנקודה: $\quad \mathrm{Re}\left[(z-\tilde{t}a-b)\cdot\bar{a}\right] = 0$

$$\mathrm{Re}\left[(z-b)\cdot\bar{a} - \underbrace{\tilde{t}\cdot|a|^2}_{\text{ממשי}}\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[(z-b)\bar{a}\right] = \tilde{t}\cdot|a|^2 \Longrightarrow \tilde{t} = \frac{\mathrm{Re}\left[(z-b)\bar{a}\right]}{|a|^2} = \mathrm{Re}\left[\frac{z-b}{a}\right]$$

$$\Longrightarrow \tilde{z} = \mathrm{Re}\left[\frac{z-b}{a}\right]\cdot a + b$$

לכן: $\tilde{z} = \frac{z+z'}{2} \Longrightarrow z' = 2\tilde{z} - z = 2\mathrm{Re}\left[\frac{z-b}{a}\right]\cdot a + 2b - z$

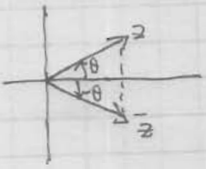
ונשתמש ב- $\mathrm{Re}[z] = \frac{z+\bar{z}}{2}$ נקבל:

$$\left[\frac{z-b}{a} + \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{a}}\right]\cdot a + 2b - z \Longrightarrow \cancel{z} - b + \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{a}}\cdot a + 2b - \cancel{z}$$

אזי $\quad z \mapsto b + (\bar{z}-\bar{b})\cdot\frac{a^2}{|a|^2}$

מרוכבים - שיעור 2

22/10/09



אם $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ אז $\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

כמו כן $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{1}{r^2}\cdot r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

וגם $\arg(\frac{1}{z})=\arg(\bar{z})=-\arg(z) \pmod{2\pi}$

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$

[illegible]: (*) $n\in\mathbb{Z}$, $\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}$

נוסחת הבינום ← $\overset{ \text{"} }{ } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k\sin^k\theta\cos^{n-k}\theta$

חלק ממשי ↙ , חלק מדומה:

$$\sum_{0\le 2r\le n}\binom{n}{2r}(-1)^r\sin^{2r}\theta\cos^{n-2r}\theta=\cos(n\theta)$$

זוגיים - i^{2k} ← ממשי

$$\sum_{1\le 2r+1\le n}\binom{n}{2r+1}(-1)^r\sin^{2r+1}\theta\cos^{n-2r-1}\theta=\sin(n\theta)$$

$\boxed{*}$ $i^{2r+1}=(-1)^r\cdot i$

הוצאת שורש:

נתון מספר $a\in\mathbb{C}$. $a\neq 0$. יהי n טבעי, נחפש $z^n=a$.

נכתוב $a=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\Rightarrow z^n=r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

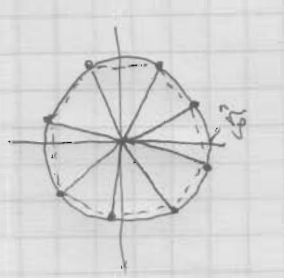
אז $r=\sqrt[n]{\rho}>0 \Leftarrow r^n=\rho$

וכמו כן $n\theta=\alpha+2\pi k$

$k=0,1,\dots,n-1$ $\theta=\frac{\alpha}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}$ ← כי n פתרונות.

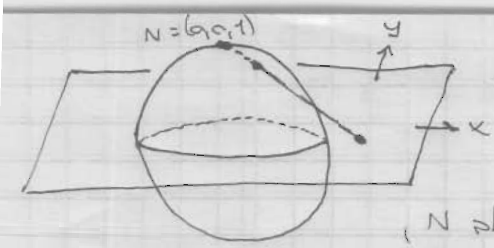
$$\Rightarrow z_k=\sqrt[n]{\rho}\cdot\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right) \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{\rho\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\sqrt[n]{\rho}\cdot\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)+\frac{2\pi k}{2}+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right)} \quad k=0,1,\dots,n-1$$



הערה: כאשר $z_k=z_0\cdot w_n^k$ ש- $w_n^n=1$

וכן $\{z \mid z^n=1\}=\{1,w_n,w_n^2,\dots,w_n^{n-1}\}$



כדור רימן ב-$\mathbb{R}^3$:

$$\underline{\underline{\mathbb{C}\approx S^2\setminus\{N\}}}$$

$S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$.

אם ניקח נק' במישור xy המרוכב ונחבר אותה עם הקוטב N,

נקבל נק' חיתוך של הישר עם הכדור, ולהפך.

נקבל העתקה חח"ע ועל מהמישור המרוכב לכדור הרימן המחורר: $\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}S^2\setminus\{N\}$.

נסמן $S:\mathbb{C}\to S^2\setminus\{N\}$. יהי $z\in\mathbb{C}$, $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$

$z\leftrightarrow(x,y,0)\in\mathbb{R}^3$

הישר המחבר את z עם N:

$l(t)=z+t(N-z)$, $t\in\mathbb{R}$

$=(x,y,0)+t(-x,-y,1)=(x(1-t),y(1-t),t)$

נחפש חיתוך של הישר עם S^2:

$x^2(1-t)^2+y^2(1-t)^2+t^2=1$

$(1-t)^2\underbrace{(x^2+y^2)}_{|z|^2}=1-t^2$

אם $t=1$ אז $l(1)=N$.

נניח $t\neq1$:

$|z|^2=\frac{1-t^2}{(1-t)^2}=\frac{1+t}{1-t}$

$|z|^2-t|z|^2=1+t \Rightarrow t=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$

ולכן $S(z)=\left(x\left(1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right),y\left(1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right),\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$

$=\left(\frac{2x}{|z|^2+1},\frac{2y}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$

בכתב ב-z: $\boxed{=\left(\frac{2Re(z)}{|z|^2+1},\frac{2Im(z)}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)}$, בכתב ב-x,y: $=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$

כעת נמצא את S^{-1}:

נניח $V=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ כך ש- $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $(V\neq N)$

נחפש $z=(x,y,0)$ כך ש- $S(z)=V$, כלומר $(x(1-t),y(1-t),t)=(x_1,x_2,x_3)$

$\Leftarrow$ $t=x_3$, $x(1-x_3)=x_1$, $y(1-x_3)=x_2$.

כיוון ש- $V\neq N$, כלומר $x_3\neq1$ ולכן $x=\frac{x_1}{1-x_3}$, $y=\frac{x_2}{1-x_3}$

$$\Longrightarrow\boxed{S^{-1}(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}}$$

טענה:

(1) $\lim_{|z|\to\infty}S(z)=N$ (2) $\lim_{\substack{v\to N\\ v\in S^2\setminus\{N\}}}|S^{-1}(v)|=\infty$

27/10/09

מרוכבות - שיעור 3

פרק א': טופולוגיה במישור המרוכב

הגדרת התכנסות: תהא סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$. נאמר כי הסדרה מתכנסת ל- $z \in \mathbb{C}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n \geq N$: $|z_n - z| < \varepsilon$.

באופן שקול: $|z_n - z| \leq \varepsilon$ או $|z_n - z| \leq \theta \cdot \varepsilon$ כש- $\theta > 0$ קבוע.

הערה: נסמן $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. קל להראות כי כאשר יש גבול הוא יחיד.
($|z - z'| = |z - z_n + z_n - z'| \leq |z - z_n| + |z_n - z'| < 2\varepsilon$ ולכן $z - z' = 0$)

טענה:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \iff \begin{matrix} Re(z_n) \to Re(z) \\ \text{וגם} \\ Im(z_n) \to Im(z) \end{matrix}$$

הוכחה:

נסמן $z_n = x_n + y_n i$, $z = x + yi$. ראינו כי $|Re(z')|, |Im(z')| \leq |z'|$ לכל $z' \in \mathbb{C}$
נציב $z' = z_n - z$: $|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z|$.

($\Leftarrow$) נניח כי $z_n \to z$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך ש $|z_n - z| < \varepsilon \Leftarrow n \geq N$
ומכאן $|x_n - x|, |y_n - y| < \varepsilon$ $\forall n \geq N.$ ולכן $x_n \to x$, $y_n \to y$.

($\Rightarrow$) נניח כי $x_n \to x$ ו- $y_n \to y$. יהי $\varepsilon > 0$. ולכן קיים N כך ש $\forall n \geq N.\ |x_n - x|, |y_n - y| < \varepsilon$
ולכן לכל $n \geq N$: $|z_n - z|^2 = (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < 2\varepsilon^2$ ולכן $\forall n \geq N.\ |z_n - z| < \sqrt{2}\varepsilon$. ∎

הגדרה: (שאיפה ל- ∞)

תהא $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. נאמר ש- $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אם $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$,
כלומר לכל $M > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n \geq N$: $|z_n| > M$.

דוגמאות: ⊙ $z_n = n = n + 0 \cdot i$. $Re(z_n) = n \to \infty$, $Im(z_n) = 0 \to 0$

⊙ $z_n = n + \cos(\pi n) \cdot i$, $Re(z_n) \to \infty$, $Im(z_n)$ לא מתכנס.

טענה:

תהא סדרה $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, ונתון $z \in \mathbb{C}$.

לפי מרחקים: (1) $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \iff |z_n - z| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

מקרה פרטי של 1. (2) $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$

(3) אם $z_n \to z$, אז $|z_n| \to |z|$

(4) אם $z_n \to z$, אז $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה (כלומר $\{|z_n|\}$ חסומה)

(5) אם $z_n \to z$ ו- $z \neq 0$, אז כמעט כל איברי הסדרה שונים מ-0.

קושי (6) $\{z_n\}$ מתכנסת (לאיבר ב-$\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$ היא סדרת קושי.

BW (7) לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

(8) חשבון גבולות לסדרות מתכנסות: - סכום סדרות → סכום הגבולות

- מכפלת סדרות → מכפלת הגבולות. - מנת סדרות → מנת הגבולות
(הסדרה במכנה $\neq 0$)

הוכחה:

(3) $\underbrace{||z_n|-|z||}_{\geq 0} \overset{\Delta \text{ הפ}}{\leq} |z_n - z| \to 0$ ומכאן $|z_n|-|z| \to 0$.

(4) מכיון ש- $|z_n| \to |z|$, הסדרה $\{|z_n|\}$ חסומה.

(5) בגלל ש- $|z_n| \to |z| \neq 0$ אז קיים N כך שלכל $n \geq N$: $|z_n| \neq 0$, ולכן $z_n \neq 0$.

(6) נניח כי $\underset{x_n+y_ni}{z_n} \to \underset{x+yi}{z}$, לכן לכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n \geq N$: $|z_n - z| < \varepsilon$.
מכאן שעבור $n, m \geq N$: $|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$

להיפך: נניח כי $\{z_n\}$ היא סדרת קושי. כיוון שלכל n,m: $|x_n - x_m|, |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$.
יהי $\varepsilon > 0$. קיים N טבעי כך ש- $|z_n - z_m| < \varepsilon \Leftarrow n,m \geq N$, ולכן גם
$|x_n - x_m|, |y_n - y_m| < \varepsilon \Leftarrow n,m \geq N$, ולכן $\{x_n\}$ ו- $\{y_n\}$ הם סדרות קושי, ולכן הן מתכנסות
(לפי קושי לסדרות ממשיות), ולכן גם $\{z_n\}$ מתכנסת.

(7) נניח כי: $|z_n| \leq M$ לכל $n \geq 1$. מכאן ש- $|x_n|, |y_n| \leq |z_n| \leq M$ $\forall n$.
ולכן $\{x_n\}, \{y_n\}$ סדרות ממשיות חסומות. לפי BW הממשי: ל- $\{x_n\}$ יש תת-סדרה מתכנסת
$x \leftarrow \{x_{n_k}\}$, [redacted] וכיון ש- $\{y_{n_k}\}$ חסומה, יש לה תת-סדרה מתכנסת
$y \leftarrow \{y_{n_{k_j}}\}$. כמובן שגם $x_{n_{k_j}} \to x$. ולכן $z_{n_{k_j}} \xrightarrow{j\to\infty} x+yi$.

התכנסות לפי קואורדינטות קוטביות

נניח $z_n \to z$ כש- $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ($r_n > 0$)

הערה: אם $z=0$ אז ההתכנסות שקולה לכך ש- $r_n \to 0$, ועל $\{\theta_n\}$ אין לומר דבר.

נניח $z \neq 0$ כש- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r>0$).

נקבע ש- $-\pi \leq \theta_n, \theta < \pi$. האם $(r_n, \theta_n) \to (r, \theta)$?

כמובן ש- $|z_n| = r_n \to r = |z|$, אך לא נכון ש- $\theta_n \to \theta$.

דוגמא: יהי $a>0$. נגדיר $z_n = a(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i\sin(\pi - \frac{1}{n}))$,
ומתקיים כי $\theta_n = \pi - \frac{1}{n} \to \theta$, $\theta = -\pi \Leftarrow z_n \to -a = a(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$

(π_n מ
לא ל
θ-ל)

דוגמה: $\bar{z}_n = a(\cos(\pi-\frac{1}{n}) - i\sin(\pi-\frac{1}{n}))$. ולכן $\theta_n = -\pi+\frac{1}{n} \to -\pi$ | $\bar{z}_n \to -a = \underbrace{a(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))}$

$= a(\cos(-\pi+\frac{1}{n})+i\sin(-\pi+\frac{1}{n}))$

ואכן $\theta_n \to \theta$.

דוגמה: $z_n = \begin{cases} a(\cos(\pi-\frac{1}{n})+i\sin(-\pi-\frac{1}{n})) & n \text{ זוגי} \\ a(\cos(-\pi-\frac{1}{n})+i\sin(-\pi+\frac{1}{n})) & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$, אז $z_n \to -a$ אבל $\{\theta_n\}$ לא מתכנסת.

נניח כי $\theta \neq -\pi$, ונראה כי $\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} \theta$:

$Re(z_n) = r_n\cos\theta_n \to Re(z) = r\cos\theta$

$Im(z_n) = r_n\sin\theta_n \to Im(z) = r\sin\theta$

מכיוון ש- $r_n \to r$ ו- $r>0$ אז $\sin\theta_n \to \sin\theta$ ו- $\cos\theta_n \to \cos\theta$.

$\cos(\theta_n-\theta) = \cos\theta_n\cos\theta + \sin\theta_n\sin\theta \xrightarrow{n\to\infty} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sin(\theta_n-\theta) = \sin\theta_n\cos\theta - \sin\theta\cos\theta_n \to \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$

$-\pi \le \theta_n < \pi$ $\Leftarrow$ סדרה חסומה. <u>נניח בשלילה</u> כי $\theta_n \not\to \theta$:

אז קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל k קיים $n_k>k$ כך ש- $|\theta_{n_k}-\theta| \ge \varepsilon_0$.

ואפשר להניח כי $\{\theta_{n_k}\}$ מתכנסת (כי $\{\theta_{n_k}\}$ חסומה, ולכן יש לה תת מתכנסת $\{\theta_{n_{k_j}}\}$ ואז נעבוד עם ה- $\{\theta_{n_{k_j}}\}$ במקום ה- $\{\theta_{n_k}\}$).

נגדיר סימונים: $\theta'_j := \theta_{n_{k_j}}$. כלומר: לכל j : $|\theta'_j-\theta| \ge \varepsilon_0$ וקיים $\lim_{j\to\infty}\theta'_j = \theta'$.

כיוון ש- $\{\theta'_j\} \subseteq \{\theta_n\}$ אז מתקיים כנ"ל גם לגבי θ'_j : $\cos(\theta'_j-\theta) \to 1$ ↙ $\cos(\theta'-\theta)$

$\sin(\theta'_j-\theta) \to 0$ ↙ $\sin(\theta'-\theta)$

ולכן $\cos(\theta'-\theta)=1$ וגם $\sin(\theta'-\theta)=0$.

אז $\theta'-\theta = 2\pi\cdot m$ כש- $m\in\mathbb{Z}$.

אבל אז, $\varepsilon_0 \le |\theta'-\theta| < 2\pi$ ← סתירה! (כי המרחק הוא כבר ממש קטן מ- 2π ואפילו שוב הוא בין ε_0 ל- 2π לא מתקיים)

כי $-\pi < \theta < \pi$ וגם $-\pi \le \theta' \le \pi$

← הראנו כי ההעתקה $\mathbb{C}\setminus\{x\le 0\} \to \mathbb{R}_+ \times (-\pi,\pi)$ כש- $z \mapsto (r,\theta)$ היא רציפה.

קבוצות פתוחות וקבוצות סגורות

<u>הגדרה</u>: (קבוצה פתוחה)

תת קבוצה $\phi \neq U \subset \mathbb{C}$ נקראת פתוחה (ב- $\mathbb{C}$) אם לכל $z\in U$ יש עיגול פתוח (קטן) B כך ש- $z \in B \subset U$.

<u>הערה</u>: לפי ההגדרה קובעים כי ϕ פתוחה.

<u>הגדרה</u>: (קבוצה סגורה)

תת קבוצה של $\mathbb{C}$ נקראת סגורה אם המשלים שלה הוא קב' פתוחה.

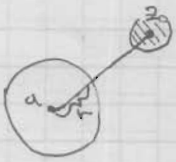
<u>הערה</u>: הקב' הריקה ϕ היא גם סגורה.

העיגול ברדיוס [illegible]

דוגמאות: ① עיגול פתוח: $\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$ = [illegible] סביב a. ← קב' פתוחה.

(כי היא מקיימת הגדרה
עבור כל נק' בה)

② עיגול סגור: $F=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|\le r\}$ ← קב' סגורה



הסבר: צריך להראות ש-F^c היא קב' פתוחה: $F^c=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|>r\}$.

יהי $z_0\in F^c$: $|z_0-a|>r$. נראה שמתקיים הגדרה: (סביב z_0)

$B=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<\frac{1}{2}(|z_0-a|-r)\}$. נראה כי $B\subset\mathbb{C}\setminus F$: נניח $z\in B$.

$$|z-a| = |z-z_0+z_0-a| \underset{\Delta\text{ הפוך}}{\ge} |z_0-a|-|z-z_0| > |z_0-a|-\frac{1}{2}(|z_0-a|-r) = \frac{1}{2}|z_0-a|+\frac{1}{2}r$$

$$> \frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r = r$$

⟸ $z\notin F$ ולכן $z\in\mathbb{C}\setminus F$ כנדרש. ☒

③ המשלים של עיגול סגור היא קב' פתוחה, והמשלים של עיגול פתוח - קב' סגורה

הגדרה: (קב' פתוחה במישור המורחב) * המישור המורחב: $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

תהי: $U\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. נאמר כי U פתוחה ב-$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ אם:

(1) אם $\infty\notin U$ אז (כרגיל) $U\subset\mathbb{C}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$.

(2) אם $\infty\in U$ אז (כרגיל) ש-$\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus U$ היא קב' סגורה וחסומה (ב-$\mathbb{C}$) ← כלומר ש-U מכיל ∞ אם פתוחה

הגדרה: (קב' סגורה במישור המורחב)

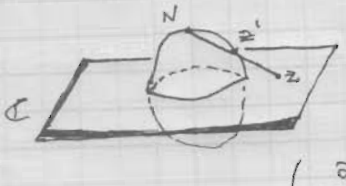
קב' $F\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ נקראת סגורה (ב-$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$) אם המשלים שלה היא קב' פתוחה.

דוגמאות:

$\{z\in\mathbb{C} : |z-\underset{F^c}{a}|>r\}\cup\{\infty\}$ היא קב' פתוחה במישור המורחב.

27/10/09

מרוכבות - תרגול 2



הטלה סטריאוגרפית

$S: \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$

ע"י $x+yi \longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$

$S^{-1}: S^2\setminus\{N\} \to \mathbb{C}$ ע"י $(x_1,x_2,x_3) \longmapsto \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$ כש $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

תרגיל:

מהי התמונה של מעגל ב-S^2 תחת ההעתקה S^{-1}.

פתרון:

המעגל מאופיין ע"י מישור (כי הוא חיתוך של מישור עם S^2).

משוואת מישור: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_0$.

מרחק הראשית מהמישור: $\frac{|a_0|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} < 1$

([illegible] כרגיל)

נחפש את $x+yi \in \mathbb{C}$ כך ש- $S(x+iy)$ יהיה על המישור הנ"ל.

כלומר: $a_1\cdot\frac{2x}{x^2+y^2+1}+a_2\cdot\frac{2y}{x^2+y^2+1}+a_3\cdot\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-1}=a_0$

$2a_1x+2a_2y+a_3(x^2+y^2-1)=a_0(x^2+y^2+1)$

$(a_3-a_0)(x^2+y^2)+2a_1x+2a_2y=a_3+a_0$

$a_3=a_0$: ישר: $\cancel{2}a_1x+\cancel{2}a_2y=\cancel{2}a_3$

והמישור במקרה זה: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_3$

$N=(0,0,1)$ על המישור

[מעגלים העוברים דרך N הם ישרים]

$a_3\neq a_0$: נחלק ב-(a_3-a_0) $\longrightarrow$ $x^2+\frac{2a_1}{a_3-a_0}x+y^2+\frac{2a_2}{a_3-a_0}y=\frac{a_0+a_3}{a_3-a_0}$

$$\frac{a_0+a_3}{a_3-a_0}=\Big(x+\underbrace{\frac{a_1}{a_3-a_0}}_{A}\Big)^2-\left(\frac{a_1}{a_3-a_0}\right)^2+\Big(y+\underbrace{\frac{a_2}{a_3-a_0}}_{B}\Big)^2-\left(\frac{a_2}{a_3-a_0}\right)^2$$

מעגל $\Longleftarrow$ $(x+A)^2+(y+B)^2=\frac{a_3^2+a_2^2+a_1^2-a_0^3}{(a_3-a_0)^2}>0$

מהנתון שנתנו בהתחלה (מרחק מהמישור < 1)

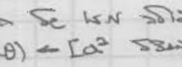
תרגיל:

נתונה $f(z)=z^2$. תאר את התמונה של ישר l נתון ($f(l)$)

פתרון:

$l=\{t\cdot a+b \mid t\in\mathbb{R},\ a,b\in\mathbb{C}\}$ קבועים. מקרה I: $b=0$ (כלומר $0\in l$ - ישר שעובר דרך 0)

אז נקבל $l=\{ta \mid t\in\mathbb{R}\}$ ולכן $f(l)=\{t^2\cdot a^2 \mid t\in\mathbb{R}\}$ ← קרן:



([illegible] של ישר)

[זווית a^2] ← (2θ)

מקרה II: $b\neq 0$ ($0\notin l$)

$z\in l$: $z^2=(ta+b)^2=a^2(t+\frac{b}{a})^2$

נבין את הבניה הגיאומטרית של $(t+c)^2$: $t\in\mathbb{R}$ $(t+c)^2=\underbrace{t^2+2c\cdot t}+c^2$

הוספת c^2 זו הזזה של צורה גיאומטרית. נכתוב $c=c_1+c_2i$: $\underbrace{t^2+2c_1t}_{x}+\underbrace{(2c_2t)}_{y}i$

אז $y=2c_2t$ ו- $x=t^2+2c_1t$ (לפי קודם)

$t=\frac{y}{2c_2}$ $\Downarrow$, נציב: $x=\left(\frac{y}{2c_2}\right)^2+2c_1\cdot\frac{y}{2c_2}$ $\Longleftarrow$ $x=\left(\frac{y}{2c_2}+c_1\right)^2-c_1^2$

← פרבולה

(מראה אוסף t והזזה ב-c^2
בסוף מקבלים פרבולה)

תכונות סדרות

משפט:

$\{z_n\},\{w_n\}\subseteq\mathbb{C}$ סדרות מתכנסות. הוכיחו ש-$\{z_nw_n\}$ סדרה מתכנסת,

וכן: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot w_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}w_n$

הוכחה:

נסמן $z=\lim z_n$, $w=\lim w_n$. נשים לב: $|z\cdot w-z_nw_n|\le$

$\le|zw-z_nw|+|z_nw-z_nw_n|\le|w|\cdot|z-z_n|+|z_n|\cdot|w-w_n|$

$\{z_n\}$ חסומה (כי היא מתכנסת), ולכן קיים $A>0$ כך ש- $|z_n|<A$ לכל n.

יהי $\varepsilon>0$. קיים N_1 כך ש- $|z_n-z|<\varepsilon$ לכל $n>N_1$, וקיים N_2 כך ש- $|w_n-w|<\varepsilon$ $\forall n>N_2$.

נסמן $N=\max\{N_1,N_2\}$. אז לכל $n>N$, $|z_nw_n-zw|\le|w|\cdot\varepsilon+A\cdot\varepsilon=(|w|+A)\cdot\varepsilon$ ∎

דוגמאות לסדרות:

① $z_n=\frac{1}{n}(\cos n+i\sin n)$ ← נקודות שמתקרבות $|z_n|\overset{r}{=}\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ $\overset{\text{ולכן}}{\Longleftarrow}$ $z_n\to0$

② $\{n\cdot z^n\}_{n=1}^{\infty}$ עבור $z\in\mathbb{C}$ נתון. אם $|z|<1$:

$|nz^n|=n\cdot|z|^n\xrightarrow{n\to\infty}0$

ואם $|z|\ge1$: $|nz^n|=n\cdot|z|^n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ ולכן $nz^n\to$ "∞" במובן הזה.

③ נגדיר: $\arg:\mathbb{C}\to[-\pi,\pi)$.

נבחן את הסדרה: $\mathbb{R}\ni a_n=\arg\Big(\underbrace{\frac{2+ni}{1-ni}}_{u_n}\Big)$ האם a_n מתכנסת ולאן?

$u_n=\frac{2+ni}{1-ni}$ $\Longleftarrow$ $u_n=\frac{\frac{2}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{i}{-i}=-1$ > מאיזה כיוון זה שואף?

π✓
$-\pi$

$\frac{2+ni}{1-ni}=\frac{(2+ni)(1+ni)}{1+n^2}=\underbrace{\frac{2-n^2}{1+n^2}}_{\to-1}+\underbrace{\frac{3n}{1+n^2}}_{\to0}i$ ↗ u_n מעל הציר, ולכן $\arg(u_n)\xrightarrow{n\to\infty}\pi$

(שימו לב ש- $\arg(\lim u_n)=$
$=\arg(-1)=-\pi$)

29/10/09

מרוכבות - שיעור א

הגדרה: (סביבה של נק')

תהי נק' $x\in X$ (כש- $X=\mathbb{C}$ או $X=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$), וקב' פתוחה U ב-X המכילה את x, נאמר כי U היא *סביבה של x*.

למה:

קב' $U\subset X$ היא פתוחה ב-X $\Longleftrightarrow$ לכל נק' $z\in U$ יש סביבה B כך ש- $z\in B\subset U$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם U פתוחה, אז לכל $z\in U$ ניקח $B=U$.

($\Rightarrow$) נניח כי $U\subset\mathbb{C}$. תהי $z\in U$. תהי $B\subset U$ קב' פתוחה המכילה את z. (סביבה של z)

לכן יש עיגול פתוח B' כך ש- $z\in B'\subset B$. לכן לכל $z\in U$ יש עיגול פתוח B' כך ש- $z\in B'\subset U$, ולפי ההגדרה, U פתוחה ב-$\mathbb{C}$.

נניח כי $U\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ וכי $\infty\in U$. תהי V סביבה של ∞ המוכלת ב-U.

לפי ההגדרה, $F=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus V$ היא קב' סגורה וחסומה (ב-$\mathbb{C}$), ובפרט $A=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus U\subset F$ חסומה. נותר להראות כי משלים זה סגור ב-$\mathbb{C}$. נראה כי המשלים של A ב-$\mathbb{C}$ פתוח ב-$\mathbb{C}$.

ברור כי $A=\mathbb{C}\setminus(U\setminus\{\infty\})$. נראה כי $U\setminus\{\infty\}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$.

תהי $z\in U\setminus\{\infty\}$. לכן יש $V'\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ פתוחה המכילה את z ומוכלת ב-U.

אם $\infty\notin V'$, אז V' פתוחה ב-$\mathbb{C}$, ולכן יש עיגול פתוח B' כך ש- $z\in B'\subset V'\subset U\setminus\{\infty\}$. ואם $\infty\in V'$, אז $V'\setminus\{\infty\}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$ (כי $\mathbb{C}\setminus(V'\setminus\{\infty\})=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus V'$, וכאמור זו קב' סגורה (וחסומה) מאליו)

כיוון ש- $z\neq\infty$, אז $z\in V'\setminus\{\infty\}$, ואז נמצא עיגול פתוח B' כך ש- $z\in B'\subset V'\setminus\{\infty\}\subset U\setminus\{\infty\}$.

הראנו כי לכל $z\in U\setminus\{\infty\}$, יש עיגול פתוח B' כך ש- $z\in B'\subset U\setminus\{\infty\}$.

ולפי ההגדרה, $U\setminus\{\infty\}$ פתוחה, כמו שרצינו.

◻

למה:

$X=\mathbb{C},\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. אז: (א) איחוד כלשהו של קב' פתוחות הוא קב' פתוחה.

(ב) חיתוך כלשהו של קב' סגורות הוא קב' סגורה.

(ג) חיתוך של מס' סופי של קב' פתוחות הוא קב' פתוחה.

(ד) איחוד של מס' סופי של קב' סגורות הוא קב' סגורה.

הוכחה:

(א) נתונה קב' של קב' פתוחות: $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נסמן $U=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$.
לכל $x\in U$, יש $\alpha\in I$ כך ש- $x\in U_\alpha$. אז U_α היא סביבה של x המוכלת ב- U, ולכן מהגדרה U פתוחה. ∎

(ב) נתונה קב' של קב' סגורות: $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נסמן $F=\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$.
נראה כי המשלים של F היא קב' פתוחה:

$$X\setminus F = X\setminus\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\underbrace{(X\setminus F_\alpha)}_{\text{קב' פתוחות}} \underset{(\text{א})}{=} \text{קב' פתוחה}$$ ∎

התכנסות סדרה: (הגדרה II)

הגדרה: נתונה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ ונתון $x\in X$. נאמר כי הסדרה מתכנסת ל- x אם לכל סביבה U של x, יש N טבעי כך שלכל $n\geq N$: $x_n\in U$.

מסמנים: $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$.

הגדרת גבול לפי קושי ⟺ הגדרת גבול II:

נראה את השקילות במקרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ כאשר $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}z$. (הגדרת הגבול לפי קושי)

(⟹) נניח כי בכל סביבה של z נמצאים כמעט כל איברי הסדרה.

א. נניח כי $z\in\mathbb{C}$. לכל $\varepsilon>0$, נסמן $B_{z,\varepsilon}=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-z|<\varepsilon\}$
כדור פתוח ברדיוס ε סביב z. זוהי סביבה של z.

לכן יש N טבעי כך ש- $n\geq N$ ⟸ $z_m\in B_{z,\varepsilon}$, כלומר $|z_n-z|<\varepsilon$.

זה אומר ש- $\lim_{n\to\infty}z_n=z$ לפי הגדרת גבול סדרה.

ב. נניח כי $z=\infty$. לכל $A>0$ נגדיר $U_A=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|>A\}\cup\{\infty\}$.

זוהי קב' פתוחה ב- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ המכילה את ∞ (תזכורת: סביבה של ∞).

לכן יש N טבעי כך ש- $n\geq N$ ⟸ $z_n\in U_A$.

לכן $|z_m|>A$, וזה אומר ש- $\underset{\downarrow\ \text{לפי קושי}}{\lim z_n=\infty}$

(⟸) נניח כי $\lim_{n\to\infty}z_n\overset{\text{לפי קושי}}{=}z$ ונוכיח כי בכל סביבה של z
נמצאים כמעט כל איברי הסדרה.

א. נניח כי $z\in\mathbb{C}$. יהי U סביבה של z. אם $U\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ו- $\infty\in U$,
אז ראינו כי $U\setminus\{\infty\}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$, ועדיין $z\in U\setminus\{\infty\}$.

יש עיגול פתוח B כך ש- $z\in B\subset U\setminus\{\infty\}$. ואפשר להניח כי z הוא המרכז
של B (אפשר להקטין את B - ). נניח כי B הוא ברדיוס $\varepsilon>0$,
ולכן יש N גדול כך ש- $n\ge N$ $\Leftarrow$ $|z_n-z|<\varepsilon$.
בפרט, $n\ge N$ $\Leftarrow$ $z_n\in B\subset U$.

ב. $z=\infty$: תרגיל.

<u>למה:</u>

נניח כי $F\subset X$ (כש-$X=\mathbb{C},\mathbb{C}\cup\{\infty\}$), אז
F סגורה $\Longleftrightarrow$ לכל סדרה מתכנסת שאיבריה ב-F, גם הגבול שייך ל-F.

<u>הוכחה:</u>

נניח כי F סגורה. נניח כי $\{z_n\}\subset F$ מתכנסת ל-$z\in X$.
נניח בשלילה כי $z\notin F$, כלומר $U=X\setminus F\ni z$.
U פתוחה, ולכן U היא סביבה של z, ולכן כמעט כל איברי הסדרה
שייכים ל-U. בסתירה. (כל איברי הסדרה שייכים ל-F)

3/11/09

מרוכבות - שיעור 5

<u>המשך</u>: יהי F קב' סגורה במרחב המטרי: אז כל סדרה מתכנסת $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$, אז גבול הסדרה שייך ל-F. נראה כי F סגורה. (נסמן $X = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

נראה כי $U = X \setminus F$ פתוחה. נראה כי לכל $z \in U$ יש סביבה המוכלת ב-U.

בשלילה, נניח כי יש $a \in U$ כך שכל סביבה V של a כי חותכת את F.

נבנה סדרת סביבות $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ של a, "מתכנסות ל-a", ונבחר $z_n \in V_n \cap F$,

ואז $z_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, ולכן $a \in F$ - סתירה. אם $a \in \mathbb{C}$ ניקח $V_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \frac{1}{n}\}$

אז לכל $z_n \in V_n \cap F$ ברור כי $z_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. אם $a = \infty$, ניקח את $V_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > n\} \cup \{\infty\}$, ואז לכל $z_n \in V_n \cap F$ ברור ש $z_n \to \infty$.

<u>למה</u>: (BW)

לכל סדרה ב-$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ יש תת-סדרה מתכנסת.

<u>הוכחה</u>:

יהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. אם לאינסוף ערכים של n: $z_n = \infty$,

אז $\{z_n \mid z_n = \infty\}$ היא תת-סדרה קבועה ולכן מתכנסת. נניח אם כן

שיש מס' סופי של ערכים $z_n = \infty$, כלומר קיים N_0 טבעי כך ש:

$n \geq N_0 \implies z_n \in \mathbb{C}$. אם $\{z_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ חסומה, אז ידוע שיש לה תת' מתכנסת ב-C. אם $\{z_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ אינה חסומה, אז $\{|z_n|\}_{n=N_0}^{\infty}$ אינה חסומה מלעיל, ולכן יש לה תת' שואפת לאינסוף: $|z_{n_k}| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, כלומר $z_{n_k} \to \infty$. ∎

<u>הגדרה</u>: (פנים של קבוצה)

נתונה קב' $X \subseteq T$. נאמר כי נק' $z \in X$ שייכת לפנים של T, אם קיימת סביבה של z המוכלת ב-T.

<u>סימון</u>: $\mathring{T}$ - קב' הפנים של T.

<u>תכונות</u>: • $\mathring{T} \subseteq T$

- $\mathring{T}$ היא קב' פתוחה. כי אם $z \in \mathring{T}$ אז יש סביבה U כך ש- $z \in U \subseteq T$. לכן ברור כי לכל $x \in U \subseteq T$: $x \in \mathring{T}$, ולכן $z \in U \subseteq \mathring{T}$.
- זוהי הקב' הפתוחה הגדולה ביותר ב-T: $V \subseteq \mathring{T} \quad \forall V \underset{\text{פתוחה}}{\subseteq} T$.
- ייתכן ש- $\mathring{T} = \Phi$. למשל $T =$ "ישר", [illegible] $T =$

הגדרה: (סגור של קבוצה)

נתונה קב' $T\subseteq X$. נאמר כי z נקודת סגור של T, אם בכל סביבה של z יש נק' מ-T.

סימון: $\overline{T}$ - קב' הסגור של T.

תכונות: • $T\subseteq\overline{T}$.

• $\overline{T}$ קב' סגורה: כי $X\setminus\overline{T}$ פתוחה: נניח כי $z\in X\setminus\overline{T}$, כלומר $z\notin\overline{T}$, אז לפי ההגדרה קיימת סביבה V של z כך שב-V אין אף נק' מ-T. מכאן שאין גם אף נק' מ-$\overline{T}$ (אחרת אם יש $x\in V\cap\overline{T}$ אז בגלל ש- $x\in\overline{T}$ ו-V סביבה של x נקבל כי V מכילה נק' מ-T, כלומר $\emptyset\neq T\cap V$ בסתירה) לכן, לכל $z\in X\setminus\overline{T}$ יש סביבה V כך ש- $z\in V\subseteq X\setminus\overline{T}$, ולכן $X\setminus\overline{T}$ פתוחה.

• $\overline{T}$ הקב' הסגורה הקטנה ביותר המכילה את T: $\overline{T}\subseteq V$. $\forall_{V\supseteq T}$ סגורה

הסבר: כי אם F סגורה ו- $F\supseteq T$, צ.ל: $F\supseteq\overline{T}$.

נניח כי $z\in\overline{T}$. אז, בשלילה $z\in\underbrace{X\setminus T}_{\text{פתוחה}}$, $X\setminus F$ היא סביבה של z ולכן מכילה איברים מ-T - סתירה (כי $T\subseteq F$).

למה:

נתונה קב' $T\subseteq X$. אז $z\in\overline{T}$ $\Longleftrightarrow$ יש סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq T$ המתכנסת ל-z.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי $z\in\overline{T}$. תהי $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת סביבות של z המתכנסות ל-z. כיוון ש- $z\in\overline{T}$, יש $z_n\in V_n\cap T$, ולכן $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$. הראינו כי z הוא גבול של סדרה מתכנסת מתוך T.

($\Rightarrow$) נניח כי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq T$ מתכנסת ל- $z\in X$. נראה כי $z\in\overline{T}$. תהי U סביבה של z. יש N טבעי כך ש- $n\geq N\Rightarrow z_n\in U$. ולכן U מכילה איברים מ-T.

הגדרה: (שפה של קבוצה)

נתונה קב' $T\subseteq X$. השפה של T היא: $\partial T=\overline{T}\cap\overline{(X\setminus T)}$

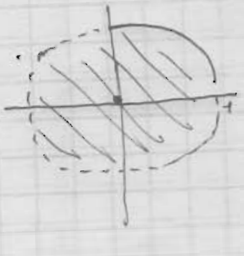
$=\overline{T}\setminus T^{c}$

הערה:

$z\in\partial T$ $\Longleftrightarrow$ בכל סביבה של z יש איברים מ-T ויש איברים מ-$X\setminus T$.

ואפיון בעזרת סדרות: $z\in\partial T$ $\Longleftrightarrow$ יש סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq T$ וסדרה $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X\setminus T$
כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=z$

<u>דוגמא</u>:



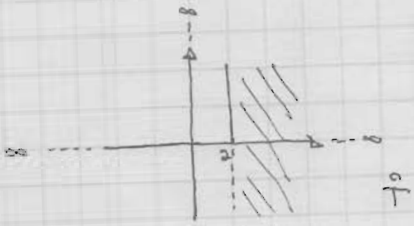
$$T=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}\cup\{\cos\theta+i\sin\theta: 0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2}\}$$

אז $\mathring{T}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$

$$\bar{T}=\{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\}$$

$$\partial T=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$$

<u>דוגמא</u>:



$$T=\{z\in\mathbb{C}: Re(z)>2\}\cup\left\{z\in\mathbb{C}: \begin{matrix}Re(z)=2\\ Im(z)>0\end{matrix}\right\}\cup\{\infty\}$$

אז $\mathring{T}=\{z\in\mathbb{C}: Re(z)>2\}$, $\bar{T}=\{z\in\mathbb{C}: Re(z)\ge 2\}\cup\{\infty\}$

$$\partial T=\{z\in\mathbb{C}: Re(z)=2\}\cup\{\infty\}$$

<u>הגדרה</u>: (נקודות הצטברות)

נתונה קבוצה $T\subseteq X$. נק' $z\in X$ תקרא נק' הצטברות של T אם בכל סביבה של z יש נק' מ-T, אשר <u>שונה</u> מ-z.

<u>הערה</u>: z נק' הצטברות של T $\Longleftrightarrow$ יש סדרה אינסופית של איברי T המתכנסת ל-z.

<u>הגדרה</u>: (תת-קבוצה פתוחה/סגורה ב-A)

נתונה קבוצה $A\subseteq X$. נאמר שתת-קבוצה $B\subseteq A$ היא <u>פתוחה ב-A</u> אם יש קב' פתוחה $V\subseteq X$ כך ש- $B=A\cap V$.

באותו אופן נאמר כי $B\subseteq A$ <u>סגורה ב-A</u> אם יש קב' סגורה $F\subseteq X$ כך ש- $B=A\cap F$.

<u>דוגמא</u>:

$A=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$, $B=\{z\in\mathbb{R}: -1<z<1\}$, אז B סגורה ב-A.

כי $B=\mathbb{R}\cap A$ ו- $\mathbb{R}_{\subseteq\mathbb{C}}$ סגורה.

<u>למה</u>:

נתונה קב' $A\subseteq X$: (1) $B\subseteq A$ פתוחה ב-A $\Longleftrightarrow$ המשלים של B בתוך A סגור ב-A.

(2) איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות ב-A הוא קב' פתוחה ב-A.

(3) חיתוך **סופי** של קבוצות פתוחות ב-A הוא קב' פתוחה ב-A.

(4) חיתוך כלשהו של קב' סגורות ב-A הוא קב' סגורה ב-A.

(5) איחוד סופי של קב' סגורות ב-A הוא סגורה ב-A.

(6) נניח כי $C\subseteq B\subseteq A$ ו-B פתוחה (סגורה) ב-A, ו-C פתוחה (סגורה) ב-B
אז C פתוחה (סגורה) ב-A.

הוכחה:

(1) נניח כי B פתוחה ב-A. אז $B=A\cap V$ כאשר $V\subseteq X$ פתוחה.

$$A\setminus B=A\setminus(A\cap V)=A\cap(X\setminus(A\cap V))=A\cap((X\setminus A)\cup(X\setminus V))$$

$$=A\cap(\underbrace{X\setminus V}_{\text{סגורה}})=\text{סגורה ב-A}$$

ההיפך - דומה.

(2) נניח כי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ היא קב' קבוצות פתוחות ב-A. לכן אפשר לכתוב $A_\alpha=A\cap V_\alpha$ כאשר $V_\alpha\subseteq X$ פתוחה. אז:

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap V_\alpha)=A\cap(\underbrace{\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha}_{\text{פתוחה ב-X}})=\text{קב' פתוחה ב-A}$$

(6) נניח כי B פתוחה ב-A, אז $B=A\cap V$ כש- $V\subseteq X$ פתוחה.
נניח כי C פתוחה ב-B, אז $C=B\cap U$ כש- $U\subseteq X$ פתוחה.
ולכן:

$$C=B\cap U=(A\cap V)\cap U=A\cap(\underbrace{V\cap U}_{\text{פתוחה}})=\text{פתוחה ב-A}$$

(וכנ"ל עבור סגורה)

מסקנה: ((מ-(6))

בהנתן קבוצות $A\supseteq B\supseteq C$, אז C פתוחה ב-B

$$\Updownarrow$$

יש קבוצה פתוחה ב-A, L, כך ש- $C=B\cap L$.

למה:

$B\subseteq A$ פתוחה ב-A $\iff$ לכל $z\in B$ יש קב' פתוחה ב-A, U,
כך ש- $z\in U\subseteq A$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם B פתוחה ב-A, נכתוב $B=A\cap V$ כש- $V\subseteq X$ פתוחה.
נניח כי $z\in B$. כיוון ש- $z\in V$ ו- V פתוחה, יש סביבה של z, U,
כך ש- $U\subseteq V$, ואז $z\in\underbrace{A\cap U}_{\text{פתוחה ב-A}}\subseteq A\cap V=B$.

($\Rightarrow$) לכל $z\in B$, נבחר קב' פתוחה ב-A, U_z, כך ש- $U_z\subseteq B$.
ואז ברור כי: $B=\bigcup_{z\in B}U_z=$ קב' פתוחה ב-A כאיחוד של כאלה. ∎

דוגמא:

$A=\mathbb{R}$, $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $x\in B$ יש קטע פתוח (a,b) כך ש- $x\in(a,b)\subseteq B$.

למה:

$B\subseteq A$ היא סגורה ב-A $\Longleftrightarrow$ לכל סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B$ המתכנסת ל-$z\in A$, מתקיים $z\in B$

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי B סגורה ב-A. נכתוב $B=A\cap F$ כאשר $F\subseteq X$ סגורה.
נניח כי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B$ מתכנסת: $z_n\xrightarrow{n\to\infty}a\in A$. כיוון ש-$\{z_n\}\subseteq F$ ומתכנסת ל-a, אז $a\in F$ (כי F סגורה) ולכן $a\in A\cap F=B$. ∎

($\Rightarrow$) נניח כי ל-B יש את התכונה הנ"ל. נראה כי $A\setminus B$ פתוחה ב-A.
בשלילה, יש $z\in A\setminus B$ כך שלכל קבוצה פתוחה ב-A, ובפרט ב-U, המכילה את z, יש נקודות מ-B. כלומר, לכל סביבה של z, V (ב-X):
$V\cap A$ מכילה איברים מ-B. ניקח סדרת סביבות של z, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$
המתכנסות ל-z. נבחר $z_n\in V_n\cap B$ לכל n. אז $B\ni z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$,
ומהתכונה (בשלילה): $z\in B$, בסתירה. ∎

3/11/08

מרוכבות - תרגול 3

תזכורת: $Arg(z_1z_2)=Arg(z_1)+Arg(z_2)$, $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$. ול- $w=z^4$ יש 4 פתרונות

טופולוגיה במישור ובמישור המורחב ($\mathbb{C}$ ו- $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$)

הגדרות: $U\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אם לכל $x\in U$ יש כדור פתוח B כך ש- $x\in B\subseteq U$.

ו- $U\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ פתוחה אם: 1. $\infty\notin U$ ← U פתוחה ב- $\mathbb{C}$

2. $\infty\in U$ ← $\hat{\mathbb{C}}\setminus U$ קב' סגורה וחסומה ב- $\mathbb{C}$.

הגדרה: (קבוצה סגורה - הגדרה שקולה)

$F\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ קב' סגורה אם לכל סדרה $\{z_n\}\subseteq F$, המתכנסת לאיזה $z\in\hat{\mathbb{C}}$ מתקיים $z\in F$.

דוגמאות: ① נוכיח כי $U=\{x+iy\mid x,y\in\mathbb{R},\ y>x^2\}$ קב' פתוחה. (ב- $\mathbb{C}$)

נוכיח ש- $U^c=F=\{x+iy\mid y\le x^2\}$ קב' סגורה:

ניקח סדרה $\{z_n\}\subseteq F$, $z_n=x_n+iy_n$ כאשר $y_n\le x_n^2$. אם z_n מתכנסת ל- $\underset{x+iy}{z}\in\mathbb{C}$,

אז מחוקי גבולות $x_n\to x$, $y_n\to y$. וגם מחוקי גבולות ואי"ש מתקיים:

$\underbrace{\lim y_n}_{y}\le\underbrace{\lim x_n^2}_{x^2}$ לכן $y\le x^2$. ולכן $z=x+iy\in F$ וסיימנו. ⊠

⊛ האם U פתוחה גם ב- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$? - כן, כי $\infty\notin U$ ולכן מספיק להראות פתוחה ב- $\mathbb{C}$.

⊛ $V=U\cup\{\infty\}$. האם V פתוחה ב- $\hat{\mathbb{C}}$? - לא! המשלים $\hat{\mathbb{C}}\setminus V=\underset{\text{סגורה}}{F}$, אבל F לא חסומה, ולכן אין תנאי מספיק לקב' פתוחה ב- $\hat{\mathbb{C}}$.

⊛ $F_1=F\cup\{\infty\}$. האם F_1 סגורה ב- $\hat{\mathbb{C}}$? - כן. שכן כי המשלים $\hat{\mathbb{C}}\setminus(F\cup\{\infty\})=U$ פתוחה ב- $\hat{\mathbb{C}}$.

⊛ האם F סגורה ב- $\hat{\mathbb{C}}$? - לא! כי המשלים שלה $U\cup\{\infty\}$ לא פתוח. (כי F לא חסומה)

② נגדיר $U=\{z\in\mathbb{C}: \overset{|z|>2}{-\pi<Arg(z)<\frac{\pi}{4}}\}$ כש- $Arg:\mathbb{C}\to[-\pi,\pi)$

צ"ל: נראה כי U פתוחה. נשים לב ש- U זה חיתוך של 2 קב' פתוחות:

$U=\{|z|>2\}\cap\{-\pi<Arg(z)<\frac{\pi}{4}\}$

פתוחה, כמובן כי המשלים סגור (כדור סגור)

פתוחה, מהגדרה. (אינסוף כדור פתוח)

$z=x+iy\in U$. 1) $x<0$. נבחר רדיוס קטן מ- $|y|$

2) $x>0$. ניקח $\min(|x|,|y|)$

3) הנקודות על הישר המשיק $x-y=0$

ב: $V=\{x+iy \mid \underbrace{\sin(x+2y)}_{f_1(x,y)}+i(\underbrace{x^2y-1}_{f_2(x,y)})\in \underset{\text{אוסף פ'}}{U}\}$. הוכיחו: V קב' פתוחה.

לפי כלל ידוע: אם V פתוחה ב-$\mathbb{C}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ רציפה (כלומר החלק המדומה והממשי רציפים), אז $f^{-1}(V)$ היא גם פתוחה.

וכתיבה:
$f=f_1(x,y)+if_2(x,y)$

הוכחה:

נסמן $V=f^{-1}(V)$. ניקח $x_0+iy_0=z_0\in V$. נראה שיש עיגול פתוח סביב z_0 ב-V.

נסמן $u_0=f(z_0)=f_1(z_0)+if_2(z_0)\underset{\text{מהגדרת } V}{\in}U$.

כיוון ש-U פתוחה, קיים עיגול פתוח סביב u_0 שמוכל ב-U.

לכן קיים ריבוע פתוח סביב u_0 ב-U, כלומר קיים $\varepsilon>0$ כך ש:

$$(x,y)\in U \overset{(*)}{\Leftarrow} \begin{cases}|x-f_1(z_0)|<\varepsilon\\ |y-f_2(z_0)|<\varepsilon\end{cases}.$$

מרציפות של f_1 ו-f_2 קיים $\delta>0$ כך ש-אם

$$\begin{cases}|f_1(x,y)-f_1(x_0,y_0)|<\varepsilon\\ |f_2(x,y)-f_2(x_0,y_0)|<\varepsilon\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}|x-x_0|<\delta\\ |y-y_0|<\delta\end{cases}$$

לכל כזה לפי מסקנה (*) כפי שהסקנו ש-

$$(f_1(x,y),f_2(x,y))\in U \text{ , כלומר } f(x+iy)\in U \Leftarrow x+iy\in \underset{V}{\underset{\parallel}{f^{-1}(U)}}$$

5/11/09

מרוכבות - שיעור 6

קשירות (ב- $X=\mathbb{C}, \mathbb{C}\cup\{\infty\}$)

הגדרה: קבוצה $A\subseteq X$ נקראת קשירה אם אי אפשר להציג את A כאיחוד זר של שתי קבוצות פתוחות (יחסית) ב-A, לא ריקות. ($A=U\cup V$, $U\cap V=\phi$, U ו-V פתוחות ב-A. $\Leftarrow$ $V=\phi$ או $U=\phi$)

הגדרה שקולה: A קשירה $\Longleftrightarrow$ אין ל-A תת קבוצה לא טריוויאלית שהיא פתוחה וגם סגורה ב-A.

דוגמא: $A=$ 

$$A=\underbrace{\{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\}}_{U}\cup\underbrace{\{z\in\mathbb{C}: |z-6|<2\}}_{V} \Leftarrow$$

U פתוחה ב-A כי $U=A\cap B$ כאשר $B=\{z\in\mathbb{C}: |z|<3\}$ (פתוחה ב-X)

V פתוחה ב-A כי $V=A\cap V$ ו-V פתוחה ב-X.

משפט: קב' חלקית ל-$\mathbb{R}$ היא קשירה $\Longleftrightarrow$ הקב' היא קטע (כלומר מהצורה: (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,\infty)$, (a,∞) וכו')

הוכחה:

($\Rightarrow$) יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע. נניח כי (בשלילה) $I=A\cup B$ איחוד זר של קב' פתוחות ב-I ולא ריקות.

נבחר $a\in A$, $b\in B$. כיוון ש-A הוא קטע, $[a,b]\subseteq I$. נחצה קטע זה:

$c=\frac{a+b}{2}$, אז $c\in I$ ולכן $c\in A$ או $c\in B$. אם $c\in A$, נסמן בקטע $[a_1,b_1]=[c,b]$. ואם $c\in B$, נסמן בקטע $[a_1,b_1]=[a,c]$.

נחזור על התהליך מהקטע $[a_1,b_1]$, נחצה אותו ונקבל קטע $[a_2,b_2]$ כך ש-$a_2\in A$, $b_2\in B$, וכן הלאה. נקבל סדרת קטעים $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$a_n\in A$, $b_n\in B$, כך ש-$[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]\subset\ldots\subset[a,b]\subset I$. וכן: $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$.

מכאן, הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לאותו גבול r. כיוון ש-A סגורה ב-I ו-$\{a_n\}\subset A$, אז $r\in A$, ובאופן דומה $r\in B$, ולכן $r\in A\cap B=\phi$ סתירה!

($\Leftarrow$) נניח $E\subseteq\mathbb{R}$ קשירה. נסמן $b=\sup E\le\infty$, $-\infty\le a=\inf E$.

אם $a=b$ אז $E=\{a\}$ (קטע מנוון). נניח כי $a<b$: נראה ש-$(a,b)\subset E$.

נניח כי $t\in\mathbb{R}$, $a<t<b$. נניח בשלילה כי $t\notin E$. נגדיר $E=E_1\cup E_2$.

$E_1=\{x\in E: x<t\}$, $E_2=\{x\in E: x>t\}$, וזהו איחוד זר.

כיוון ש-$(-\infty,t)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$, נקבל כי E_1 פתוחה ב-E: $E_1=E\cap(-\infty,t)$.

ובאופן דומה $E_2=E\cap(t,\infty)$ פתוחה ב-E. כיוון ש-E קשירה, $E_1=\phi$ או $E_2=\phi$.

אם $E_1=\phi$, אז נקבל סתירה לכך ש-a הוא חסם תחתון של E.

ואז $E_2=\phi$ אז נקבל סתירה לכך ש-d הוא אינפ' של E. לכן לכל $a<t<d$: $t\in E$.
☒

<u>מסקנה</u>:

נניח ישר l במישור. אז כל הקבוצות הקשירות של l הן בדיוק כל הקטעים <u>המוכלים</u> ב-l.

<u>למה</u>:

תהיה קב' של קבוצות <u>קשירות</u> $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. ונניח כי: $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\neq\phi$.

אז: $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ <u>קשירה</u>.

<u>הוכחה</u>:

נניח כי: $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha = U\cup V$ איחוד זר של שתי קבוצות פתוחות ב-$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$. (כלומר: פירוק לא-קשירה) [אז ש-$U\neq\phi$ / אז $V\neq\phi$]

אז $A_\alpha = A_\alpha\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha) = A_\alpha\cap(U\cup V) = (A_\alpha\cap U)\cup(A_\alpha\cap V)$, כלומר זהו איחוד זר של שתי קב' פתוחות ב-A_α. וכיוון ש-A_α קשירה אז $A_\alpha\cap U=\phi$ או $A_\alpha\cap V=\phi$.

כלומר $A_\alpha\subseteq U$ או $A_\alpha\subseteq V$. נקבע $\alpha_0\in I$. נניח בה"כ ש-$A_{\alpha_0}\subseteq U$.

נראה כי לכל α, $A_\alpha\subseteq U$. בשלילה, אם יש $\alpha_0\neq\alpha$ עבורו $A_\alpha\subseteq V$ נקבל

ש-$A_\alpha\cap A_{\alpha_0}\subseteq U\cap V=\phi$, אבל $A_\alpha\cap A_{\alpha_0}\supseteq\bigcap_{\beta\in I}A_\beta\neq\phi$ סתירה!

ולכן $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=U$ ו-$V=\phi$.

<u>מסקנה</u>:

תהיינה קבוצות <u>קשירות</u> $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נניח שיש $\alpha_0\in I$ כך ש- $A_\alpha\cap A_{\alpha_0}\neq\phi$ לכל $\alpha\in I$.

אז $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ <u>קשירה</u>.

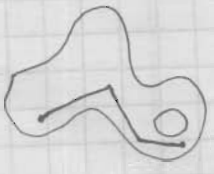
<u>קושיה</u>: תהיה קבוצת ישרים במישור, המכילה שני ישרים נחתכים. אז איחוד הישרים קשיר:
(לפחות 2)

נניח כי A_1,A_2 שני ישרים נחתכים מהקב'. אז כל ישר מהקב' או שהוא חותך את A_1 או שהוא חותך את A_2. נגדיר $\Sigma_i=\{$כל הישרים ב-Σ החותכים את $A_i\}$, $i=1,2$. אז $\bigcup_{A_\alpha\in\Sigma_i}A_\alpha$ קשירה $\forall\Sigma_i$ (לפי המסקנה)

ולכן גם $(\bigcup_{A_\alpha\in\Sigma_1}A_\alpha)\cup(\bigcup_{A_\alpha\in\Sigma_2}A_\alpha)$ קשירה (כאיחוד של שתי קב' קשירות $A_1\cap A_2\in\Sigma_1\cap\Sigma_2\neq\phi$)

19/11/09

מרוכבות - שיעור 7



משפט: (אפילו קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית)

תהא קב' פתוחה $\phi\neq U\subseteq\mathbb{C}$. אז U קשירה

$\Updownarrow$

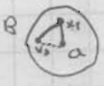
כל 2 נק' ב-U ניתנות לקישור ע"י קו שבור המוכל ב-U.

הוכחה:

(⇐) נניח כי U קשירה. נקבע $a\in U$. נגדיר:

$U_1=\{$כל הנקודות ב-U אשר ניתנות לקישור עם a ע"י קו שבור, המוכל כולו ב-U$\}$

ואז $U_2=U\setminus U_1$. $U_1\neq\phi$: כמובן $a\in U_1$ (לפי הגדרה), ויתרה מכך,



יהי B כדור פתוח סביב a המוכל ב-U. ברור כי גם $B\subseteq U_1$

כמובן $U=U_1\uplus U_2$, ונראה ש-U_1 ו-U_2 פתוחות.

<u>U_1 פתוחה:</u> נניח כי $z\in U_1$. כיוון ש-U פתוחה יש כדור פתוח B כך ש: $z\in B\subseteq U$. נראה כי $B\subseteq U_1$; נניח $z'\in B$ (ובפרט ב-U), נקשר את z ל-a ע"י קו שבור, המוכל ב-U (קיים כי $z\in U_1$), וכך נקבל קו שבור, המוכל ב-U, המחבר את z' ל-a, ולכן $z'\in U_1$ ולכן $B\subseteq U_1$ ולכן U_1 פתוחה.

<u>U_2 פתוחה:</u> נניח כי $z\in U_2$, ויהי B כדור פתוח כך $z\in B\subseteq U$. נראה כי $B\subseteq U_2$:

נניח בשלילה שלא, כלומר קיימת $z'\in B$ כך $z'\in U_1$, אז נקשר את z' ל-a ע"י קו שבור שמוכל ב-U, ואז נקשר את z ל-z' ע"י קטע שמוכל ב-B (ובפרט מוכל ב-U) ואז נקבל קו שבור המחבר את z ל-a, ולכן $z\in U_1$ בסתירה $\binom{z\in U_2}{\Rightarrow z\notin U_1}$, ולכן $B\subseteq U_2$, ולכן U_2 פתוחה.

לכן, כיוון ש-U קשירה, נקבל כי $U_2=\phi$ או $U_1=\phi$. כיוון ש-$U_1\neq\phi$ אז $U_2=\phi$.

ואז $U=U_1$, ולכן לכל $z,z'\in U$ נקשר את z ל-a, ואז את a ל-z' ע"י קוים שבורים המוכלים ב-U. ולכן כל 2 נק' ניתנות לקישור ע"י קו שבור ב-U. ∎

(⇒) נניח כי ל-U יש את התכונה הנ"ל. עלינו להוכיח כי U היא קשירה.

אז נניח בשלילה כי $U=A\cup B$ כאיחוד של שתי קבוצות <u>זרות</u>, לא ריקות, <u>פתוחות</u> ב-U.

נבחר $b\in B$, $a\in A$, ונקשר את a ל-b ע"י קו שבור המוכל ב-U.

ברור, ע"י מעבר בקודקודים של הקו השבור, שיש קטע בקו השבור שקצה אחד שלו

שייך ל-A, והקצה השני ל-B. נסמן אותו $[\alpha,\beta]$ כש- $\alpha\in A,\beta\in B$. $\left([a,b]=\{\alpha+t(\beta-\alpha):0\le t\le1\}\subseteq U\right)$

נגדיר $I_1=\{0\le t\le1:\alpha+t(\beta-\alpha)\in A\}$, $I_2=\{0\le t\le1:\alpha+t(\beta-\alpha)\in B\}$.

ברור כי $[0,1]=I_1\uplus I_2$ כאיחוד זר. נראה כי I_j פתוחות ב-$[0,1]$:

נניח כי $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים ב-I_1 המתכנסת ל-t. כמובן $0\le t\le1$.

אז $\alpha+t_n(\beta-\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha+t(\beta-\alpha) \in [\alpha,\beta]$ ב-A.

זוהי סדרת נק' מ-A המתכנסת לנק' (ב-$[\alpha,\beta]$) ב-U. כיוון ש-A סגורה ב-U,

אז גם $\alpha+t(\beta-\alpha)\in A$, כלומר $t\in I_1$. ולכן I_1 סגורה.

באותו אופן, I_2 סגורה. אבל $[0,1]$ הוא קשיר, ולכן $I_1=\phi$ או $I_2=\phi$.

אבל $t=0\in I_1$, $t=1\in I_2$, סתירה! לכן U קשירה. ∎

<u>מסקנה:</u> (מההוכחה)

יהי $U\subset\mathbb{C}$ פתוחה. אז U קשירה

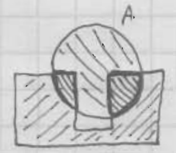
$\Updownarrow$

כל שתי נק' ב-U ניתנות לקישור ע"י קו שבור, מוכל ב-U, שצלעותיו מקבילות <u>לצירים</u>.

<u>מסקנה:</u>

עיגול פתוח, מלבן פתוח, משולש פתוח, מצולע פתוח, חצי מישור פתוח, רצועה פתוחה,

הן כולן קבוצות <u>קשירות</u>.



<u>הערה:</u> חיתוך של שתי קב' קשירות אינו בהכרח קשיר.

<u>למה:</u>

תהי A קשירה, אז לכל קב' B כך ש- $A\subseteq B\subseteq\bar{A}$

גם B <u>קשירה</u>.

<u>הוכחה:</u>

תהי $B=B_1\dot\cup B_2$ פירוק זר של שתי קב' פתוחות ב-B.

$$A = A\cap B = (\underbrace{A\cap B_1}_{\text{פתוחה ב-}A}) \dot\cup (\underbrace{A\cap B_2}_{\text{פתוחה ב-}A})$$

ומכיוון ש-A קשירה אז $A\cap B_1=\phi$ או $A\cap B_2=\phi$.

נניח בה"כ ש- $A\cap B_1=\phi$. נראה כי $B_1=\phi$: נניח בשלילה ש- $B_1\neq\phi$. יהי $b\in B_1$.

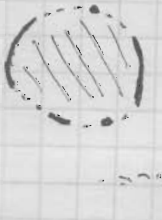
יהי $\underset{\mathbb{C},\text{כמובן}}{V\subseteq X}$ פתוחה כך ש- $B_1=B\cap V$. מכאן V היא סביבה של b.

כיוון ש- $b\in\bar{A}$ יש $a\in A\cap V$, ואז $a\in A\cap V \underset{A=A\cap B}{=} A\cap B\cap V = A\cap B_1 = \phi$ סתירה!

לכן $B_1=\phi$, לכן לא קיימות 2 קב' פתוחות וזרות (ולא ריקות) שאיחודן הוא B. לכן B קשירה. ∎

<u>דוגמאות:</u>

① $\left\{\begin{matrix}\text{תת קבוצה}\\ \text{של שפה}\end{matrix}\right\}\cup$ עיגול פתוח - קשיר.



② $A=\left\{z\in\mathbb{C}: \begin{matrix}1<\mathrm{Re}(z)\leq 2\\ |\mathrm{Im}\, z|\geq 5\end{matrix}\right\}\cup\{\infty\}$ - קשירה.

2 מלבנים

זה משנה את הקשירות

כאשר נוסיף

* נק' ה-∞ מקשרת בין 2 הקב'
(כי לא זרות - ∞ בסגורות)

כי למשל
$V=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\, z>0\}$ פתוחה
$(A_1\cup A_2)\cap V = A_1$

הגדרה: (מרכיב קשיר - connected component)

נתונה קב' $A \subseteq X$. תת קבוצה של A, שהיא קשירה מקסימלית

נקרא מרכיב קשיר של A.

משפט:

כל קבוצה A היא איחוד זר של המרכיבים הקשירים שלה.

הוכחה:

יהי $a \in A$. נסמן $B(a) = \left\{ C \subseteq A : \begin{matrix} a \in C \\ \text{קשירה } C \end{matrix} \right\}$. נסמן $C(a) = \bigcup_{C \in B(a)} C$

זוהי קב' קשירה כאיחוד של תתי קבוצות קשירות שחיתוכן אינו ריק (כי $a \in \bigcap_{C \in B(a)} C$).

$C(a)$ היא קב' קשירה מקסימלית, כי אם $C' \supseteq C(a)$ תת קב' קשירה של A,

אז ברור כי $C' \in B(a)$ ולכן $C' = \bigcup_{C \in B(a)} C = C(a)$ ומכאן $C' = C(a)$.

זה מראה שכל נק' מ-A שייכת למרכיב קשיר ($a \in C(a)$, ו- $C(a)$ נקרא מרכיב קשיר של a)

כמו כן, נראה שלכל שני מרכיבים קשירים C_1, C_2: או $C_1 = C_2$ או $C_1 \cap C_2 = \phi$.

נניח $C_1 \cap C_2 \neq \phi$. כיוון ש- C_1, C_2 קשירות, נסיק ש- $C_1 \cup C_2$ קשירה.

כיוון ש- C_1, C_2 קשירות מקסימליות ומוכלות בקב' הקשירה $C_1 \cup C_2$, נסיק $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$.
▨

למה:

יהי $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה, אז המרכיבים הקשירים של U הם קב' פתוחות.

הוכחה:

מקב' פתוחה U, לכל נק' $a \in U$ יש סביבה קשירה המוכלת ב-U, כי אם $a \in \mathbb{C}$

אז אפשר לקחת עיגול פתוח המכיל את a ומוכל ב-U, ועיגול פתוח הוא קשיר.

ואם $a = \infty$, ניקח קב' פתוחה $\infty \in V \subseteq U$. אז המשלים של V הוא קב' סגורה

וחסומה במישור, $F := V^c$. נניח כי $F \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$, ולכן:

$$V \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus F = \underbrace{\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}}_{\text{קשירה}} \cup \{\infty\} = \text{סביבה קשירה של } a = \infty$$

נק' הצטברות של חוץ העיגול

כלומר בכל מקרה קיימת

סביבה קשירה של a המוכלת ב-U. כעת, יהי $C_1 \subseteq U$ מרכיב קשיר.

יהי $a \in C_1$. יש סביבה קשירה $a \in B \subseteq U$. $B \cap C_1 \neq \phi$ כי a בחיתוך,

ולכן $B \cup C$ קשירה כאיחוד של שתי קב' קשירות לא זרות. כיוון ש- C_1 מרכיב

קשיר, וגם $C_1 \subseteq C_1 \cup B$, נסיק כי $C_1 = C_1 \cup B$, כלומר $B \subseteq C_1$.

לכן C_1 פתוחה. ▨

גבול של פונקציה:

הגדרה: נניח כי נתונה $f: L\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, ונניח כי $\overset{\mathbb{C}\cup\{\infty\}}{a}$ הוא נק' הצטברות של L.
נאמר כי $b\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ הוא גבול של $f(z)$ כאשר $z\in L$ שואף ל-a,
ונסמן $\lim_{L\ni z\to a} f(z)=b$ אם לכל סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq L$ המתכנסת ל-a
מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=b$.

הערה: הגבול יחיד.

למה:

נניח כי $b\in\mathbb{C}$. נסמן $f(z)=u(z)+iv(z)$ כש- $u(z)=\mathrm{Re}(f(z))$ ו- $v(z)=\mathrm{Im}(f(z))$.
נניח $b=b_1+ib_2$ כש- $b_1,b_2\in\mathbb{R}$. אז

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=b$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} u(z_n)=b_1 \quad \text{וגם} \quad \lim_{n\to\infty} v(z_n)=b_2 \qquad \forall L\ni z_n\to a.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{L\ni z\to a} u(z)=b_1 \quad \text{וגם} \quad \lim_{L\ni z\to a} v(z)=b_2$$

$$\left(\begin{matrix} z=x+iy \\ u(z)=u(x+iy)=\tilde{u}(x,y)\end{matrix}\right)$$

הערה: אם $b=\infty$, ההגדרה שקולה ל- $\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$.

הגדרה שקולה: $(\delta-\varepsilon)$

יהיו $a,b\in\mathbb{C}$, אם לכל $\varepsilon>0$, ק"מ $\delta>0$ כך:

$$\underset{z\in L}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |u(z)-b_1|<\varepsilon$$

$$\underset{z\in L}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |v(z)-b_2|<\varepsilon$$

אז נאמר כי b גבול של $f(z)$ כש- z שואף ל-a.

ובמילים: לכל $\varepsilon>0$, ק"מ $\delta>0$ כך ש: $\underset{z\in L}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon$

הערה: ⊙ אם $b=\infty$, $a\in\mathbb{C}$:

לכל $M>0$, ק"מ $\delta>0$ כך ש: $\underset{z\in L}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |f(z)|>M$

⊙ אם $b\in\mathbb{C}$, $a=\infty$:

לכל $\varepsilon>0$, ק"מ $R>0$ כך ש: $\underset{z\in L}{|z|>R} \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon$

⊙ אם $b=\infty$, $a=\infty$:

לכל $M>0$, ק"מ $R>0$ כך ש: $\underset{z\in L}{|z|>R} \Rightarrow |f(z)|>M$

תנאי שקול בעזרת סביבות (להגדרת הגבול)

לכל סביבה U של b, יש סביבה V של a,
כך ש: $z\in V\cap L \Rightarrow f(z)\in U$. (ובמילים אחרות: $V\cap L\subseteq f^{-1}(U)$)

הערה: הוכחת השקילות - שיעורי הבית.

10/11/08

מרוכבות - תרגול ג

קשירות

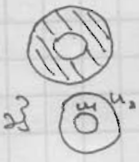
הגדרה: קבו' A (ב-$\mathbb{C}$ או $\hat{\mathbb{C}}$) תיקרא קשורה אם לא ניתן להציגה כאיחוד זר של שני קבו' פתוחות ב-A.

כלומר אין U_1, U_2 פתוחות ב-A כך ש- $U_1 \cap U_2 = \phi$ וגם $A = U_1 \uplus U_2$

שאלה: האם "נכון" ש-A קשורה, אבל ∂A לא קשורה?

תשובה: כן! אפשר לקחת למשל: | $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

$\partial A = \overset{U_1}{\{|z| = 1\}} \cup \overset{U_2}{\{|z| = 2\}}$



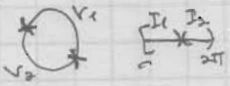
נראה ש-U_1, U_2 אכן מקיימים התנאים

רכיבי קשירות של ∂A: [מרכיב קשיר - תת קבוצה של ∂A קשורה מקסימלית לפי הכלה]

(*) **שלב I:** נראה שמעגל אכן קשיר. נסמן מעגל ברדיוס r סביב 0:

$T = \{r\cos\theta + ir\sin\theta \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$. נניח בשלילה שאינו קשיר, אז קיימות

$V_1, V_2 \neq \phi$ פתוחות (יחסית) ב-T כך ש- $T = V_1 \uplus V_2$. נסמן: $I_j = \{\theta \in [0, 2\pi) : r\cos\theta + ir\sin\theta \in V_j\}$
$j = 1, 2$



נראה ש-I_j סגורה ב-$[0, 2\pi)$:

אם $\{\theta_n\} \subseteq I_j$ כך ש-$\theta_n \to \theta$ אז: $\underbrace{r\cos\theta_n + ir\sin\theta_n}_{\in V_j} \xrightarrow{n\to\infty} r\cos\theta + ir\sin\theta$

אבל V_j סגורה ב-T, ולכן גם $r\cos\theta + ir\sin\theta \in V_j$. לכן $\theta \in I_j$.

מכיוון ש- $I_1 \cap I_2 = \phi$, וכן $I_1 \cup I_2 = [0, 2\pi)$, $I_1, I_2 \neq \phi$ ⇐ סתירה לקשירות $[0, 2\pi)$
(אשר הוכחנו באינפי)

⇐ מעגל הוא קשיר.

(*) **שלב II:** $\partial A = \underset{\{|z|=1\}}{T_1} \uplus \underset{\{|z|=2\}}{T_2}$, T_1, T_2 קשירות. נראה ש-T_1 פתוחה וסגורה ב-∂A:

- T_1 סגורה ב-∂A כי T_1 סגורה ב-$\mathbb{C}$ (לפי משפט מהכיתה גם בחיתוך)
- T_2 פתוחה ב-∂A כי $\underset{\partial A \setminus T_1}{T_2}$ סגורה ב-∂A (או שאפשר לקחת עיגול פתוח שמכיל אותה ולא חותך את T_2, למשל $\{|z| < \frac{3}{2}\}$)

(*) **שלב III:** נראה מקסימליות לפי הכלה:

עבור T_1: יהי S' רכיב הקשירות של ∂A ש-T_1 מוכל בו.

אז $S' = \underbrace{T_1}_{\text{פתוחה ב-}S'} \cup \underbrace{(S' \setminus T_1)}_{\text{פתוחה ב-}\partial A\text{ ולכן גם ב-}S'}$ (כאשר $S' \setminus T_1 = S' \cap (T_1)^c$)

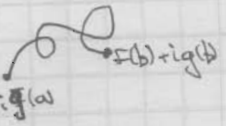
← סתירה לקשירות של S', אלא אם $S' \setminus T_1 = \phi$ ⇐ $S' = T_1$.

הערה: פירוק לקבו' שהן פתוחות - סגורות ב-B הוא פירוק לרכיבי קשירות של B.

הגדרה:

כל מסלול הוא קב' קשירה.

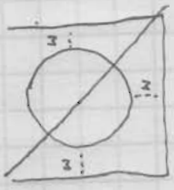
$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונ' רציפות. $\{f(t)+ig(t)\mid t\in[a,b]\}$ ← זה מסלול רציף.



הערה: הכיוון השני אינו נכון: קשירה היא לא בהכרח מסילתית.

דוגמא:

$$A=\{x+ix:\ x\in\mathbb{R}\}\cup\{z:|z|=2\}\cup$$
$$\cup\{z:Re(z)=3\}\cup\{z:|Im(z)|=3\}$$



זוהי קב' קשירה: כל הקב' במיקום הנ"ל קשירות.

כשצריך להוכיח שלא הוכח שכאלו צמודה, נקבל סתירה

יש חיתוך עם הקב' הקודמות ← כל מסלול מקושר - A קשירה (קב' קשירות עם חיתוך לא ריק)

תרגיל: הוכח את רכיבי הקשירות של $B=\{0\}\cup\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}(\cos\theta+i\sin\theta)\mid 0\le\theta\le 2\theta\}\})$

פתרון:

כל אחד מהמעגלים הוא רכיב קשירות, משום שהוא קשיר ויש לנסות כל קבוצה (סגורה שמכילה אותו ומעגלים אחרים.

נראה ש- $\{0\}$ הוא רכיב קשירות: יהי G רכיב קשירות שמכיל את $\{0\}$. אם $G\neq\{0\}$ אז יש $0\neq z\in G$.

מכאן $z\in B\setminus\{0\}$, כלומר קיים n כך ש: $|z|=\frac{1}{n}$.

ולכן $z\in T_{1/n}$ ($T_{1/n}=\{|z|=1/n\}$), אבל $T_{1/n}$ רכיב קשירות,

לכן $G=T_{1/n}$, אבל $T_{1/n}\not\ni 0$. ⊠

12/11/09

מרוכבות - שיעור 8

טענה: (שקילות הגדרות הגבול)

$f:L\to\mathbb{C}$, $\lim\limits_{\substack{z\to a\\ L}} f(z)=b$ $(a,b\in\mathbb{C})$ אזי ההגדרות הבאות שקולות:

① לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $\underset{z\in L}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon$

② לכל סביבה V של b קיימת סביבה V' של a

כך ש: $z\in V'\cap L \Rightarrow f(z)\in V$ (במילים: $f^{-1}(V)\supseteq V'\cap L$)

הוכחה:

($\Leftarrow$) יהי V סביבה של b.

אזי יש עיגול פתוח $B_{b,\varepsilon}$ סביב b ברדיוס ε כך ש: $B_{b,\varepsilon}\subseteq V$.

אזי יש $\delta>0$ כך ש: $\underset{z\in L}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon$.

ניקח $V'=B_{a,\delta}$, אז $f(V'\cap L)\subseteq B_{b,\varepsilon}\subseteq V$, כלומר $f(V'\cap L)\subseteq V$.

($\Rightarrow$) יהי $\varepsilon>0$, ונסמן $V=B_{b,\varepsilon}$. זוהי סביבה של b. אזי קיימת סביבה V' של a כך ש: $f(V'\cap L)\subseteq V=B_{b,\varepsilon}$. יהי $\delta>0$ כך ש: $B_{a,\delta}\subseteq V'$

אז $f(B_{a,\delta}\cap L)\subseteq f(V'\cap L)\subseteq B_{b,\varepsilon}$, כלומר $\underset{z\in L}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon$ ☑

רציפות

הגדרה: (רציפות)

נתונות קבוצות $A,B\subseteq X$ ונתון $f:A\to B$. נאמר כי f היא פונקציה רציפה

אם לכל קב' $V\subseteq B$ פתוחה ב-B מתקיים: $f^{-1}(V)$ פתוחה ב-A.

הגדרה: רציפות (נקודתית): יהי $a\in A$, אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$

כך ש: $\underset{z\in A}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |f(z)-f(a)|<\varepsilon$, כלומר $\lim\limits_{z\to a} f(z)=f(a)$

טענה:

2 הגדרות הרציפות שקולות.

הוכחה:

($\Leftarrow$) יהי W סביבה של $f(a)$, אז $V=W\cap B$ היא קב' פתוחה ב-B.

אזי $f^{-1}(V)$ פתוחה ב-A. כלומר $f^{-1}(V)=A\cap V'$ כאשר V' פתוחה,

והיא סביבה של a. כמו כן $f(A\cap V')\subseteq V\subseteq W$, ולפי הגדרת הגבול

בלשון סביבות $\lim\limits_{z\to a} f(z)=f(a)$.

($\Rightarrow$) נניח כי $\lim\limits_{z\to a} f(z)=f(a)$ לכל $a\in A$. יהי $W\subseteq B$ קב' פתוחה ב-B.

נניח כי $f^{-1}(W)$ פתוחה ב-A. נכתוב $W=B\cap V$. יהי $a\in f^{-1}(W)$,

לכן כאשר V פתוחה, היא סביבה של $f(a)$. יהי V' סביבה של a כך ש:

$F(V'\cap A)\subseteq V\cap B=W$. אז הראינו שלכל $a\in f^{-1}(W)$, יש קב' פתוחה ב-A, $V'\cap A$,

המכילה את a ומוכלת כולה ב-$F^{-1}(W)$. זה מראה ש-$F^{-1}(W)$ פתוחה ב-A. ◙

חשבון גבולות

גבול סכום / מכפלה / מנה (כשגבול המכנה $\neq 0$ ב-a) של פונקציות סב' a שווה לסכום / מכפלה / מנת הגבולות.

רציפות:
- סכום / מכפלת / מנת (מנה $\neq 0$) רציפות היא רציפה.
- הרכבה של רציפות - רציפה.
- למה: אם $F:A\to B$ רציפה, אז לכל תת קבוצה $C\subseteq A$, גם $F|_C:C\to A$ רציפה.
- למה: אם $F:A\to B$ רציפה, אז לכל תת $F(A)\subseteq D\subseteq B$ גם הפונק' $\tilde{f}:A\to D$ ע"י $\forall a.\ \tilde{F}(a)=F(a)$ רציפה.

דוגמא: $\frac{(3+5i)z^3-2z^2+i}{z^2+1}$ רציפה ב-$\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$

למה: אם $f(z)$ רציפה אז $|f(z)|$ רציפה (כי ראינו $z\mapsto|z|$ רציפה)

למה: $f(z)$ רציפה $\Longleftrightarrow$ $Re(z)$ ו- $Im(z)$ רציפות.

סימון: עבור $0\neq z\in\mathbb{C}$: $\operatorname{Arg}(z)=\overset{\text{הזווית היחידה}}{\{\theta\in\arg(z):-\pi\leq\theta<\pi\}}$

הערה: $z\mapsto \operatorname{Arg}(z)$ רציפה על $\mathbb{C}\setminus\{x\leq 0\}$.

משפט:

יהי $f:A\to B$ פונ' רציפה. נניח כי $C\subseteq A$ סגורה (ב-A) וחסומה, $(A,B\subseteq\mathbb{C})$

אז גם $f(C)$ סגורה (ב-B) וחסומה,

[כלומר: פונ' רציפה מעתיקה קבוצה קומפקטית אל קבוצה קומפקטית.]

הוכחה:

$f(C)$ סגורה ב-B; יהי $\{f(c_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתוך $f(C)$ המתכנסת ל- $b\in B$.

נראה כי גם $b\in f(C)$. כיוון ש-$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, יש לה תת סדרה מתכנסת $c_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}a$

כיוון ש-C סגורה ב-A, אז $a\in C$. מרציפות f: $f(c_{n_k})\xrightarrow{k\to\infty}f(a)$.

לכן $b=f(a)\in f(C)$. לכן $f(C)$ סגורה.

$f(C)$ חסומה: נניח בשלילה שאינה חסומה. אז יש סדרה $\{f(c_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ש $c_n\in C$ השואפת ל- ∞. כמו קודם, נקח תת סדרה מתכנסת $c_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty} a\in C$, אז $f(c_{n_k})\xrightarrow{k\to\infty} f(a)$, ולכן $f(a)=\infty$. סתירה. לכן $f($[illegible]$)$ חסומה ולכן קומ'.

משפט:

יהי $f:A\to B$ רציפה. נניח כי $C\subseteq A$ תת קבוצה סגורה וחסומה של A,

אז $f|_C$ היא פונ' רציפה במ"ש.

[רציפה במ"ש: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $z',z''\in C$:

$|z'-z''|<\delta \Rightarrow |f(z')-f(z'')|<\varepsilon$]

הוכחה: בש.ל.

משפט:

יהי $f:A\to B$ רציפה. נניח כי A קשירה,

אז גם $f(A)$ קשירה.

הוכחה:

נניח בשלילה $f(A)=B_1\cup B_2$ איחוד זר של שתי קב' פתוחות ב- $f(A)$.

$A=f^{-1}(f(A))=\underbrace{f^{-1}(B_1)}_{\text{פתוחה ב-A}}\dot{\cup}\underbrace{f^{-1}(B_2)}_{\text{פתוחה ב-A}}$, מכיון A קשירה ולכן או $f^{-1}(B_1)=\emptyset$

או $f^{-1}(B_2)=\emptyset$. נניח בה"כ ש- $f^{-1}(B_1)=\emptyset$,

אז $B_1=\emptyset$. לכן $f(A)$ קשירה. ☒

דוגמא: $\left\{\frac{2\log(t+1)}{t^2+1}+i\sin(5t^3)\ \middle|\ 0\le t\le 1\right\}$. [illegible] קשירה כי $[0,1]$ קשיר.

17/11/08

מרוכבות - שיעור 9

פרק ג׳: פונקציות אנליטיות (ומרוכבות)

הגדרה: (גזירות נקודתית)

תהי פונקציה $f(z)$ (עם ערכים מרוכבים) המוגדרת בסביבה של a (במישור).

נאמר כי f גזירה ב-a אם קיים (סופי) $f'(a) \underset{\text{סימון}}{=} \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$

תכונות הגזירות (כמו בממשים)

- סכום של פונקציות גזירות ב-a הוא גזיר ב-a, והנגזרת היא סכום הנגזרות.
- מכפלה של פונקציות גזירות ב-a היא גזירה ב-a, וכן כלל הנגזרת של מכפלה.
- מנת פונקציות $\frac{f(z)}{g(z)}$ גזירות ב-a אם $g(a)\neq 0$ גזירה ב-a, וכן כלל המנה.
- הרכבה - $f(g(z))$ כאשר g גזירה ב-a ו-f גזירה ב-$g(a)$ היא גזירה ב-a, וכן כלל השרשרת.

תרגיל:
- גזירות ב-a $\Longleftarrow$ רציפות ב-a.

הוכחה: $f(z)-f(a)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot(z-a)\xrightarrow[z\to a]{} f'(a)\cdot(a-a) \overset{\shortparallel}{0}$ ולכן רציפה.

- $f(z)=z^n$, n טבעי. גזירה במישור:

$$\frac{z^n-a^n}{z-a}=z^{n-1}+z^{n-2}a+z^{n-3}a^2+\dots+a^{n-1}\xrightarrow[z\to a]{}a^{n-1}+a^{n-1}+\dots+a^{n-1}=n\cdot a^{n-1}$$

ולכן $(z^n)'=nz^{n-1}$

מסקנה: פונקציה רציונלית $\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$, $g(z)$ פולינומים - גזירה בכל נקודה שבה המכנה לא מתאפס.

הערה: נניח $f(z)=u(z)+iv(z)$ עם $v(z)=\operatorname{Im}f(z)$, $u(z)=\operatorname{Re}f(z)$. ו- $z=\underset{\in\mathbb{R}}{x}+i\underset{\in\mathbb{R}}{y}$

נכתוב גם $u(z)=u(x,y)$, $v(z)=v(x,y)$.

נניח כי f גזירה בנק׳ $a=a_1+ia_2$. אז:

$$f'(a)\xleftarrow[z\to a]{}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{u(x,y)-u(a_1,a_2)+i(v(x,y)+v(a_1,a_2))}{\underbrace{(x-a_1)}_{h_1}+i\underbrace{(y-a_2)}_{h_2}}$$

$$=\frac{u(h_1+a_1,h_2+a_2)-u(a_1,a_2)+i(v(h_1+a_1,h_2+a_2)-v(a_1,a_2))}{h_1+h_2i}$$

נשאיף $h_1+ih_2 \to 0$. ונדרוך ציר x, כלומר: $h_2=0$, $h_1\to 0$.

נקבל: $\dfrac{u(h_1+a_1,a_2)-u(a_1,a_2)}{h_1}+i\,\dfrac{v(h_1+a_1,a_2)-v(a_1,a_2)}{h_1}$

ומכיון ש- קיים $\operatorname{Re} f'(z)=\lim\limits_{h_1\to 0}\dfrac{u(a_1+h_1,a_2)-u(a_1,a_2)}{h_1}$, $\operatorname{Im} f'(z)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(a_1+h_1,a_2)-v(a_1,a_2)}{h_1}$

ולכן קיימות $\frac{\partial u}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a)$, ומתקיים:

$$\boxed{f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)}$$

אם נקח כעת $h_1=0$, $h_2\to 0$ אז נקבל:

$$\frac{u(a_1,a_2+h_2)-u(a)}{ih_2}+\cancel{i}\,\frac{v(a_1,a_2+h_2)-v(a)}{\cancel{i}h_2}=\frac{v(a_1,a_2+h_2)-v(a)}{h_2}-i\cdot\frac{u(a_1,a_2+h_2)-u(a)}{h_2}$$

ומכיון כי קיימות $\frac{\partial u}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(a)$, ומתקיים:

$$\boxed{f'(a)=\frac{\partial v}{\partial y}(a)-i\frac{\partial u}{\partial y}(a)}$$

ומכאן כן נקבל את:

<u>משוואות קושי - רימן</u>:

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \hdashline \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{array}}$$

<u>דוגמאות</u>: ① $f(z)=z^n$ (n טבעי). נבדוק שמשוואות קושי-רימן מתקיימות:

$$(x+yi)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}(yi)^k=\Big(\sum_{2k\le n}(-1)^k\cdot\binom{n}{2k}x^{n-2k}y^{2k}\Big)+i\Big(\sum_{2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}\Big)$$

אז $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\sum\limits_{2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}(n-2k)x^{n-2k-1}y^{2k}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\sum\limits_{2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(2k+1)y^{2k}$

ושים לב ש- $\binom{n}{2k}(n-2k)=\dfrac{n!}{(2k)!(n-2k-1)!}$, $\binom{n}{2k+1}(2k+1)=\dfrac{n!}{(2k)!(n-2k-1)!}$

ואם $n=2m$ זוגי: הסכום הראשון $0\le k\le m$ ← האיבר האחרון מתאים ל- $k=m$ הוא 0

הסכום השני $0\le k\le m-1$ ✓

ואם $n=2m+1$ אי זוגי: ✓

ובאותו אופן אפשר לבדוק את המשוואות עבור של קושי-רימן.

② $f(z)=|z|^2$, F גזירה רק ב- $a=0$:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{|z|^2-|a|^2}{\underbrace{z-a}_{h}}=\frac{|h+a|^2-|a|^2}{h}\overset{*}{=}\frac{|h|^2+2\operatorname{Re}(h\cdot\bar a)+\cancel{|a|^2}-\cancel{|a|^2}}{h}=\bar h+\frac{h\bar a+\bar h a}{h}$$

$|h+a|^2=(h+a)\overline{(h+a)}$

$$=\underbrace{\bar h+\bar a}_{\xrightarrow{h\to 0}\bar a}+\underbrace{\frac{\bar h}{h}}\cdot a$$

לא קיים (בציר x / ציר y מקבלים)

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}}\frac{\bar h}{h}=1\ne -1=\lim_{h\in i\mathbb{R}}\frac{\bar h}{h}$$

$\dfrac{\overline{iy}}{iy}=\dfrac{-iy}{iy}=-1$

ולכן רק כש- $a=0$ הגבול קיים ושווה 0.

נבדוק איך זה מתבטא במשוואות קושי-רימן: $v(x,y)=0$, $|z|^2=|x+iy|^2=x^2+y^2=u(x,y)$

אז $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\iff 2x=0\iff x=0$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\iff -2y=0\iff y=0$

③ $f(z)=\bar{z}$ - לא גזירה בשום נקודה:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a}=\frac{\overline{(z-a)}}{z-a}=\frac{\bar{h}}{h}\longrightarrow$$ אין גבול כאשר $h\to0$

נבדוק את מה קורה לגבי משוואות קושי-רימן? $f(x+iy)=x-iy \Leftarrow v(x,y)=-y \text{ , } u(x,y)=x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq-1=\frac{\partial v}{\partial y}$$

④ משוואות קושי-רימן לא מספיקות לגזירות:

$f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}}{z} & z\neq0\\ 1 & z=0\end{cases}$ ← לא רציפה ב-$a=0$, ובפרט לא גזירה שם.

אבל משוואות קושי-רימן מתקיימות ב-$a=0$:

$$f(x+iy)=\frac{x-iy}{x+iy}=\frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\cdot\frac{-2xy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow u(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0)=0 \quad \checkmark \quad v(x,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(0)=0$$

$$v(0,y)=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(0)=0 \qquad u(0,y)=\frac{-y^2}{y^2}=-1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(0)=0$$

משפט:

$f(z)$ גזירה ב-a $\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longleftrightarrow}}$ $u(x,y)$, $v(x,y)$ דיפרנציאביליות ב-a ומקיימות את משוואות קושי-רימן ב-a

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח $f(z)$ גזירה ב-a. ראינו כבר ש- v,u גזירות חלקית ומקיימות את משוואות CR בנק' a. נסמן: $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a)+\alpha(z)$ כש- $\alpha(z)\xrightarrow[z\to a]{}0$

נסמן כמו קודם $z=x+iy$, $a=a_1+ia_2$: $\alpha(z)=\alpha_1(z_1)+i\alpha_2(z_2)=\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha_1(x,y)}+i\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha_2(x,y)}$

וראינו ש: $f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+\frac{\partial v}{\partial x}(a)$.

$$f(z)-f(a)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)\left((x-a_1)+i(y-a_2)\right)+\left(\alpha_1(x,y)+i\alpha_2(x,y)\right)\cdot\left(x-a_1+i(y-a_2)\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(a)(x-a_1)-\underset{\text{"קושי-רימן" }-\frac{\partial u}{\partial y}(a)}{\frac{\partial v}{\partial x}(a)}(y-a_2)+\underbrace{\alpha_1(x,y)(x-a_1)-\alpha_2(x,y)\cdot(y-a_2)}_{\delta_1(x,y)}+i\Big[\frac{\partial v}{\partial x}(a)(x-a_1)+\underset{\frac{\partial v}{\partial y}(a)}{\frac{\partial u}{\partial x}(a)}(y-a_2)+\underbrace{\alpha_2(x,y)(x-a_1)+\alpha_1(x,y)(y-a_2)}_{=\delta_2}\Big]$$

ולכן:

$$u(x,y)-u(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial u}{\partial y}(a)(y-a_2)+\delta_1(x,y)$$

כאשר $\frac{\delta_1(x,y)}{|z-a|}\xrightarrow{z\to a}0$

וגם

$$v(x,y)-v(a)=\frac{\partial v}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial v}{\partial y}(a)(y-a_2)+\delta_2(x,y)$$

כאשר $\frac{\delta_2(x,y)}{|z-a|}\xrightarrow{z\to a}0$

זה אומר ש- v,u דיפ' ב-a.

($\Rightarrow$) נניח ש- v,u דיפ' ב-a ומקיימות את משוואות CR ב-a.

$$u(x,y)-u(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial u}{\partial y}(a)(y-a_2)+\beta_1(x,y)(x-a_1)+\beta_2(x,y)(y-a_2) \Leftarrow$$ דיפרנציאביליות

כאשר $\beta_i(x,y)\xrightarrow{x+iy\to a}0$. וכנ"ל ל- v. ונלך על אותם צעדים כמו מקודם

רק מבחירה הפוכה. למשל נקבל

$$f(z)-f(a)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)\left((x-a_1)+i(y-a_2)\right)+$$

$$\left.+\beta_1(x,y)(x-a_1)+\beta_2(x,y)(y-a_2)+i[\gamma_1(x,y)(x-a_1)+\gamma_2(x,y)(y-a_2)]\right\}\xrightarrow{\text{נסמן}}\delta_1(z)(x-a_1)+\delta_2(z)(y-a_2)$$

כאשר $\beta_i(x,y)$, $\gamma_i(x,y)\xrightarrow{z\to a}0$

$$\Rightarrow\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)+\delta_1(z)\cdot\frac{x-a_1}{z-a}+\delta_2(z)\cdot\frac{y-a_2}{z-a}$$

כמו כן $\left|\delta_1(z)\cdot\frac{x-a_1}{z-a}\right|=|\delta_1(z)|\cdot\underbrace{\frac{|x-a_1|}{|z-a|}}_{\leq 1}\xrightarrow{z\to 0}0$, ובדומה $\left|\delta_2(z)\cdot\frac{y-a_2}{z-a}\right|\to 0$

ולכן ק"מ $\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$ $\boxtimes$

דוגמא: $f(z)=f(x+iy)=e^{x^2-y^2}(\cos(2xy)+i\sin(2xy))$ $\Leftarrow$ $\underbrace{u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)\ ,\ v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)}_{\text{גזירות ברציפות}}$

לכן צריך רק לבדוק CR:

$$\checkmark\ \left(\left(\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\cos(2xy)-e^{x^2-y^2}\cdot 2xy\cdot\sin(2xy)\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=e^{x^2-y^2}(-2y)\cdot\sin(2xy)+e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\cos(2xy)\end{aligned}\right.\right.$$

ובאותו אופן $\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\sin(2xy)+e^{x^2-y^2}\cdot 2y\cdot\cos(2xy)\overset{\checkmark}{=}-\frac{\partial u}{\partial y}$

⇐ אז המסקנה: גזירה (בכל המישור)

הגדרה: (פונקציה אנליטית)

יהי $f:U\to\mathbb{C}$, U פתוחה. אם f גזירה בכל נקודה של U, נאמר ש-f אנליטית (הולומורפית) ב-U.

הערה: הגדרה רק עבור קב' פתוחות, כי אנליטיות בנק' אחת אין טעם.

הגדרה: (תחום)
קבוצה פתוחה במישור
שהיא גם קשירה,
נקרא תחום (domain)

למה:

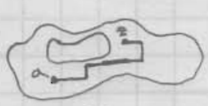
יהי f פונקציה אנליטית בתחום U. נניח $f'(z)=0$ $\forall z\in U$.

אז: f קבועה (על U)

הוכחה:

מסימון כנ"ל: $a\in U$: $0=f'(a)=\frac{\partial u}{\partial y}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$ $\overset{\text{CR-מ}}{\Leftarrow}$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$ בכל U, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ בכל U

⇐ v,u קבועות על כל ישר המקביל לאחד הצירים.



נקבע $a\in U$. לכל $z\in U$ אפשר לקשר את z ל-a ע"י קו שבור מוכל ב-U, שצלעותיו
(כי U תחום פתוח וקשיר)
מקבילות לאחד הצירים. כיוון ש-$v(x,y)$ רציפה בכל נק' של U וקבועה על כל אחת מצלעותיו
על הישר הנ"ל, נקבל: $v(z)=v(a)$. ובאותו אופן $u(z)=u(a)$. ולכן $f(z)=f(a)$ לכל $z\in U$ $\boxtimes$

דוגמאות: (פונקציות אנליטיות)

- הפונקציה e^z
- $f(z)=f(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$ ← $\left\{\begin{aligned}u(x,y)&=e^x\cos y\\ v(x,y)&=e^x\sin y\end{aligned}\right.$ רצ'.

ומשוואות CR: $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}$, וגם $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y=-\frac{\partial u}{\partial y}$. ✓ ולכן אנליטית.

ובנוסף הי׳א:
$$f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial y}(a)=e^x\cos y+ie^x\sin y\Big|_{z=a}$$
$$=f(a)$$

כלומר $f'(z)=f(z)$

- $f(z)$ מרחיבה את הפונ׳ e^x: $f(x+i\cdot 0)=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x$

ומתקיים:
$$f(z_1+z_2)=f((x_1+x_2)+i(y_1+y_2))$$
$$=e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right)$$
[illegible]
$$=e^{x_1}\cdot e^{x_2}(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)$$
$$=f(z_1)\cdot f(z_2)$$

$$\boxed{e^z=e^x(\cos y+i\sin y)}$$ לכן

מרוכבות - תרגול 5

17/11/09

רציפות

הגדרה: $f:A_{\subseteq\mathbb{C}}\to B_{\subseteq\mathbb{C}}$ רציפה אם לכל קב' U פתוחה ב-B, מתקיים ש-$f^{-1}(U)$ פתוחה ב-A.
(טופולוגיה יחסית)

הגדרה שקולה: לכל סדרה $\{a_n\}\subseteq A$, שמתכנסת לגבול $a_n\to a_{\in A}$ מתקיים $f(a_n)\xrightarrow{n\to\infty}f(a)$

למה: אם $f:A\to B$ רציפה,

אז מתקיים: (1) $C\subseteq A \Leftarrow$ $f|_C:C\to B$ רציפה.

(2) $f(A)\subseteq D\subseteq B \Leftarrow$ $f:A\to D$ רציפה.

הוכחה:

(1) יהי $U\subseteq B$ פתוחה ב-B, ונסתכל ב- $(f|_C)^{-1}(U)=\underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{פתוחה ב-A}}\cap C$ ולכן רציפה.
פתוחה ב-C

(2) לכל $U\subseteq D$ פתוחה ב-D יש V פתוחה ב-B כך ש- $U=D\cap V$.

ו- $f^{-1}(U)=f^{-1}(V\cap D)\underset{f(A)\subseteq D}{=}\underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{פתוחה ב-A}}$ ולכן רציפה. ∎

למה: אם $g:B\to C$, $f:A\to B$ שתי רציפות $(A,B,C\subseteq\hat{\mathbb{C}})$,

אז $g\circ f:A\to C$ רציפה.

הוכחה:

יהי $U\subseteq C$ פתוחה ב-C. אז $(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{פתוחה ב-B}})=$ פתוחה ב-A ∎

תרגיל:

$U\subseteq\mathbb{C}$ תחום (פתוחה וקשירה), ו- $f:U\to\mathbb{C}$ רציפה כך ש- $\forall z\in U.\ |f(z)^2-1|<1$

הוכח כי בדיוק אחד מהבאים מתקיים: (א) $|f(z)-1|<1$ לכל $z\in U$

(ב) $|f(z)+1|<1$ לכל $z\in U$

פתרון:

נשים: $|f(z)^2-1|=|f(z)-1|\cdot|f(z)+1|<1$, כלומר לכל $z\in U$: או $|f(z)-1|<1$

או $|f(z)+1|<1$. צ"ל [illegible] מתקיים לכל z (ולא לכל z פעם אחר מתקיים)

נגדיר: $V_1:=\{z\in U \mid |f(z)-1|<1\}$, $V_2:=\{z\in U \mid |f(z)+1|<1\}$.

ברור ש- $U=V_1\cup V_2$. מתקיים: $V_1=f^{-1}(\{w\in\mathbb{C}: |w-1|<1\})=f^{-1}(\underset{\text{כדור פתוח 1 ברדיוס } z_0=1}{B_1(1)})$

ובאופן דומה $V_2=f^{-1}(B_1(-1))$, והכדורים זרים ולכן $V_1\cap V_2=\emptyset$.

f רציפה, הכדורים פתוחים $\Leftarrow$ V_1,V_2 פתוחות. מאחר ש-U קשירה,

$V_1=\emptyset$ או $V_2=\emptyset$. ∎

אנליטיות

הגדרה: $f: U \to \mathbb{C}$ נקראת אנליטית אם קיים (סופי) $\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ לכל $z\in U$.
תחום (פתוח, קשיר)

טענה: אם נגזור בכיוון $h\in\mathbb{R}$, ונכתוב $f=u+iv$, אז:

$$\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{(u+iv)(x+h,y)-(u+iv)(x,y)}{h}=u_x+iv$$ כשמתקדמים בציר x

ואם נגזור לפי ih, $h\in\mathbb{R}$:
$$\frac{u_y+iv_y}{i}=v_y-iu_y \qquad \lim_{h\to 0}\frac{(u+iv)(x,y+h)-(u+iv)(x,y)}{ih}$$ מתקדמים בציר y

← משוויון הגבולות (כי הגבול מוגדר) נקבל: $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ משוואות CR - קושי-רימן

תרגיל:

(א) הוכח כי אם $f(z)$ אנליטית, אז גם $\overline{f(\bar z)}$ אנליטית.

(ב) האם $f(\bar z)$ אנליטית?

פתרון: (ב) לא. $f(z)=\bar z$ לא אנליטית, $f(z)=z$ כן.

(א) הוכחנו שאם u,v גזיר' ומקיימות קושי-רימן, אז $u+iv$ אנליטית.

נסמן $g(z)=\overline{f(\bar z)}$: $f(\bar z)=\overset{u(x,-y)}{\cancel{}}+iv(x,-y) \leftarrow f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

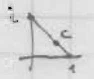
← $\overline{f(\bar z)}=u(x,-y)-iv(x,-y)$, כלומר $g(z)=\tilde u+i\tilde v$ כאשר $\tilde u(x,y)=u(x,-y)$, $\hat v(x,y)=-v(x,-y)$

וכיוון ש-u,v גזיר', כך גם $\tilde u,\tilde v$. כעת מספיק לבדוק קושי-רימן:

$$\tilde u_x(x,y)=u_x(x,-y)$$
f אנליטית $\longrightarrow \parallel$
$$\tilde v_y(x,y)=v_y(x,-y)$$

ובאופן דומה: $\hat u_y=-v_x$.

דוגמא: נראה שעבור הפונקציה $f(z)=z^3$ לא קיימת נק' c בקטע בין $z_0=1$ ל-$z_1=i$ כך ש- $f(z_1)-f(z_0)=f'(c)\cdot(z_1-z_0)$.



הוכחה: צריך שיתקיים $3c^2=\frac{1+i}{1-i}\overset{\text{ישיר}}{=}i \Longleftarrow 1^3-i^3=\underbrace{f'(c)}_{3c^2}\cdot(1-i)$.

אז $c=t\cdot 1+(1-t)i$ עבור $t\in[0,1]$. נציב בשוויון: $3(t+(1-t)i)^2=i$

$$3(t^2+2t(1-t)i-(1-t)^2)=i \Rightarrow 3(1-2t+2t(1-t)i)=i \Rightarrow \begin{cases}2(1-2t)=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}\\ 6t(1-t)=1\end{cases}$$

אבל עבור $t=\frac{1}{2}$ נקבל סתירה ב-II ולכן אין פתרון משותף. ∎

מרוכבות - שיעור 10

19/11/09

תכונות: עבור $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin x)$: $(e^z)'=e^z$ ①, $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ ②.

$$e^{x+iy}=e^x\cdot \underbrace{e^{iy}}_{\cos y+i\sin y\ (y\in\mathbb{R})}$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}}=i \Rightarrow e^{\pi i}=-1 \rightarrow e^{2\pi i}=1$$

$\forall z.\ e^z\neq 0$ ③, $|e^z|=e^x=e^{Re(z)}>0$ ④

הערה: $g'(z)=g(z)$ מתקיים בכל המישור, קבעו את $g(z)$ עד כדי קבוע:

כלומר $g(z)=c\cdot e^z$. הוכחה:

אז $F(z)=\frac{g(z)}{e^z}=$ מנת שתי גזירות (מכנה $\neq 0$) $\Longrightarrow F'(z)=\frac{g'(z)e^z-g(z)(e^z)'}{(e^z)^2}=\frac{g(z)e^z-g(z)e^z}{e^{2z}}=0$

נסיק כי $F(z)=c$ קבועה בתחום, כלומר: $g(z)=c\cdot e^z$.

הערה: $|e^z|=e^{Re(z)}$ ולכן אם $Re(z)=x_0$ אז $|e^z|=e^{x_0}$ נמצא על המעגל ברדיוס e^{x_0} סביב הראשית. חצי המישור $Re(z)>x_0$ עובר ל- $\{s\in\mathbb{C}: |s|>e^{x_0}\}$ - חוץ של המעגל.

חצי המישור $Re(z)<x_0$ עובר ל- $\{s\in\mathbb{C}: |s|<e^{x_0}\}$.

תרגיל: פתרון המשוואה $w=e^z$ $(w\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ ע"פ השוואת ערך מוחלט:

$$|w|=e^{Re(z)} \Longrightarrow Re(z)=\log_e|w|=\ln|w|$$

$z=x+iy$, אז $x=\log|w|$. וכן מתקיים $e^z=e^{x+iy}=\underbrace{e^x}_{=|w|}\cdot e^{iy}=w$ לכן $e^{iy}=\frac{w}{|w|}$.

נכתוב $\frac{w}{|w|}=\cos\theta+i\sin\theta$ ונקבע θ.

נרצה ש- $\cos y+i\sin y=\cos\theta+i\sin\theta \Longleftrightarrow y=\theta+2n\pi\in\arg(w)$,

ולכן יש אינסוף פתרונות ל- $e^z=w$, והם $z=\log|w|+i\cdot\arg(w)$ (כי e^z מחזורית; $e^{z+2\pi i}=e^z$)

* השאלה היא: האם אפשר לבחור את הפתרון z בפונקציה רציפה של w?

הגדרה: (ענף של לוגריתם)

פונקציה רציפה $F(z)$ בתחום U נקרא ענף של לוגריתם

אם $e^{F(z)}=z$ בתחום U.

למה:

יהיו $F(z)$ ו- $g(z)$ שני ענפים של לוג בתחום U,

אז יש $n\in\mathbb{Z}$ כך ש: $\forall z\in U.\ g(z)=F(z)+2n\pi i$

__הוכחה:__

נשים לב כי $e^{f(z)+2\pi n i} = e^{f(z)}\cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{1} = e^{f(z)} = z$, ומהנחה שלנו $e^{g(z)} = e^{f(z)} = z$.

לכן לכל z מתקיים $g(z), f(z) \in \log|z| + i\cdot\arg(z)$. לכן $n(z) = \frac{g(z)-f(z)}{2\pi i}$ הוא רציפה

מ-U אל $\mathbb{Z}$. כיוון ש- $n(U)$ קשירה ומוכלת ב- $\mathbb{Z}$, אז $n(U)=\{n\}$

ו- $\forall z\in U.\ g(z) = f(z) + 2n\pi i$. ∎

__דוגמא:__ $U = \mathbb{C}\setminus\{x\le 0\}$. נסמן ב- $\text{Arg}(z)$ (כלומר הזווית היחידה ב- $(-\pi,\pi)$

הארגומנט ב- $z\in U$) היא רציפה. לכן $z \mapsto \log|z| + i\,\text{Arg}(z)$ היא ענף של

הלוג ב-U. זה נקרא __הענף הראשי__ של הלוג. זוהי הרחבה של $x\mapsto \log x$ ל- $\{x\in\mathbb{R}, x>0\}$

__סימון:__ הענף הראשי של הלוג: $\boxed{\text{Log}\, z} = \log|z| + i\,\text{Arg}(z)$

__למה:__

תהי f רציפה בנק' a (ומוגדרת בסביבה שלה), ותהי g גזירה ב- $f(a)$ (ומוגדרת בסביב

כך ש- $g'(f(a)) \neq 0$. נניח כי $g(f(z)) = z$ בסביבה של a,

אז גם f __גזירה ב-a__, ומתקיים: $\boxed{f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}}$

__הוכחה:__

$$\frac{\overbrace{g(f(z))}^{z} - \overbrace{g(f(a))}^{a}}{f(z)-f(a)} \xrightarrow{z\to a} g'(f(a))$$

לכן $\frac{z-a}{f(z)-f(a)} \longrightarrow g'(f(a))$ לכן $f'(a) \Leftarrow \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \to \frac{1}{g'(f(a))}$

∎

__מסקנה:__ לכן אם f ענף של הלוג בתחום U היא גזירה ב-U,

$$f'(z) = \frac{1}{e^{f(z)}} = \frac{1}{z}$$

__הערה:__ לא נכון ש- $\log(z_1 z_2) \overset{?}{=} \log(z_1)+\log(z_2)$. נכון עבור הלוגים רק

שוויון מודולו $2\pi i$. לדוגמא:

$$\text{Log}\, i = \log|i| + i\,\text{Arg}\, i = \frac{i\pi}{2}$$

$$+\ \underline{\text{Log}(-1+i) = \log|-1+i| + i\,\text{Arg}(-1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Log}(i\cdot(-1+i)) = \text{Log}(-1-i) = \frac{1}{2}\log 2 - i\cdot\frac{3\pi}{4}$$

ענף אחר: $U = \mathbb{C}\setminus\{x\ge 0\}$. כאן מתקיים $0<\arg(z)<2\pi$, וזה הוא ענף על U.

$\log z = \log|z| + i\cdot\arg(z)$. לדוגמא אם $z=-x$ ו- $x>0$, אז $\boxed{\log(-x) = \log x + \pi i}$

מרוכבות - שיעור 11

24/11/09

תזכורת

טענה: אין ענף של לוג ב- $U\setminus\{a\}$ כאשר U תחום.

הוכחה: נניח כי אפשר להגדיר כי U הוא עיגול פתוח קטן סביב הראשית. (בשלילה, נניח שקיים ענף $F(z)$). $U'=U\setminus\{x\in\mathbb{R}: x\le a\}$. כמו כן קיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש- $F(z)=\operatorname{Log} z+2\pi ni$ $(z\in U')$

אז $F(z)=\log|z|+i\operatorname{Arg} z+2\pi ni$ אז $\operatorname{Arg} z=\frac{F(z)-\log|z|-2\pi ni}{i}$. $\forall z\in U'$.

יהי $a<c$ ב-U. ניקח $z\to a$ ב-U'. מחד, כי F רציפה יש גבול כאשר $U'\ni z\to a$:

$\exists \lim_{U'\ni z\to a}\frac{F(z)-\log|z|-2\pi ni}{i}$, אבל ידוע כי קיים $\lim_{U'\ni z\to a}\operatorname{Arg} z$ וזה לא נכון. סתירה! ∅

פונקציית חזקה:

$f(z)=z^b$ $(b\in\mathbb{C})$, כהגדרה: $z^b:=e^{b\cdot\log z}$.

אם תחום U שבו מוגדר ענף של לוג, נסמן ב- $\log z$ (כאשר $0\notin U$).

אז נקבל ענף של z^b ב-U (לדוגמה: $\sqrt{z}=z^{\frac12}=e^{\frac12\log z}$).

הענף הראשי: $z^b=e^{b\operatorname{Log} z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{x\le 0\}$.

אם b שלם אז z^b יש רק ערך אחד לכל ענף של הלוג, כי אם $f_1(z), f_2(z)$ הם שני ענפים של הלוג (בתחום נתון U) אז $f_2(z)=f_1(z)+2\pi ni$ לכל $z\in U$ $(n\in\mathbb{Z})$.

$$z^b=e^{bf_2(z)}=e^{bf_1(z)+2\pi bni}=e^{bf_1(z)}\cdot\underbrace{e^{2\pi bni}}_{1}=e^{bf_1(z)}$$

אם b רציונלי: $b=\frac{m}{n}$ שבר מצומצם. אז ל- $z^{\frac{m}{n}}$ יש n ענפים שונים.

כמו קודם, לכל ענף של הלוג:

$$z^{\frac{m_0}{n_0}}=e^{bf_2(z)}=e^{bf_1(z)}\cdot\underbrace{e^{2\pi i\cdot\frac{m_0}{n_0}\cdot n}}_{\underbrace{e^{2\pi ikn}}_{1}\cdot e^{\frac{2\pi il}{n_0}}}$$

כש- $0\le l<n_0$, $\frac{n}{n_0}=k+\frac{l}{n_0}$

דוגמה: נחשב את $\sqrt{-1+i}$ לפי הענף הראשי של $\sqrt{z}$.

$$e^{\frac12\operatorname{Log}(-1+i)}=e^{\frac12(\log\overset{\sqrt2}{|-1+i|}+i\operatorname{Arg}(-1+i))}=e^{\frac12(\log\sqrt2+i\cdot\frac{3\pi}{4})}=\sqrt[4]{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{8}i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

מתקיים גם כי $z^{b_1+b_2}=z^{b_1}\cdot z^{b_2}$, אבל $(z_1z_2)^b\ne z_1^b z_2^b$, $(z^u)^v\ne z^{uv}$
$((e^u)^v\ne e^{uv}$:גם$)$

z^b מוגדרת בתחום U היא אנליטית ב-U.

$$z^b=e^{b\log z}\Rightarrow (z^b)'=(e^{b\log z})'=e^{b\log z}\cdot\frac{b}{z}=bz^{b-1}$$

הפונקציות הטריגונומטריות

ל- $x\in\mathbb{R}$: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ $\left(e^{\bar z}=\overline{(e^{z})}\right)$

נחבר ונחסר את 2 המשוואות ונקבל:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x&=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{aligned}}\quad x\in\mathbb{R}$$

לכל z נגדיר ב- $z\in\mathbb{C}$: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ ← פונקציות אנליטיות

וברור ש: $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(z+2\pi)=\cos(z)$, $\sin(z+2\pi)=\sin(z)$

$\cos^2 z+\sin^2 z = 1$ ← $1 = \frac{4}{4} = \frac{\cancel{e^{2iz}}+2+\cancel{e^{-2iz}}}{4} - \frac{\cancel{e^{2iz}}-2+\cancel{e^{-2iz}}}{4}$ = מ.ש.ל.

$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v$, $\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v$

נגזרות: $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$ ← $\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^{iz}\cdot i+e^{-iz}\cdot(-i))$

← $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ $\qquad = \frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz}) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{-2i} = -\sin z$

דוגמא: נפתור $\sin z = 2$, כלומר $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2$ ⇐ $e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}} = 4i$

ולכן $(e^{iz})^2-4i\cdot e^{iz}-1=0$ ⇐ $e^{iz} \underset{\text{נוסחת השורשים}}{=} (2\pm\sqrt{3})i$ ⇐ $iz = \log(2\pm\sqrt{3})i$

⇐ $iz = \log(2\pm\sqrt{3})+i\cdot\arg\left((2\pm\sqrt{3})i\right)$ ⇐ $iz = \log(2\pm\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)$ $\underset{(n\in\mathbb{Z})}{\Leftarrow}$ $z = \frac{\pi}{2}+2\pi n - i\log(2\pm\sqrt{3})$

טורים מרוכבים

התכנסות

הגדרה: טור מרוכב $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס (לאיבר ב-$\mathbb{C}$) אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת: $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$.

תנאי הכרחי להתכנסות הוא: $z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (כי $z_n = S_n - S_{n-1} \to S-S = 0$ אם $S_n \to S$)

התכנסות בהחלט

הגדרה: טור מרוכב $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס.

טענה: • טור מתכנס בהחלט הוא מתכנס.

• נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, אז נראה ש- $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי:

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=1}^{m} z_k\right| \underset{n\ge m}{=} \left|\sum_{k=m+1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

לכן $S_n - S_m \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. וכיוון ש- $\{S_n\}$ סדרת קושי, היא מתכנסת.

גבול נקודתי

הגדרה: נניח כי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות המוגדרות בקבוצה U . אם לכל $z\in U$

קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(z) =: f(z)$, אז $f(z)$ היא פונקציה ב-U גם כן.

זה הגבול הנקודתי של $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ על U . $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

התכנסות במ"ש

הגדרה: נאמר כי $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ במ"ש ב-U , אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי כך ש:

$|f_n(z)-f(z)| \le \varepsilon$ $\forall z\in U$, $\forall n\ge N$.

מרוכבות - תרגול 6

24/11/08

משפט:

$U\subseteq\mathbb{C}$ תחום, $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית. נניח $f'(z)=0$ לכל $z\in U$,

אזי f קבועה.

למה:

$U\subseteq\mathbb{C}$ תחום, $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית ו- $f(U)\subseteq\mathbb{R}$,

אזי f קבועה.

הוכחה:

יהי $a\in U$. $\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{h}_{\in\mathbb{R}}}=f'(a)$ ולכן $f'(a)\in\mathbb{R}$.

ומצד שני $\lim_{\mathbb{R}\ni y\to 0}\frac{\overbrace{f(a+iy)-f(a)}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{iy}_{\in i\mathbb{R}}}=f'(a)$ ולכן $f'(a)\in i\mathbb{R}$.

לכן מתקיים $f'(a)\in\mathbb{R}\cap i\mathbb{R}=\{0\}$
לכל $a\in U$, $f'(a)=0$ $\Rightarrow$
לכן f קבועה
(מהמשפט)

הגדרה: (פונקציה הרמונית)

יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ תחום, $u:D\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות.

u נקראת הרמונית אם $u_{xx}+u_{yy}=0$ בכל התחום D.

משפט:

יהי D (ב-$\mathbb{C}$) תחום: **(1)** אם f אנליטית ב-D (מ-D ל-$\mathbb{C}$), $f=u+iv$, אז u,v - פונ' הרמוניות (מ-D ל-$\mathbb{R}$).

(2) אם u פונ' הרמונית ב-D (מ-D ל-$\mathbb{R}$), אז קיימת v (הרמונית צמודה ל-u) כך ש- $u+iv$ פונ' אנליטית ב-D.

הוכחה: (את (2) נוכיח: עבור D - עיגול, מלבן)

(1) מקיימת משוואות קושי רימן: $u_x=v_y$, $u_y=v_x$.

$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0 \quad \square$$

(2) D עיגול שמרכזו (a,b). צריך לפתור (עבור v) מערכת משוואות דיפרנציאליות:

(קושי-רימן + רציפ' ⇐ גזירות מרוכ' ⇐ אנליטיות)

$$\begin{cases} v_y(x,y)=u_x(x,y) & \text{I} \\ v_x(x,y)=-u_y(x,y) & \text{II}\end{cases}$$

מ-I נובע כי (אינטגרציה ב-y):

$$v(x_0,y_0)=\int_b^{y_0}v_y(x_0,y)dy+h(x_0)$$

$$=\int_b^{y_0}u_x(x_0,y)dy+h(x_0)$$ → מצאנו כמעט את v

נגזור לפי x_0:

$$\overbrace{V_x(x_0,y_0)}^{-u_y(x_0,y_0)\ \overset{\text{רוצים}}{=}}=\int_b^{y_0}u_{xx}(x_0,y)dy+h'(x_0)\overset{u_{xx}=-u_{yy}}{=}-\int_b^{y_0}u_{yy}(x_0,y)dy+h'(x_0)$$

$$=-u_y(x_0,y_0)+u_y(x_0,b)+h'(x_0)$$

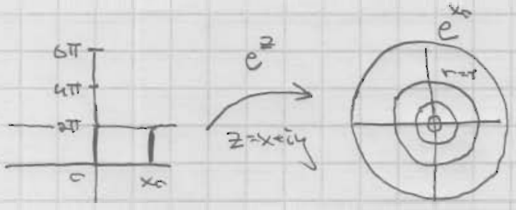
נרצה לבחור h כך ש- $h(x_0)=-u_y(x_0,b)$, לכן $h'(x_0)=-\int_a^{x_0}u_y(x,b)dx$

ולסיכום קיבלנו $V(x_0,y_0)=\int_b^{y_0}u_x(x_0,y)dy-\int_a^{x_0}u_y(x,b)dx$. כלומר,

מצאנו את u כך שמקיים את משוואות CR עם u, לכן u+iv אנליטית

(במישור כולו זה רק פשוט) ∅

פונקציות לוגריתמיות וטריגונומטריות



$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

ענף ראשי של הלוג (Log):

מוגדר ע"י $Arg\ z\in(-\pi,\pi)$.

$$\text{"}\log\text{" } z=\log|z|+i\text{"}\arg\text{"}(z)$$

תרגיל: מצא ענף להפוכה ל- $\sin z$.

פתרון: $e^{iz}-2iW-e^{-iz}=0 \Leftarrow 2iW=e^{iz}-e^{-iz} \Leftarrow W=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

נכפול ב- e^{iz} : $(e^{iz})^2-2iWe^{iz}-1=0$ ואז $e^{iz}=\frac{2iW\pm\sqrt{-4W^2+4}}{2}=iW\pm\sqrt{1-W^2}$

נבחר ענף ראשי של $\sqrt{1-W^2}$, כלומר, $\sqrt{1-W^2}=e^{\frac{1}{2}Log(1-W^2)}$.

נבדוק מתי $1-W^2\le 0$ (נוריד חתכים): נסמן $W=x+iy$ ונקבל:

$$\Leftarrow 1-(x+iy)^2=1-x^2+y^2-2xyi\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2+y^2\le 0\\ xy=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\ 1\le x^2\end{cases}$$

לכן נוריד מהתחום את $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\subseteq\mathbb{R}$.

קיבלנו שהפתרון הכללי הוא: $e^{iz}=iW+\sqrt{1-W^2}$. נקבל סופית $iz=\text{"}\log\text{"}(iW+\sqrt{1-W^2})$.

אבל, נקח את הענף הראשי. נרצה ש- $Re(iW+\sqrt{1-W^2})>0$, ולכן הענף הראשי יתן:

$$Re(\sqrt{1-W^2})=Re(e^{\frac{1}{2}Log(1-W^2)})=Re(e^{\frac{1}{2}\log|1-W^2|}\cdot e^{\frac{i}{2}Arg(1-W^2)})$$

$$=\sqrt{|1-W^2|}\cdot\cos\left(\frac{Arg(1-W^2)}{2}\right) = \sqrt{|1-W^2|}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos(Arg(1-W^2))}{2}} = \dots$$

$\cos(\frac{\alpha}{2})=\textcircled{$\pm$}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\cos(Arg(a))=Re(\frac{a}{|a|})$ לפי הגדרה

ובתחום של $-\pi<\alpha<\pi$

$\cos\frac{\alpha}{2}>0 \Leftarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$

26/11/09

מרוכבות - שיעור 12

הטור הגיאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מקיים $\sum_{k=0}^{n-1} z^n = \frac{z^n-1}{z-1}$ וגם $\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = \frac{|z|^n-1}{|z|-1}$

לכן כאשר $|z|<1$ הטור מתכנס בהחלט ל- $\frac{1}{1-z}$, ועבור $|z|\ge 1$ הטור לא מתכנס (כי $z^n \not\to 0$)

משפט: (רדיוס התכנסות)

יהי טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (מקדמים מרוכבים, סדרה $\{a_n\}$), אז קיים $0\le R\le\infty$ כך ש:

(1) הטור מתכנס בהחלט בכל $|z-z_0|<R$. [דיסק פתוח]

(2) אם $0<r_0<R$ אז הטור מתכנס במ״ש בעיגול הסגור $|z-z_0|\le r_0$ [דיסק סגור]

(3) אם $|z-z_0|>R$ אז הטור לא מתכנס.

הוכחה:

נגדיר R ע״י $\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (נוסחת קושי-הדמר), [אם הגבול $0=$ $\Leftarrow$ $R=\infty$, וא״ז $\infty=$ $\Leftarrow$ $R=0$]

אפשר להניח כי $z_0=0$ (אחרת נסמן $\zeta=z-z_0$).

(1) נניח כי $0<R\le\infty$. נניח $|z|<R$. אזי

$\overline{\lim}\, c_n = \inf\{\sup_{k\ge n} c_k\}_{n=1}^{\infty}$

$= \lim_{n\to\infty}\{\sup_{k\ge n} c_k\}$ = הגדול ביותר של כל הגבולות החלקיים של $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$

נבחר $|z|<r<R$. אז $\frac{1}{r}>\frac{1}{R}=\inf\{\sup_{k\ge n}\sqrt[k]{|a_k|}\}_{n=1}^{\infty}$, ולכן קיים N כך ש- $\sup_{k\ge n}\sqrt[k]{|a_k|}<\frac{1}{r}$

ולכן $\sqrt[k]{|a_k|}<\frac{1}{r}$ לכל $k\ge N$. כלומר לכל $n\ge N$: $|a_n|<\frac{1}{r^n}$, ואז:

$|a_n z^n| < \frac{|z|^n}{r^n}=\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$. וכיוון ש- $\frac{|z|}{r}<1$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ מתכנס,

ולכן גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|$ מתכנס.

(2) נניח כי $|z|\le r_0<R$. נבחר $r_0<r<R$ ונחזור על ההוכחה של (1) ל- $|z|\le r_0$ (במקום $|z|<r$). נקבל שקיים N כך שלכל $n\ge N$: $|a_n z^n|<\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \underset{\text{לכל } |z|\le r_0}{\le}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n$

ולכן לכל $|z|\le r_0$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ מתכנס (בהחלט) במ״ש,

כי $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n$ הוא טור (גיאומטרי) מתכנס ($0<\frac{r_0}{r}<1$)

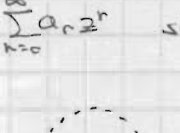
(3) נניח כי $0\le R<\infty$. נניח כי $|z|>R$. נבחר $|z|>r>R$.

אז $\frac{1}{r}<\frac{1}{R}=\inf\{\sup_{k\ge n}\sqrt[k]{|a_k|}\}_{n=1}^{\infty}$, ולכן לכל n מתקיים: $\frac{1}{r}<\sup_{k\ge n}\sqrt[k]{|a_k|}$, ואז לכל

n קיים $k_n\ge n$ כך ש- $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|}>\frac{1}{r}$ ולכן $|a_{k_n}|>\frac{1}{r^{k_n}}$ ולכן $|a_{k_n}z^{k_n}|>\left(\frac{|z|}{r}\right)^{k_n}\xrightarrow[(k_n\to\infty)]{n\to\infty}\infty$ ש- $\frac{|z|}{r}>1$

ולכן בפרט $a_n z^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ ואז $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ לא מתכנס.

$\boxtimes$ (משפט)



$$\boxed{\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

מרוכבות - שיעור 13

1/12/09

תזכורת: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, R = רדיוס ההתכנסות.

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left((z-z_0)^n\right)^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_k\cdot n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}\underset{z=z_0\text{ נציב}}{\Longrightarrow}f^{(k)}(z_0)=a_k\cdot k!$$

$$\Longrightarrow\boxed{a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}_{k=0,1,2,\ldots}$$

מסקנה:

יהיו שני טורי חזקות $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n}_{f(z)}$, $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n}_{g(z)}$ סביב z_0 , שלהם רדיוסי התכנסות R_1, R_2 בהתאמה. יהי r כך שבסביבה קטנה סביב z_0 ($|z-z_0|<r$ עם $r\le R_1,R_2$)

מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ (לכל z בסביבה $|z-z_0|<r$),

אז $a_n=b_n\quad\forall n.$

הוכחה:

נתון ש- $f(z)=g(z)$ לכל $|z-z_0|<r$, אז גם $f^{(k)}(z)=g^{(k)}(z)$ לכל $|z-z_0|<r$,

ולכן $f^{(k)}(z_0)=g^{(k)}(z_0)$ לכל $k\ge0$, ולכן $a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}=b_k$ לכל $k\ge0$. ∎

e^z כטור חזקות

ראינו כי e^z מקיימת בדיוק 2 התכונות הבאות:

$f(z)$ יחידה שמקיימת זה $\begin{cases}f'(z)=f(z)\\ f(0)=1\end{cases}$

נבדוק האם יש טור חזקות $f(z)$ סביב 0 שלה תכונות אלה. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$.

$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$, ולכן מתקיים $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ← זו הפ' המבוקשת

מתקיים לכל z : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}\underset{\downarrow}{=}e^{|z|}$. (כלומר $R=\infty$) , ומכאן כי $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

ידוע, זה הטור בממשי

(כי ההתכנסות בה״ש יותר חזקה)

* אוילר הציב במקום z מספר מדומה טהור ix ($x\in\mathbb{R}$):

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos x+i\sin x$$

← וכך הוכיח אוילר כי $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

פיתוח של $\cos z$ ו- $\sin z$ כטורי חזקות:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+(-1)^n)i^nz^n$$

$$\Longrightarrow\cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\Longrightarrow\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[illegible]

משפט:

יהי טור מרוכב מתכנס בהחלט $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. תהי $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונ' חח"ע ועל (תמורה של האינדקסים).

אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ מתכנס בהחלט, ולאותו סכום.

הוכחה:

נסמן $z=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. נתבונן ב- $\sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)} - z$.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר N גדול כך שלכל $n\geq N$: $\sum_{k=n}^{\infty}|z_k|<\varepsilon$.

נסמן $F=\sigma^{-1}(\{1,2,...,N\})$. אז $F=\{\sigma^{-1}(1),...,\sigma^{-1}(N)\}$. נסמן $M=\max_{j\in F}(j)$

$\Leftarrow$ $F\subseteq\{1,2,...,M\}$. יהי $n\geq M$. (שים לב כי $\sigma(F)=\{1,2,...,N\}$, $F\subseteq\{1,...,m\}\subseteq\{1,2,...,n\}$). אז

$$\sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)} - z = \sum_{k\in F} z_{\sigma(k)} - z + \sum_{k\in\{1,..,N\}\setminus F} z_{\sigma(k)} \underset{\substack{k\in F\\ \Updownarrow \\ \sigma(k)\in\{1..N\}}}{=} \sum_{j=1}^{N} z_j - z + \sum_{j\in\{\sigma(1),..,\sigma(n)\}\setminus\{1,..,N\}} z_j$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)} - z\right| \leq \left|\underbrace{\sum_{j=1}^{N} z_j - z}_{-\sum_{N+1}^{\infty} z_j}\right| + \left|\sum_{j\in\{\sigma(1),..,\sigma(n)\}\setminus\{1,..,N\}} z_j\right| = \left|\sum_{j=N+1}^{\infty} z_j\right| + \left|\sum_{j\in\sigma\{1..N\}\setminus\{1..N\}} z_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=N+1}^{\infty}|z_j| + \sum_{j=N+1}^{\infty}|z_j| \leq 2\varepsilon \qquad \blacksquare$$

משפט: (מכפלת קושי)

נניח שני טורים מתכנסים בהחלט $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+m=n} a_l b_m\right)$ מתכנס בהחלט וסכומו הוא $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

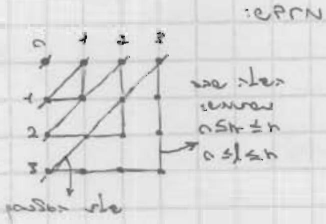
הוכחה:

נסמן $c_n=\sum_{l+m=n} a_l b_m$. אז $\sum_{j=0}^{n} c_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{l+m=j} a_l b_m$ ולכן:

$$\left|\sum_{j=0}^{n} c_j\right| \leq \sum_{j=0}^{n}|c_j| \leq \sum_{j=0}^{n}\underset{\substack{\downarrow\\ l,m\leq n}}{\sum_{l+m=j}} |a_l||b_m| \leq \left(\sum_{l=0}^{n}|a_l|\right)\left(\sum_{m=0}^{n}|b_m|\right) \leq \left(\sum_{l=0}^{\infty}|a_l|\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\right)$$

סכום מכפלות חלקיות של כל זוגות

נובע כי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס, ולכן הטור $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l+m=n} a_l b_m}$ מתכנס בהחלט (ובפרט מתכנס). לכן לפי המשפט הקודם אפשר [לכל שינוי הסדר הוא של איברים $[l,n-l]$] לסדר את האיברים מחדש:



נבחר הסכומים החלקיים של הטור כך:

$$z_n = \sum_{\substack{0\leq l\leq n\\ 0\leq m\leq n}} a_l b_m = \left(\sum_{l=0}^{n} a_l\right)\left(\sum_{n=0}^{n} b_m\right) \xrightarrow{n\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) \qquad \blacksquare$$

דוגמא: $z(t)=\begin{cases}1+i(t-1) & 0\leq t\leq 1\\ 1+t-i & -1\leq t\leq 0\end{cases}$

1/12/09

מרוכבות - תרגול 7

משפט: (הוכחה בהמשך)

תהי $f:U\to\mathbb{C}$ $U\subseteq\mathbb{C}$ פונקציה גזירה ברציפות. U תחום. אזי מתקיים:

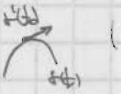
f אנליטית $\Longleftrightarrow$ f שומרת על הזווית בין מסילות העוברות בנק' z_0 [illegible] $f'(z_0)\neq0$

תזכורת: **הגדרה:** **מסילה** היא פונקציה רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$,

כאשר $\gamma(t)=g(t)+ih(t)$, עם $t\in[a,b]$, ו- $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות.

הגדרה: γ **גזירה** ב-t_0 אם g,h גזירות ב-t_0, ואז: $\gamma'(t_0)=g'(t_0)+ih'(t_0)$

טענה: אם $\gamma'(t_0)\neq0$ אז $\gamma(t)\neq\gamma(t_0)$ עבור t מספיק קרוב ל-t_0 (רק מימין ומשמאל)



למה:

$$\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}=\lim_{t\to t_0^+}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}\quad,\quad -\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}=\lim_{t\to t_0^-}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}$$

הוכחה:

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}=\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\cdot\frac{t-t_0}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}=\underbrace{\left(\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right)}_{\substack{\downarrow t\to t_0\\ \gamma'(t_0)}}\Big/\underbrace{\left(\frac{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}{t-t_0}\right)}_{\substack{\downarrow\\ |\gamma'(t_0)|,\ t\to t_0^+\\ -|\gamma'(t_0)|,\ t\to t_0^-}}$$

הגדרות:

- משיק למסילה γ בנק' t_0 הוא $\gamma'(t_0)$ [במידה וקיים]
- זווית בין מסילות: תהיינה β,γ מסילות כך ש- $\gamma(t_0)=\beta(t_1)=z_0$.

אז: הזווית בנק' z_0 בין המסילות β ו-γ היא הזווית בין המשיקים,

כלומר $\measuredangle(\gamma,\beta):=\measuredangle(\gamma'(t_0),\beta'(t_1))=\arg\gamma'(t_0)-\arg\beta'(t_1)$

למה 2:

תהי $f:U\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ אנליטית. תהי $\gamma:[a,b]\to U$ מסילה גזירה ב-t_0 ב-$[a,b]$.

עם $\gamma'(t_0)\neq0$. אז המסילה $f(\gamma(t))$ גזירה ב-t_0, ומתקיים:

$$[f(\gamma(t))]'(t_0)=f'(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)$$

הוכחה:

נסמן $\tilde{\gamma}(t)=f(\gamma(t))$. אז $\lim_{t\to t_0}\frac{\tilde{\gamma}(t)-\hat{\gamma}(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0}=$

$$=\lim_{\substack{t\to t_0\\ \downarrow}}\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{\gamma(t)-\gamma(t_0)}\cdot\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}=f'(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)\ \blacksquare$$

מרציפות $\gamma(t)\to\gamma(t_0)$

מרוכבות - שיעור 14

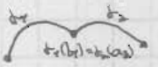
3/12/08

הגדרה: (מסילה הפוכה)

המסילה ההפוכה למסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ היא המסילה $-\gamma$ המוגדרת ע"י: $-\gamma:[-b,-a]\to\mathbb{C}$

כך ש- $(-\gamma)(t)=\gamma(-t)$ ל- $-b\le t\le -a$

דוגמא: $\begin{cases} z(t)=e^{-it} \\ -2\pi\le t\le 0\end{cases}$ — הפוכה למסילה: $\underset{0\le t\le 2\pi}{z(t)=e^{it}}$



הגדרה: (סכום מסילות)

נתונות שתי מסילות $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$, $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$, ונניח כי $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(a_2)$.

הסכום של המסילות - $\gamma_1+\gamma_2$ ע"י: $z(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & a_1\le t\le b_1 \\ \gamma_2(t-b_1+a_2) & b_1\le t\le b_1+b_2-a_2\end{cases}$

שינוי פרמטר במסילה

נתונה מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ונתונה פונקציה רציפה $h:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ כך ש- $h(\alpha)=a$, $h(\beta)=b$ (ולכן מונוטונית עולה כי h היא על). אז

$\gamma\circ h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $(\gamma\circ h)(s)=\gamma(h(s))$, היא מסילה.

נאמר כי $\gamma\circ h$ התקבלה מ-γ ע"י **שינוי הפרמטר** $t=h(s)$, $\alpha\le s\le\beta$.

הגדרה: (אינטגרל קווי)

האינטגרל הקווי של פונקציה $f(z)$ לאורך מסילה γ: נתונה מסילה γ לפי הצגה

$z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ (נניח γ חלקה למקוטעין). ונתונה פונק' $f(z)$ **רציפה** על $\mathrm{Im}(\gamma)$.

$\gamma(t)$

אז האינטגרל הקווי של $f(z)$ לאורך γ הוא: $\int_\gamma f(z)\,dz := \boxed{\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt}$ (לא תלוי ב-C)

* נראה כי האינטגרל $\int_\gamma$ **לינארי** ב-f:

$$\int_\gamma (c_1f_1(z)+c_2f_2(z))\,dz = c_1\int_\gamma f_1(z)\,dz + c_2\int_\gamma f_2(z)\,dz$$

$c_1,c_2\in\mathbb{C}$, ונניח $f_1(z)$ ו- $f_2(z)$ רציפות על $\mathrm{Im}(\gamma)$

* האינטגרל אינו משתנה תחת **שינוי פרמטר**: נניח כי $h:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ רציפה,

וגזירה למקוטעין (פונק' גזירה ברציפות על המקטע פרט אולי לסופי נק'), ו- $a=h(\alpha)$, $b=h(\beta)$.

נסמן ב- γ' את המסילה המתקבלת מ- $\gamma\circ h$, אז $\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma'} f(s)\,ds$. הוכחה:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt \underset{\substack{t=h(s),\ dt=h'(s)ds \\ \alpha\le s\le\beta}}{=} \int_\alpha^\beta f(z(h(s)))\,z'(h(s))\,h'(s)\,ds = \int_\alpha^\beta f((z\circ h)(s))\,(z\circ h)'(s)\,ds = \int_{\gamma'} f(s)\,ds$$

* תכונה: $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$. הוכחה:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz \overset{\text{הגדרה}}{=} \int_{-b}^{-a} f(z(-t))\,\underbrace{\frac{d}{dt}(z(-t))}_{-z'(-t)}\,dt = -\int_{-b}^{-a} f(z(-t))\,z'(-t)\,dt \underset{\substack{\text{שינוי משתנה} \\ t\to -t,\ dt\to -dt}}{=} \int_b^a f(z(t))\,z'(t)\,dt = -\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

* נניח כי $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, אז:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz}$$

הוכחה: נניח γ_i ($i=1,2$) מיוצגת ע"י $z_i:[a_i,b_i]\to\mathbb{C}$, ו-$z_1(b_1)=z_2(a_2)$. נגדיר

$$z(t)=\begin{cases}z_1(t) & a_1\le t\le b_1\\ z_2(t-b_1+a_2) & b_1\le t\le b_1+b_2-a_2\end{cases}$$

אזי $z'(t)=\begin{cases}z_1'(t) & a_1\le t\le b_1\\ z_2'(t-b_1+a_2) & b_1\le t\le b_1+b_2-a_2\end{cases}$ ← ייתכן ש-$z'(t)$ אינו קיים ב-$t=b_1$.

לכן:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2}f(z)\,dz=\int_{a_1}^{b_1+b_2-a_2}f(z_1(t))z_1'(t)\,dt=\int_{a_1}^{b_1}f(z_1(t))z_1'(t)\,dt+\int_{b_1}^{b_1+b_2-a_2}f(z_2(\underbrace{t-b_1+a_2}_{\text{שינוי משתנה } t\mapsto t+b_1-a_2}))z_2'(t-b_1+a_2)\,dt$$

(* של)

$$=\int_{a_1}^{b_1}f(z_1(t))z_1'(t)\,dt+\int_{a_2}^{b_2}f(z_2(t))z_2'(t)\,dt$$

$$=\int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz$$

אורך מסילה חלקה למקוטעין

מסילה γ מיוצגת ע"י $z(t)$ כש- $a\le t\le b$.

האורך של γ:

$$\boxed{\ell(\gamma)=\int_a^b|z'(t)|\,dt}$$

8/12/09

מרוכבות - שיעור 15

תזכורת: $\gamma: z(t) = re^{it}$ $0\leq t\leq 4\pi$

$|z'(t)|dt = \int_0^{4\pi} r\,dt = 4\pi r$

$z'(t) = ire^{it}$

$|z'(t)| = r$

למה: יהי $f(z)$ רציפה על תמונת מסילה γ, אז

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \max_{z\in Im(\gamma)} |f(z)|\cdot \ell(\gamma)$$

הוכחה: תהי γ נתונה ע"י $z(t)$, $t\in[a,b]$. תהי γ חלקה.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt = \int_a^b \underbrace{|f(z(t))|}_{t\mapsto|f(z(t))|\leq \max_{a\leq t\leq b}|f(z(t))|}\cdot|z'(t)|\,dt \leq \max_{z\in Im(\gamma)}|f(z)|\underbrace{\int_a^b|z'(t)|dt}_{\ell(\gamma)}$$ ⊠

דוגמא: ① חשב את $\int_\gamma x\,dz$ כש- $\gamma: z(t) = \begin{cases} 1+it & 0\leq t\leq 1\\ (2-t)+i & 1\leq t\leq 2\end{cases}$. אז $z'(t) = \begin{cases} i & 0\leq t\leq 1\\ -1 & 1\leq t\leq 2\end{cases}$

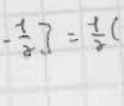
$f(z) = f(x+yi) = x$

(γ חלקה למקוטעין)

לפי ההגדרה:

$$\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 \underset{\substack{\cancel{Re(z)}\\ f(1+it)=1}}{1}\cdot \underset{z'(t)}{i}\,dt + \int_1^2(2-t)(-1)\,dt = i+\int_1^2(t-2)dt$$
$$= i+\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_1^2 = i+\frac{3}{2}-2 = i-\frac{1}{2}$$

② אותו על γ^*:



$\gamma^*: z(t) = 1+t(i-1)$, $z'(t) = i-1$
$= (1-t)+it$ $0\leq t\leq 1$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^*} x\,dz = \int_0^1 \underset{f(z(t)) = Re(z(t)) = 1-t}{(1-t)}(i-1)\,dt = (i-1)\int_0^1(1-t)dt = (i-1)\left[1-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(i-1)$$

$\int_\gamma \bar{z}\,dz$ בתרגול
Re z

הערה: תהי $f(z) = u(z)+iv(z)$ $\left(\begin{matrix} u(z) = Re(f(z))\\ v(z) = Im(f(z))\end{matrix}\right)$

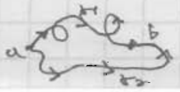
$\gamma: z(t) = \underbrace{x(t)+iy(t)}_{\text{פונקציות ממשיות}}$, $a\leq t\leq b$ מסילה.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b\left(u(z(t))+iv(z(t))\right)\left(x'(t)+iy'(t)\right)dt$$
$$= \int_a^b\left(u(\underset{(x(t),y(t))}{z(t)})x'(t) - v(z(t))y'(t)\right)dt + i\cdot\int_a^b u(z(t))y'(t)+v(z(t))x'(t)\,dt$$

סימון מקוצר $\hookleftarrow$ $= \underbrace{\int_\gamma udx - vdy}_{"\int_\gamma udx - \int_\gamma vdy} + i\int_\gamma udy + vdx$

כאשר $\int_\gamma udx = \int_a^b u(x(t),y(t))x'(t)dt$, וכן $\int_\gamma vdy = \int_a^b v(x(t),y(t))y'(t)dt$

באופן כללי, פונקציות רציפות ממשיות בשני משתנים על תחום $U\subseteq\mathbb{R}^2$, נתונות ב-
$p(x,y), q(x,y)$, נגדיר אינטגרל קווי: $\int_\gamma pdx+qdy$ כש-γ מסילה חלקה ב-U
אומרים כי האינטגרל הקווי הנ"ל לא תלוי במסילה, אם לכל שתי מסילות γ_1 ו-γ_2 ב-U
עם אותן נק' קצה (התחלה וסוף): $\int_{\gamma_1} pdx+qdy = \int_{\gamma_2} pdx+qdy$



תנאי שקול: לכל מסילה סגורה γ בתחום U : $\underset{\sim\sim\sim}{\int_\gamma pdx+qdy=0}$.

הוכחת שקילות:

(⇐) אם γ סגורה אז γ ו- $-\gamma$ יש להן אותה נק' התחלה ואותה נק' סוף כמו γ (וכן גם אותה נק')

אז $\int_\gamma pdx+qdy=\int_{-\gamma} pdx+qdy \longleftrightarrow$ אבל $\int_{-\gamma} pdx+qdy=-\int_\gamma pdx+qdy$ ולכן $\int_\gamma pdx+qdy=0$.

(⇒) נניח כי γ_1 ו- γ_2 הן שתי מסילות ב-U, אשר מתחילות ומסתיימות באותן נקודות.

אז $(\gamma_1+(-\gamma_2))$ היא מסילה סגורה (מתחילה ומסתיימת בנק' ההתחלה של γ_1).

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} pdx+qdy=0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} pdx+qdy-\int_{\gamma_2} pdx+qdy=0 \quad \blacksquare$$

משפט:

נניח שני פונקציות ממשיות רציפות $p(x,y),q(x,y)$ בתחום $U\subseteq\mathbb{R}^2$.

אז האינטגרל $\int_\gamma pdx+qdy$ תלוי רק בקצות המסילה לכל מסילה γ ב-U

$$\Updownarrow$$

קיימת פונקציה $V(x,y)$ על U (גזירה ברציפות) כך ש $\frac{\partial V}{\partial y}=q$, $\frac{\partial V}{\partial x}=p$

הוכחה:

(⇒) נניח כי יש V כזאת. תהי γ מסילה חלקה כלשהי: $(x(t),y(t))$ $a\le t\le b$

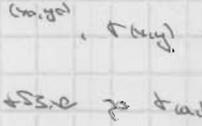
אז
$$\int_\gamma pdx+qdy=\int_a^b\left[p(x(t),y(t))x'(t)+q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$
$$=\int_a^b\underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right]}_{\frac{d}{dt}[V(x(t),y(t))]}dt=V(x(b),y(b))-V(x(a),y(a))=$$

כלל השרשרת

תלוי רק בקצות γ

(⇐) נקבע נקודה $u_0=(x_0,y_0)$ ב-U. לכל נקודה $(x,y)\in U$ יש מסילה $\gamma_{(x,y)}$ המחברת

בין u_0 ל- (x,y) ושכולה ב-U. למשל קו שבור שצלעותיו מקבילות לצירים.



נגדיר $V(x,y)=\int_{\gamma_{(x,y)}} pdx+qdy$ ← לפי ההנחה, האינטגרל לא תלוי בבחירת $\gamma_{(x,y)}$.

נראה ש- $V(x,y)$ מקיימת את הנ"ל. יהי $(a,b)\in U$. אפשר לבחור את $\gamma_{(a,b)}$ כך שהצלע

האחרונה שלה מקבילה לציר x. נניח ש הקצה ההתחלתי של הצלע האחרונה של $\gamma_{(a,b)}$ הוא (a_0,b).

נאריך את קצה של הצלע האחרונה מעבר ל- (a,b) עד (a_1,b), כך שכולה ב-U.

נניח שבה"כ $a_0<a$. לכל $a_0<x<a_1$ אז $V(x,b)=\overbrace{\int_{\gamma_{(a_0,b)}} pdx+qdy}^{\text{לא תלוי כלל ב-x}}+\int_{a_0}^{x}p(t,b)dt$ ← צלע אחרונה $z(t)=(t,b)$ $z'(t)=(1,0)$

נציג ~~[illegible]~~ הצלע האחרונה כמסילה ע"י:

כש: $a_0\le t\le a_1$ $x(t)=t$ $y(t)=b$ $x'(t)=1$ $y'(t)=0$

ומכאן רואים כי $x\mapsto V(x,b)$ גזירה ו- $\frac{\partial}{\partial x}V(x,b)=p(x,b)$ ומקיימת $\frac{\partial V}{\partial x}=p$

ובאופן דומה $\frac{\partial V}{\partial y}=q$. נחזור ל- $\int_\gamma f(z)dz$ כמו קודם:

$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma udx-vdy+i\int_\gamma vdx+udy$ ← תלוי רק בנקודות המסילה ⟺ תנאי א' מתקיים לגבי החלק הממשי והמדומה.

⟸ קיימות שתי פונקציות $G(x,y)$, $F(x,y)$ על תחום U כך ש- $\frac{\partial F}{\partial y}=-v$, $\frac{\partial F}{\partial x}=u$

וגם $\frac{\partial G}{\partial y}=u$, $\frac{\partial G}{\partial x}=v$.

נגדיר עכשיו $(z\in U)$ $\Phi(z)=\Phi(x+yi)=F(x,y)+iG(x,y)$. כיוון ש- $F(x,y)$, $G(x,y)$

דיפרנציאביליות על U (כי בעלות נגזרות חלקיות רציפות).

ומקיימות משוואות קושי רימן: $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial G}{\partial x}$.

לכן $\Phi(z)$ אנליטית ב-U. $\Phi'(z)=\frac{\partial F}{\partial x}(z)+i\frac{\partial G}{\partial x}(z)=u(z)+iv(z)=f(z)$

∎

משפט:

יהי $f(z)$ פונקציה רציפה (מרוכבת) על תחום $U\subseteq\mathbb{C}$.

אז $\int_\gamma f(z)dz$ תלוי רק בנקודות התחלה וסוף (γ מסילה ב-U)

$\Updownarrow$

$f(z)$ היא נגזרת של פונקציה אנליטית ב-U (כי ל- $f(z)$ קדומה אנליטית ב-U)

מסקנה:

יהי $f(z)$ פונקציה רציפה על תחום U. נניח כי ל- $f(z)$ יש קדומה אנליטית ב-U.

אז $\int_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסילה סגורה המוכלת ב-U.

דוגמאות: ① יהי $n\geq 0$. אז $\int_\gamma (z-a)^n dz=0$ לכל מסילה סגורה γ,

כי $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ היא קדומה אנליטית של $(z-a)^n$.

② יהי $n\leq -2$. אז לכל מסילה סגורה γ שאינה עוברת דרך a (!!)

מתקיים $\int_\gamma (z-a)^n dz=0$

הוכחה: מכיוון ש- $Im(\gamma)$ סגורה, ואז $\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$ פתוחה, וכיוון ש- $a\in\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$, יש סביבה פתוחה

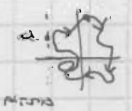
סביב a המוכלת כולה ב- $\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$. יהי B כדור סביב a המוכל בסביבה הזאת. על

ב-U יש ל- $(z-a)^n$ קדומה אנליטית שהיא $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ $(n\geq -2)$

③ $n=-1$. $\int\frac{dz}{z-a}$  $\leftarrow |z-a|=r$. $0\leq t\leq 2\pi$, $z-a=re^{it}$

מעגל סביב a

$z(t)=a+re^{it}$, $z'(t)=ire^{it}\Rightarrow\int_0^{2\pi}\frac{i\cancel{re^{it}}}{\cancel{re^{it}}}dt=2\pi i$

④  $\Leftarrow$ $\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=0$

מכיוון כי ענף של $\log(z-a)$ הוא קדומה אנליטית, לכן $\int\ldots=0$.

מרוכבות - תרגול 8

8/12/09

אינטגרל מסילתי של פונקציה אנליטית

תזכורת: $\gamma:[a,b]\to U$ מסילה גזירה, U תחום, $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית.

אז מוגדר: $\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma'(t))\gamma'(t)dt$

משפט:

לכל מסילה γ, $\int_\gamma f(z)dz$ תלוי רק בקצוות של המסילה γ

$\Updownarrow$

ל-f יש קדומה אנליטית בתחום U

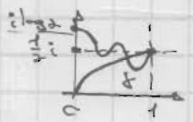
$\Updownarrow$

לכל מסילה סגורה $\Gamma\subseteq U$ מתקיים: $\int_\Gamma f(z)dz=0$

דוגמאות: $n\neq-1$, $f(z)=(z-a)^n$, γ מסילה סגורה, $a\notin\gamma$. $\Leftarrow$ $\int_\gamma (z-a)^n dz=0$

אם γ מעגל סביב a $\Leftarrow$ $\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz=2\pi i$

תרגילים: ① לחשב $\int_\gamma z\sin z\,dz$ כאשר:



נמצא קדומה:

$$\int z\sin z\,dz=\int z(-\cos z)'dz=-z\cos z+\int\cos z\,dz=-z\cos z+\sin z+C$$

נמצא קדומה אנליטית ב-$\mathbb{C}$, לכן אין תלות במסילה. ניקח γ כלשהי

$$\int_\gamma z\sin z\,dz=(-z\cos z+\sin z)\Big|_{z=0}^{z=i\log 2}=-i\log 2\cdot\cos(i\log 2)+\sin(i\log 2)$$

כאשר:

$$\cos(i\log 2)=\frac{e^{i(i\log 2)}+e^{-i\cdot(i\log 2)}}{2}=\frac12(e^{-\log 2}+e^{\log 2})=\frac12(\frac12+2)=\frac54$$

$$\sin(i\log 2)=\frac{1}{2i}(e^{-\log 2}-e^{+\log 2})=\frac{1}{2i}(\underbrace{\frac12-2}_{-\frac32})=\frac{3i}{4}$$

$$\Rightarrow\int_\gamma z\sin z\,dz=-i(\log 2)\cdot\frac54+\frac34 i$$

② לחשב: $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^3+4z}$

צריך לפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{z^3+4z}=\frac{1}{z(z^2+4)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{z^2+4}=\dots$$

$$=\frac{1}{4z}-\frac{z}{4(z^2+4)}\Rightarrow\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^3+4z}=\frac14\underbrace{\int_{|z|=1}\frac1z dz}_{\frac14}-\frac18\underbrace{\int_{|z|=1}\frac{2z}{z^2+4}dz}_{\overset{?}{=}(\mathrm{Log}(z^2+4))'}$$

[illegible]

ועל ~~[illegible]~~ בתחום $|z|<\frac32$ מוגדר היטב: $\mathrm{Log}(z^2+4)$ אנליטית... ([illegible])

③ נחשב $\int \frac{1}{z}dz$ כאשר γ המסילה הבאה:

נראה ש- $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{|z|=1/4} \frac{dz}{z}$.

נגדיר γ_1, γ_2 כבציור הבא

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_{|z|=1/4} \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{dz}{z} - \int_{|z|=1/4} \frac{dz}{z}$$

$V = \mathbb{C} \setminus \left\{ \begin{matrix} Re \le 0 \\ Im = 0 \end{matrix} \right\}$, $\gamma_1 \subseteq V$, בתחום V קיים ענף של $\operatorname{Log} z$ שהוא קדומה ל- $\frac{1}{z}$, ולכן $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 0$.

באותו אופן, $\gamma_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus \left\{ \begin{matrix} Re \ge 0 \\ Im = 0 \end{matrix} \right\}$, ובתחום זה קיים ענף לוג, ולכן $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 0$.

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

10.12.09

מרוכבות - שיעור 16

משפט קושי במלבן

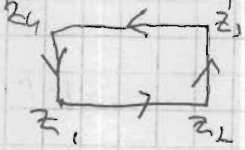
תהי $f(z)$ פונק' אנליטית בתחום U

נניח כי $R\subset U$ הוא מלבן סגור. תהי

∂R שפת המלבן, ונחשוב על ∂R כעל מסילה

באופן הבא: נניח כי קודקודי המלבן הם z_1,z_2,z_3,z_4

עפ"י סדר



$$z(t)=\begin{cases} z_1+t(z_2-z_1) & 0\le t\le 1\\ z_2+(t-1)(z_3-z_2) & 1\le t\le 2\\ z_3+(t-2)(z_4-z_3) & 2\le t\le 3\\ z_4+(t-3)(z_1-z_4) & 3\le t\le 4\end{cases}$$

משפט: (קושי)

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום U, יהי $R\subset U$

מלבן סגור אז $\int_{\partial R} f(z)dz=0$

הוכחה:

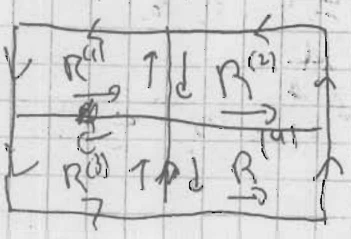
לכל מלבן סגור $Q\subset R$ כך שצלעות Q

מקבילות לצלעות R וכך שהכיוון של ∂Q

שווה לכיוון של שפת R $\quad \eta(Q)=\int_{\partial Q} f(z)dz$

נחבר את נק' האמצע של צלעות מקבילות R

ונקבל ארבעה מלבנים



$$\eta(R)=\sum_{i=1}^{4}\eta(R^{(i)})$$

מא"ש המשולש: $|\eta(R)|\le\sum_{i=1}^{4}|\eta(R^{(i)})|$

נסמן ב- R_1 את הרביע שבשבילו $|\eta(R^{(i)})|$

הוא מקסימלי $\quad |\eta(R)|\le 4|\eta(R_1)|$

10.12.09 נמשיך על התהליך בסביב R_1, נמצא מלבן $R_2 \subset R_1$ הוא הוא "רבע מ-R_1" כמו קודם כך ש:

$$|\eta(R_1)| \le 4|\eta(R_2)|$$

וכך נקבל סדרת מלבנים $R \supseteq R_1 \supset R_2 \supset R_3 \dots$

כך שצלעות R_i מקבילות לצלעות R ובהתאמה גודל צלע של R_{i+1} הוא חצי מגודל המקבילה לה של R_i

$$|\eta(R)| \le 4^n|\eta(R_n)|$$

נגדיר כי המלבנים מתכנסים לנק' $a \in R$

נשתמש בגזירות f ב-a

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \to f'(a)$$

יהי $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש:

$$\underset{z\in U}{|z-a|<\delta} \Rightarrow |f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)| < \varepsilon|z-a|$$

אז ל-δ הנ"ל, יש N כך ש:

$$n \ge N \Rightarrow R_n \subset \{z \mid |z-a| < \delta\}$$

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n}[f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)]dz + \underbrace{\int_{\partial R_n}[f(a)+f'(a)(z-a)]dz}_{=0}$$

$$|\eta(R_n)| \le \max_{z\in\partial R_n}|f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)| \cdot |\partial R_n|$$

$$< \varepsilon \cdot \max_{z\in\partial R_n}|z-a| \cdot |\partial R_n| \overset{\text{כי } f_1}{\le} \varepsilon \cdot \text{קוטר של } R_n \cdot \text{היקף } R_n$$

$$= \varepsilon \cdot \frac{\text{קוטר של } R}{2^n} \cdot \frac{\text{היקף } R}{2^n} = 4^{-n}\varepsilon d L$$

$$|\eta(R)| \le 4^n|\eta(R_n)| \le \varepsilon d L$$

נכון לכל $\varepsilon>0$ ולכן $\eta(R)=0$

מ.ש.ל

10.12.09

<u>שיפור קל של המשפט:</u> יהי U תחום.

תהי $z_0 \in U$. נניח כי $f(z)$ פונקציה אנליטית על התחום $U\setminus\{z_0\}$. כמו כן. נניח כי קיים

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$$

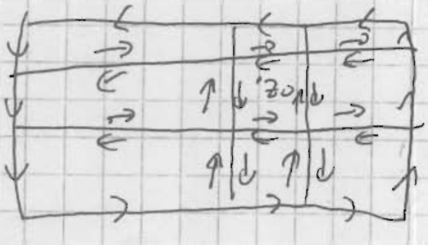
אז לכל מלבן (סגור) $R \subset U$, כך ש- $z_0 \notin \partial R$,

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

<u>הוכחה:</u>

אם $z_0 \notin R$, אז נשתמש במשפט הקודם כ שניקח את התחום $U' = U\setminus\{z_0\}$ כי $R \subset U'$.

נניח כי $z_0 \in \mathring{R}$.



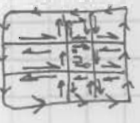
נחלק את המלבן לתשעה מלבנים שצלעותיהם מקבילות כמו בציור, כך ש- z_0 נמצא בתוך מלבן שהוא ריבוע שצלעו δ, נכוון את צלעות המלבנים כמו בציור. נסמן את הריבוע המכיל את z_0 ב- S_δ, אז מהמשפט הקודם: $\eta(R) = \eta(S_\delta)$

15/12/09

מרוכבות - שיעור 17

תזכורת: U תחום, $z_0\in U$, $f(z)$ אנליטית ב-$U\setminus\{z_0\}$ כך ש- $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$

$R\subseteq U$ מלבן סגור. $z_0\notin\partial R$. אזי $\int_{\partial R}f(z)dz=0$.



אם $z_0\notin R$ - נובע ממשפט קושי למלבן. נניח $z_0\in\mathring{R}$. נחלק את R כך:

$$\int_{\partial R}f(z)dz=\sum_{i=1}^{9}\int_{\partial R_i}f(z)dz\underset{\swarrow}{=}\int_{\partial R_5}f(z)dz\underset{\downarrow}{=}\int_{\partial R_5}[f(z)(z-z_0)]\cdot\frac{1}{z-z_0}dz$$

לפי משפט קושי למלבן

נסמן צלע של R_5 ב-r. ניתן לחלק כל צלע r ומתאים ל-z_0 (ונוכל להקטין r→0)

יהי $\varepsilon>0$, אז קיים $\delta>0$ כך ש- $\underset{(z\in U)}{|z-z_0|<\delta}\Rightarrow|(z-z_0)f(z)|<\varepsilon$. נבחר את r (צלע R_5) כך ש- $R_5\subseteq\{z\,|\,|z-z_0|<\delta\}$. אז

$$\left|\int_{\partial R_5}f(z)dz\right|=\left|\int_{\partial R_5}(z-z_0)f(z)\cdot\frac{1}{z-z_0}dz\right|\le$$

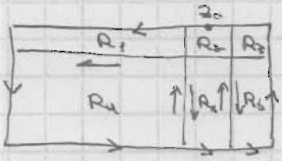
$$\le\max_{z\in\partial R_5}\underbrace{|(z-z_0)f(z)|}_{<\varepsilon}\cdot\frac{1}{|z-z_0|}\cdot\ell(\partial R_5)\le\varepsilon\cdot\max_{z\in\partial R_5}\frac{1}{|z-z_0|}\cdot 4r\le\varepsilon\cdot\frac{1}{\frac{r}{2}}\cdot4r=8\varepsilon$$ ◻

משפט:

יהי U תחום ונניח $z_0\in U$. תהי $f(z)$ פונקציה רציפה על U ואנליטית ב-$U\setminus\{z_0\}$, אז לכל מלבן סגור $R\subseteq U$ מתקיים, $\int_{\partial R}f(z)dz=0$.

הוכחה:

מכיוון ש-f רציפה ב-z_0 נובע ש- $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ אז $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$. לכן אם $z_0\notin R$ או $z_0\in\mathring{R}$ אז ממשפט הקודם. לכן נניח ש- $z_0\in\partial R$.



נחלק כך

$$\int_{\partial R}f(z)dz=\sum_{i=1}^{6}\int_{\partial R_i}f(z)dz=\int_{\partial R_2}f(z)dz$$

אז $\left|\int_{\partial R}f(z)dz\right|\le\max_{z\in\partial R_2}|f(z)|\cdot\ell(\partial R_2)\xrightarrow{R_2\to0}|f(z_0)|\cdot0=0$

משפט קושי בעיגול

נתון עיגול פתוח D. נניח כי $f(z)$ היא פונקציה אנליטית.

אז $\int_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור γ הנמצא ב-D.

הוכחה:

נסמן ב-z_0 את מרכז העיגול. לכל $z\in D$ אפשר לחסום מלבן בעיגול שצלעותיו מקבילות לצירים וקודקודיו הנגדיים הם z_0 ו-z. לכל מלבן כזה יש 2 מסלולים לאורך הצלעות המחברים את z_0 ל-z: אחד הצלע הראשונה מקבילה לציר x ובאחרת הצלע הראשונה מקבילה לציר y. נסמן ב-γ_z מסלול שמתחיל ב-z_0 ומסתיים ב-z, ומורכב מצלעות מלבן כזה. אז,

משפט קושי מצולע: $G(z)=\int_{\gamma_z} f(z)\,dz$ אינו תלוי במסילה γ_z, ולכן $G(z)$

מוגדרות היטב ב-D. נגדיר אותן $V_1(z)=\int_{\gamma_z} u\,dx-v\,dy$, $V_2(z)=\int_{\gamma_z} u\,dy+v\,dx$
($f(z)=u(z)+iv(z)$, $f'(z)=u'(z)+iv'(z)$)

כמו, ראינו שאינטגרל של דיפרנציאל מדויק $\int_\gamma p\,dx+q\,dy$,

אם אינו תלוי רק בקצוות המסילה ⟺ קיימת $V(x,y)$ כך ש $\frac{\partial V}{\partial x}=p$, $\frac{\partial V}{\partial y}=q$

לכן $\frac{\partial V_1}{\partial x}=u$, $\frac{\partial V_1}{\partial y}=-v$, $\frac{\partial V_2}{\partial x}=v$, $\frac{\partial V_2}{\partial y}=u$.

ומכאן נובע כי הפונקציה $V(z)=V_1(z)+iV_2(z)$ היא אנליטית ב-D, וכן $V'(z)=f(z)$

ומסקנה: לפונקציה אנליטית $f(z)$ ב-D יש קדומה אנליטית ב-D, ולכן $\int_\gamma f(z)\,dz=0$ לכל מסילה γ סגורה מוכלת ב-D.

שימו

דוגמה: $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+4}\,dz=0$ כי $f(z)=\frac{e^z}{z^2+4}$ אנליטית בתחום.

אז $D=\{z\,|\,|z|<\frac{3}{2}\}$. המסילה הנתונה ע"י $|z|=1$ סגורה ב-D.

משפט:

זו הכללה של משפט קושי מצולע

יהי $f(z)$ רציפה בתחום פתוח D. יהי $a\in D$. נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$D\setminus\{a\}$,

אז $\int_\gamma f(z)\,dz=0$ לכל מסילה γ (סגורה) מוכלת ב-D.

דוגמה: $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ $a\notin\gamma$

משפט:

יהי γ מסילה סגורה, ויהי $a\in\mathbb{C}$ שאינו על γ ($a\notin\gamma$).

אז קיים $n\in\mathbb{Z}$ יחיד ש: $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=2n\pi i$

(כלומר: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=n\in\mathbb{Z}$)

הוכחה: (מסילה גזירה)

נניח כי γ נתונה ע"י $z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$. אז $z(t)-a=r(t)e^{i\theta(t)}$ כש- $r(t)>0$.

$$z'(t)=r'(t)e^{i\theta(t)}+i\theta'(t)r(t)e^{i\theta(t)}$$

אז $$\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=\int_\alpha^\beta\frac{r'(t)\cancel{e^{i\theta(t)}}+i\theta'(t)r(t)\cancel{e^{i\theta(t)}}}{r(t)\cancel{e^{i\theta(t)}}}\,dt\underset{r(\beta)=r(\alpha)}{=}\int_\alpha^\beta\frac{r'(t)}{r(t)}\,dt+i\int_\alpha^\beta\theta'(t)\,dt=$$

$$=\cancel{\log r(\beta)-\log r(\alpha)}+i\underbrace{[\theta(\beta)-\theta(\alpha)]}_{\text{שינוי הארגומנט}\,=\,2\pi n}$$

אפשר לבחור $\theta(t)$ כך שיהיה רציף וגזיר במידה ש- $z(t)$
(כל ערך של arg z יש שתי אפשרויות)

במקרה הכללי: ע"י הזזה של $z(t)$ ב- $z(t)-a$ אפשר להניח כי $a=0$.

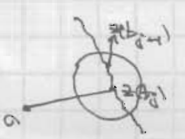
יהי γ מסילה סגורה שאינה עוברת דרך 0 $(0\notin\gamma)$. נסמן $d=\min_{\alpha\le t\le\beta}|z(t)|>0$.

יהי $0<\varepsilon<d$. מרציפות במ"ש של $z(t)$ יש $\delta>0$ כך ש- $|t-t'|<\delta\Rightarrow|z(t)-z(t')|<\varepsilon$ $t,t'\in[\alpha,\beta]$

יהי $\alpha=t_1<t_2<\dots<t_r=\beta$ חלוקה של $[\alpha,\beta]$ כך ש- $\max_i(t_{i+1}-t_i)<\delta$.

⟸ $z(t_{j+1})=\{z\,|\,|z-z(t_j)|<\varepsilon\}=D(z(t_j),\varepsilon)$. מתאים d ו-ε,

לכן הנקודה 0 אינה שייכת לכדור $D(z(t_j),\varepsilon)$,



ולכן קיים ענף של $\log z$ בעיגול $D(z(t_j),\varepsilon)$. נבחר ענף כזה של $g_j(z)$.

$g_j(z) = \log|z| + i\underset{\text{ארגומנט}}{\tilde{\theta}_j(z)}$ ← היא קדומה של $\frac{1}{z}$ בעיגול $D(z(t_j),\varepsilon)$.

$$\gamma_{[t_j,t_{j+1}]} \subseteq D(z(t_j),\varepsilon) \Longrightarrow \int_{\gamma_{[t_j,t_{j+1}]}} \frac{dz}{z} = g_j(z(t_{j+1})) - g_j(z(t_j))$$
$$= \log|z(t_{j+1})| - \log|z(t_j)| + i(\tilde{\theta}_j(z(t_{j+1})) - \hat{\theta}_j(z(t_j)))$$

נסמן בקיצור: $\theta_j(t) = \tilde{\theta}_j(z(t))$ $(t_j \le t \le t_{j+1})$. עבור $z(t_{j+1})$ יש לנו שני ערכים:

$g_j(z(t_{j+1}))$ ו- $g_{j+1}(z(t_{j+1}))$ ולכן שני ערכים $\theta_j(t_{j+1})$ ו- $\theta_{j+1}(t_{j+1})$.

כיוון ש- $\theta_j(t_{j+1}), \theta_{j+1}(t_{j+1}) \in \arg z(t_j)$ אז $\theta_{j+1}(t_{j+1}) - \theta_j(t_{j+1}) = 2\pi n_j$.

נתקן את ערכי הארגומנט של כל מקטע לפי הסדר: $[t_1,t_2] \leftarrow \hat{\theta}_1(t) = \theta_1(t)$.

ב- $[t_2,t_3]$ נחליף את $\theta_2(t)$ ב- $\hat{\theta}_2(t) = \theta_2(t) - 2\pi n_1$ ואז $\theta_1(t_2) = \hat{\theta}_2(t_2)$. כמו כן

ב- $[t_3,t_4]$ נחליף את $\theta_3(t)$ ב- $\hat{\theta}_3(t) = \theta_3(t) - 2\pi n'_2$ $(n'_2 \in \mathbb{Z})$ כך ש- $\hat{\theta}_3(t_3) = \hat{\theta}_2(t_3)$, וכו'..

כך נקבל בחירה רציפה $\hat{\theta}(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ של $\arg z(t)$ ע' לכל t.

נחליף את הסימון $\hat{\theta}$ פשוט ל-θ:
$$z(t) = |z(t)| \cdot e^{i\theta(t)}$$
$$= e^{\log|z(t)| + i\theta(t)} = e^{c(t)} \longrightarrow \underset{\text{רציפה ב- }[\alpha,\beta]}{c(t) = \log|z(t)| + i\theta(t)}$$

בנוסף, נקבל כי $c(t)$ גזירה: $c'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)}$, ולכן ההגדרה האינטגרלית מוצדקת.

$\boxtimes$

<u>הגדרה:</u> (אינדקס)

<u>אינדקס</u> של a סביב ל-γ הוא: $n(\gamma,a) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ ← מספר שלם

(בהנחות הקודמות: γ מסילה סגורה, $a \notin \gamma$)

<u>תכונות:</u>

(1) $n(-\gamma,a) = -n(\gamma,a)$.

(2) אם γ מוכלת בעיגול פתוח D ו- $a \notin D$,

אז $n(\gamma,a) = 0$

(כי $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0$ כי קיימת קדומה לפונ' $f(z) = \frac{1}{z-a}$
שהיא פונ' אנליטית ב-D, ועבור המסילה:
γ שמוכלת ב-D)

17/12/09

מרוכבות - שיעור 18

תזכורת:

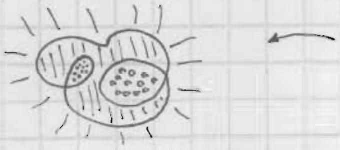
γ מסלול סגור, $a\notin\gamma$. ראינו כי $n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}$ הוא מספר שלם ואמרנו שזה מספר הפעמים שהמסלול γ מקיף את a (winding number).

נתבונן במשלים של (תמונת) γ ב-$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. כיוון שתמונת γ סגורה, משלים זה פתוח. לכן הוא המשלים כאיחוד (זר) של מרכיבי קשירות, ואלה גם פתוחים (כי רכיב קשיר של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח). נסמן ב-L את המרכיב הקשיר של $\{\infty\}$.

מכאן $\mathbb{C}\setminus(L\setminus\{\infty\}) = (\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus L$ וזו קבוצה סגורה וחסומה. היא גם קשירה (תרגיל קל).

(*) $L\setminus\{\infty\}$ = המרכיב האינסופי של המשלים של γ ב-$\mathbb{C}$, שהוא קב' פתוחה וקשירה (=תחום)

שאר המרכיבים הקשירים של $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ (=שאר המרכיבים הקשירים של $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus\gamma$) הם תחו
חסומים, ולכן, באופן כללי, המשלים של γ ב-$\mathbb{C}$ הוא איחוד של מרכיבים קשירים (ולכן ז
תחומים) שבדיוק אחד מהם אינו חסום.



למה:

האינדקס $n(\gamma,a)$ $a\longmapsto$ (פונקציה של $\mathbb{C}\setminus\gamma$) קבוע על כל מרכיב קשיר של $\mathbb{C}\setminus\gamma$, והוא אפס על המרכיב האינסופי.

הוכחה:

א. U מרכיב קשיר של $\mathbb{C}\setminus\gamma$. U הוא תחום ולכן כל שתי נק' $a,b\in U$ ניתנות לחיבור ע"י קו שבור המוכל ב-U. לכן די להראות לכל $a,b\in U$ כך שהקטע מ-a ל-b מוכל ב-U, כי $n(\gamma,a)=n(\gamma,b)$. אז נניח $I_{a,b}=\{a+t(b-a)\mid 0\le t\le 1\}\subseteq U$ ($a,b\in U$). נראה ש-

ב-$\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$ מוגדר $\log\frac{z-a}{z-b}$. ואז $\left(\text{Log}\frac{z-a}{z-b}\right)'=\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}$ $z\in\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$
תחום המכיל γ

ולכן: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz=0$ כאנטי-נגזרת של הפונ' $\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}$ בתחום $\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$, שם יש לה קדומה אנליטית (כי γ סגורה). ז"א $n(\gamma,a)-n(\gamma,b)=0$.

לכן מה נשאר: ש-Log מוגדר אם נקבל כנדרש:

נראה כי ש-$z\in\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$ מתקיים: $\frac{z-a}{z-b}\not\le 0$. נניח בשלילה שכן, אז $\frac{z-a}{z-b}=s$, $s\in\mathbb{R}$, $s\le 0$

אז $z=\frac{a}{1-s}-\frac{sb}{1-s}\;\overset{\text{ניתן לחלק כי}}{\underset{s\neq 1}{\Longleftarrow}}\;(1-s)z=a-sb \Longleftarrow z-a=sz-sb$

ולכן $z=\frac{a(1-s+s)}{1-s}-\frac{s}{1-s}b=\frac{s}{1-s}a+a-\frac{s}{1-s}b$ כלומר $z=a+\frac{s}{s-1}(b-a)$, ו- $s\le 0$

ולכן $0\le\frac{s}{s-1}<1$ ואז $z\in I_{a,b}$, בסתירה לבחירת z. לכן $\frac{z-a}{z-b}\not\le 0$.

לכן הענף הראשי של Log מוגדר, ולכן נקבל כנדרש.

כעת נוכיח אפס במרכיב האינסופי.

אם a במרכיב האינסופי, אז ברור ש- $n(\gamma,a)$ קבוע עם אפשר לבחור a כך ש- $|a|\geq R$

ו- γ מוכלת בעיגול סביב הראשית ברדיוס R. ואז ראינו כי $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=0$ ולכן $n(\gamma,a)=0$.

נוסחת האינטגרל של קושי

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול פתוח D. תהי $a\in D$, אז $f(z)$ גזירה ב-a.

נגדיר ב- $F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, $z\in D\setminus\{a\}$. מתקיים $\lim_{z\to a}F(z)=f'(a)$. נגדיר את $F(z)$ גם ב- $z=a$ ע"י $F(a)=f'(a)$. אז $F(z)$ רציפה ב-D, ובנוסף $F(z)$ אנליטית ב- $D\setminus\{a\}$ (כמנה של פונ' גזירות), ולכן ממשפט קושי בעיגול (המשופר קצת שלו)

נקבל $\int_\gamma F(z)\,dz=0$ לכל מסילה סגורה γ שמוכלת ב-D כמו קודם.

$$\int_\gamma \frac{F(z)-F(a)}{z-a}dz=0 \Rightarrow \int_\gamma \frac{F(z)}{z-a}dz-F(a)\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=0 \Rightarrow \int_\gamma\frac{F(z)}{z-a}dz=2\pi i\cdot n(\gamma,a)F(a)$$

ונקבל את נוסחת האינטגרל של קושי:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = n(\gamma,a)\cdot f(a)}$$

(עם γ מסילה סגורה שמוכלת ב-D כמו קודם)

משפט: (נוסחת האינטגרל של קושי) סיכום

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בעיגול פתוח D. אז לכל $a\in D$ ולכל מסילה סגורה γ שמוכלת ב-D כמו קודם מתקיים:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz=n(\gamma,a)f(a)$$

דוגמא: $\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3+z}dz=?$ נשים לב ש- $\frac{1}{z(z+i)(z-i)}=\frac{1}{z}-\frac{1/2}{z-i}-\frac{1/2}{z+i}$

$$\Rightarrow \int_{|z|=2}\frac{\cos z}{\underset{z(z+i)(z-i)}{z^3+z}}dz=\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}dz-\frac{1}{2}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-i}dz-\frac{1}{2}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z+i}dz$$

0, i ו- -i בתוך מעגל
ברדיוס 2, ולכן לפי
נוסחת האינטגרל של קושי
[illegible]

$$=2\pi i\left[\cos 0-\frac{1}{2}\cos i-\frac{1}{2}\cos(-i)\right]$$

$$=2\pi i(1-\cos i)\underset{\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{=}2\pi i\cdot\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\pi i(1-e^{-1}-e)$$

22/12/09

מרוכבות - שיעור 19

משפט:

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום U.

אז $f'(z)$ אנליטית ב-U, ולכן $f(z)$ גזירה אינסוף פעמים ב-U.

יתר על כן, תהי $z\in U$ ויהי D עיגול פתוח כך ש- $z\in D\subseteq U$, ויהי C מעגל המוכל ב-D ומקיף את z. אז לכל טבעי נקבל:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

הוכחה:

יהיו C, D ו-z כנ"ל. מנוסחת האינטגרל של קושי $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ $(n(C,z)=1)$

פורמלית, נגזור לפי z בתוך האינטגרל:

$$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\rightarrow \text{מה שרצינו}$$

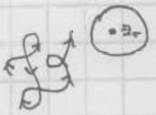
ולכן נותר רק להצדיק גזירה בתוך האינטגרל:

את זה נעשה בעזרת הלמה הבאה.

למה: נתונה פונקציה רציפה $\varphi(\zeta)$ על γ. נגדיר ל-m טבעי: $F_m(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$

עבור $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$. אז $F_m(z)$ אנליטית ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$ וגם $F'_m(z)=m\cdot F_{m+1}(z)$

הוכחה: (באינדוקציה על m)



עבור $m=1$: ראשית נראה כי F_1 רציפה (ב- $\mathbb{C}\setminus\gamma$). תהי $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$.

γ קטע סגור (כי קטע סגור מכיל z_0 ב- γ מסלול - סגורה, ולכן $\mathbb{C}\setminus\gamma$ - פתוחה, ולכן קיים

לה כך קיים עיגול פתוח. ונקח עיגול הפתוח ז"א עיגול סגור קטן יותר) ברדיוס δ מרכז z_0,

אשר מוכל ב- $\mathbb{C}\setminus\gamma$. עבור z כך ש $|z-z_0|<\frac{\delta}{2}$. אז

$$F_1(z)-F_1(z_0)=$$

$$=\int_\gamma\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}\right)d\zeta=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)\cdot(z-z_0)}{(\zeta-z)\cdot(\zeta-z_0)}d\zeta \quad (*)$$

$$\Longrightarrow|F_1(z)-F_1(z_0)|=|z-z_0|\cdot\left|\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta\right|\leq|z-z_0|\cdot\max_{\zeta\in\gamma}\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z|\cdot|\zeta-z_0|}\cdot l(\gamma)$$

אבל $|\zeta-z_0|>\delta$ ולכן $|\zeta-z|=|\zeta-z_0-(z-z_0)|\geq|\zeta-z_0|-|z-z_0|>\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}$

$$\Longrightarrow|F_1(z)-F_1(z_0)|\leq|z-z_0|\cdot\frac{2}{\delta}\cdot l(\gamma)\cdot\underset{\max_{\zeta\in\gamma}|\varphi(\zeta)|}{\overset{\shortparallel}{M}}\xrightarrow{z\to z_0}0$$

וכן $(*)$: נחלק ב- $(z-z_0)$

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}=\int_\gamma\frac{\overbrace{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}^{=\varphi_1(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta\xrightarrow[\text{מרציפות על }\gamma]{z\to z_0}\int_\gamma\frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta$$

$$=F_2(z_0)$$

זה אחרי שהוכחנו רציפות נחליף את $\varphi(\zeta)$ ב- $\varphi_1(\zeta)$.

(שהראינו שלכל $\varphi(\zeta)$ רציפה על γ: $\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ רציפה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$)

צעד האינדוקציה:

נניח ש לכל פונ' רציפה $g(\zeta)$ על γ מתקיים $z\mapsto\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta$ גזירה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$ ונגזרתה היא

$(m-1)\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$, ונוכיח עבור m.

ראשית, נראה כי $F_m(z)$ רציפה: יהי z_0 ו-δ כמו קודם. באותו אופן כמו קודם:

$$F_m(z)-F_m(z_0)=\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^m}d\zeta=$$

$$=\underbrace{\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta}+\underbrace{\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^m}d\zeta}=$$

$$=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{m-1}}\cdot\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)d\zeta+\left(\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta\right)=$$

$$=(z-z_0)\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m(\zeta-z_0)}d\zeta+\underbrace{\left(\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta\right)}_{X}\quad(*)$$

מהנחת האינדוקציה עבור הפונ' $g(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}$, הפונקציה: $z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta$ רציפה, ולכן רציפה (ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$)

ולכן $X\xrightarrow[z\to z_0]{}0$. כעת נבדוק את המחובר הראשון. כמו קודם:

$\max_{\zeta\in\gamma}|\varphi(\zeta)|=M$, $|\zeta-z_0|>\delta$, $|\zeta-z|>\frac{\delta}{2}$.

$\Rightarrow |\text{המחובר הראשון}|\le|z-z_0|\cdot m\cdot l(\gamma)\cdot\frac{2^m}{\delta^{m+1}}\xrightarrow[z\to z_0]{}0$

לכן הראינו כי לכל פונ' רציפה $\varphi(\zeta)$ על γ, הפונ' $z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$ רציפה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

נחלק את (*) ב-$(z-z_0)$:

$$\frac{F_m(z)-F_m(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^m}d\zeta+\frac{1}{z-z_0}\left(\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta\right)$$

לפי מה שהראינו (ש-$z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$ רציפה) עבור הפונ' $\varphi_1(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}$ נקבל ש-$z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi_1(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$ רציפה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$, ולכן $\xrightarrow[z\to z_0]{}\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}d\zeta$. (זהו המחובר הראשון במשוואה הנ"ל)

כמו כן, לפי הנחת האינדוקציה (עבור $\varphi_1(\zeta)$) נקבל ש-$z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi_1(\zeta)}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta$ גזירה ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$,

ונגזרתה ב-z_0 היא $(m-1)\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}d\zeta$. (זה המחובר בסוגריים במשוואה הנ"ל)

ולכן מהמשוואה הנ"ל נקבל כי הנגזרת של $F_m(z)$ ב-z_0 (קיימת) ושווה $mF_{m+1}(z_0)=m\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}d\zeta$

▨

[illegible]

משפט מוררה: (Morera)

יהי $f(z)$ פונ' רציפה בתחום U. נניח כי $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=0$, לכל מסילה סגורה γ המוכלת ב-U. אז $f(z)$ אנליטית ב-U.

הוכחה:

ראינו כי תנאי המשפט גורר של-$f(z)$ יש קדומה אנליטית $F(z)$ ב-U : $F'(z)=f(z)$ ב-U

מהמשפט הקודם, אז $F'(z)$ אנליטית ב-U, ולכן $f(z)$ אנליטית ב-U. ▨

הגדרה: (פונקציה שלמה)

פונקציה אנליטית בכל המישור נקראת פונקציה שלמה.

משפט ליוביל:

פונקציה שלמה וחסומה היא קבועה.

הוכחה:

נניח כי $f(z)$ היא פונקציה שלמה, וחסומה $|f(z)| \le M$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

יהי $z_0\in\mathbb{C}$, ויהי C_r מעגל ברדיוס r סביב z_0. נשים לב כי $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta$

אז $|f'(z_0)| \le \frac{2\pi r}{2\pi}\cdot\max_{\zeta\in C_r}\frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|\zeta-z_0|^2}_{=r^2}} = \frac{1}{r}\cdot\max_{\zeta\in C_r}|f(\zeta)| \le \frac{M}{r}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$

ולכן $f'(z_0)=0$ $\forall z_0\in\mathbb{C}$. כלומר $f'=0$ ב-$\mathbb{C}$, ולכן f קבועה. ∎

הערכות קושי:

נניח כי $f(z)$ היא פונקציה שלמה. יהי $C=C_{r,z}$ מעגל ברדיוס r סביב z.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\frac{\boxed{\max_{\zeta\in C_{r,z}}|f(\zeta)|}}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n}\cdot M_{r,z}$$

נסמן $M_{r,z}$

המשפט היסודי של האלגברה

לכל פולינום $p(z)$ (מעל $\mathbb{C}$) ממעלה חיובית יש שורש ב-$\mathbb{C}$.

הוכחה:

נניח בשלילה כי $p(z)\ne 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$. אז $f(z)=\frac{1}{p(z)}$ שלמה (מנה של שלמות [פולינומים])

אין סינגולריות

$f(z)$ חסומה במישור כי אם נכתוב $p(z)=a_nz^n+\dots+a_1z+a_0$ $(a_n\ne0)$ אז

$\frac{1}{p(z)}=\frac{1}{z^n(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n})}$. ונזכור כי $a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\xrightarrow[z\to\infty]{}a_n$.

לכן, (כיוון ש-$a_n\ne0$) קיים $R>0$ כך ש- $|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}|\ge\frac{|a_n|}{2}$ לכל $|z|\ge R$. (מהגדרת הגבול ב-∞)

לכל $|z|\ge R$: $\Rightarrow |p(z)|\ge|z|^n\cdot\frac{|a_n|}{2}\ge R^n\cdot\frac{|a_n|}{2}$ $\qquad\Rightarrow |f(z)|\le\frac{2}{|a_n|R^n}$ → חסום עבור R מספיק גדול $(|z|\ge R)$

וכיוון ש- $|z|\le R$ הוא קבוצה סגורה וחסומה, אז מרציפות $f(z)$ יש חסם $L>0$ כך ש- $|f(z)|\le L$ לכל $|z|\le R$.

⇐ $f(z)$ חסומה במישור כולו. ⇐ ממשפט ליוביל $f(z)$ קבועה, ולכן גם $p(z)$ קבוע, בסתירה! ∎

דוגמא:

$$\int_{|z|=\frac12}\frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz=\int_{|z|=\frac12}\frac{\overset{f(z)}{\boxed{\frac{\cos z}{z-1}}}}{(z-0)^2}\,dz=2\pi i\,f'(0)$$

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz \qquad =2\pi i\cdot\frac{\sin z\cdot(z-1)-\cos z}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0}=-2\pi i$$

דוגמא:

$$\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^2(z-1)}=\text{פירוק לשברים חלקיים}=\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-1}\,dz-\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}\,dz-\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^2}\,dz$$

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$$

$$\left(f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz\right)\qquad =2\pi i\left[\cos 1-\cos 0-(\cos z)'|_{z=0}\right]=2\pi i(\cos 1-1)$$

מרוכבות - תרגול 10

22/12/09

נוסחת קושי:

f אנליטית בתחום U, $a\in U$, γ - מסילה ההומוטופית לנק' סגורה a שאינה ב-U,

אז
$$\boxed{\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\cdot n(\gamma,a)\cdot f(a)}$$
מספר הקפות

מסקנות:

(1) נוסחת קושי לנגזרת ה-n-ית:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

כאשר C מסלול סביב a (המוכל ב-U)

(2) משפט ליוביל:

f שלמה (אנליטית בכל ℂ) וחסומה, אז f קבועה.

תרגיל 1: $I \underset{\text{נסמן}}{=} \int_{|z|=2}\frac{e^z/(z-3)^2}{z+1}\,dz = \int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z+1)(z-3)^2}\,dz$. הפונקציה $e^z/(z-3)^2$ אנליטית

ב- $\{|z|<2\frac{1}{2}\}$, ולכן מנוסחת קושי נקבל $(a=-1)$ $I=\left[e^z/(z-3)^2\right]_{z=-1}\cdot 2\pi i = \frac{e^{-1}}{16}\cdot 2\pi i = \frac{\pi i}{8\cdot e}$

תרגיל 2: חשב את $\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt$.

$$\int_0^\infty\frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t^2+1}\,dt \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t^2+1}\,dt$$

[כי sin אי-זוגית (ה-sin-ית) ולכן החלק המדומה מתאפס]

נקח מסילה (סגורה)

נקבל:

$$\int_{\gamma_r}\frac{e^{i\pi}}{z^2+1}\,dz = \int_{-r}^{r}\frac{e^{it}}{t^2+1}\,dt + \underbrace{\int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}}{1+r^2e^{2it}}\cdot ire^{it}\,dt}_{J}$$

[כי על חצי המעגל, $z(t)=re^{it}$ ו- $z'(t)=ire^{it}$, ועל הישר [illegible]]

נראה שהאינטגרל הזה שואף ל-0 כש- $r\to\infty$:

$$|J|\le\int_0^\pi\left|\frac{e^{ire^{it}}}{1+r^2e^{2it}}\right|\cdot r\cdot dt = r\cdot\int_0^\pi\frac{e^{-r\sin t}}{|1+r^2e^{2it}|}\,dt$$

הערה: $|1+r^2e^{2it}| \underset{|a+bi|}{=} \sqrt{(1+r^2\cos 2t)^2+(r^2\sin 2t)^2} = \sqrt{1+r^4+2r^2\cos 2t} \ge \sqrt{1-2r^2+r^4} = |1-r^2|$

$$\Rightarrow |J|\le\frac{r}{r^2-1}\cdot\underbrace{\int_0^\pi e^{-r\sin t}\,dt}_{=2\int_0^{\pi/2}e^{-r\sin t}} \underset{\downarrow}{\le} \frac{2r}{r^2-1}\underbrace{\int_0^{\pi/2}e^{-\frac{2}{\pi}rt}\,dt}_{\text{חסום}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

לכן $|J|\to 0$ ולכן

$$\int_{\gamma_r}\frac{e^{i\pi}}{z^2+1}\,dz = \int_{\gamma_r}\frac{e^{i\pi}/(z+i)}{z-i} \underset{\text{נוסחת קושי}}{=} 2\pi i\cdot 1\cdot\frac{e^{iz}}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{2\pi i e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

a=i נמצא בתוך הלולאה

ולא a=-i

לכן, כאשר נשאיף $r\to\infty$ נקבל ש $\int_0^\infty\frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e}$

טענה:

f, g אנליטיות בתחום U, ויהי $D\subseteq U$ תחום. נניח כי $f|_{\partial D} = g|_{\partial D}$

אז $f|_D = g|_D$.

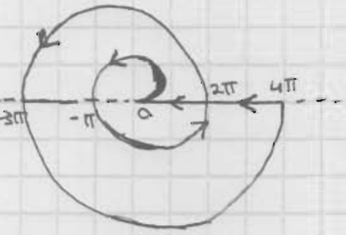
הוכחה:

מנוסחת קושי $\forall a\in \underbrace{B}_{int(D)}.\ f(a) \underset{\text{קושי}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g(z)}{z-a}dz \underset{\text{קושי}}{=} g(a)$ ∎

תרגיל 3: חשב $\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z+1)(z+4)}dz$, כש-$\gamma$ היא המסילה $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$

כאשר $\gamma_1: z(t)=te^{it}$, $\gamma_2: z(t)=$ קטע ישר מ-4π ל-0, כש-$0\le t\le 4\pi$.

פתרון:



נשים לב ש- $\frac{1}{(z+1)(z+4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+4}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\cdot\int_\gamma \frac{z^2+1}{z+1}dz - \frac{1}{3}\int_\gamma\frac{z^2+1}{z+4}dz =$$

$$\overset{\text{קושי}}{=} \frac{1}{3}\cdot 2\pi i\left[\underset{n(\gamma,-1)}{2}\cdot((-1)^2+1) - \underset{n(\gamma,-4)}{1}\cdot((-4)^2+1)\right] = -\frac{26\pi i}{3}$$

24/12/09

מרוכבות - שיעור 26

משפט טיילור:

תהי f(z) פונקציה אנליטית בתחום U. תהי $z_0 \in U$, אם נסמן דיסק פתוח D סביב z_0 (מרכזו z_0) שמוכל ב-U מתקיים:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n} \quad (z\in D)$$

(והטור מתכנס בהחלט ב-D)

הוכחה:

תהי $z\in D$. נקח דיסק סגור B ברדיוס R סביב z_0 כך ש- $B\subseteq D$, $z\in\mathring{B}$

מנוסחת קושי: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. אבל,

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(\zeta-z_0)(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0})}$$

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R}<1 \underset{\text{טור הנדסי}}{=} \frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\right)d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right](z-z_0)^n$$

כדי להצדיק את המעבר, נראה כי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$ מתכנס במ"ש על $|\zeta-z_0|=R$.

נביט ב- $\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\cdot\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n \underset{|\zeta-z_0|=R}{\leq} \frac{M}{R}\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)^n$ כש- $M=\max_{|\zeta-z_0|=R}|f(\zeta)|$, ו- $|z-z_0|<R$ ולכן $\frac{|z-z_0|}{R}<1$

ולכן זהו איבר כללי של טור הנדסי מתכנס, כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{R}\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)^n$ מתכנס (ויר"ש.).

לכן חסמנו מלמעלה את הטור המקורי ע"י טור של קבועים (בלי ה-ζ) המתכנס, ולכן

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$ מתכנס במ"ש על המעגל. ☒

שארית טור טיילור

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k+S_n(z,\zeta)\right]d\zeta = \text{[illegible]} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+r_m(z)$$

כש- $r_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k}_{\text{טור הנדסי}}\right]d\zeta$ $\rightarrow \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$ $\swarrow \frac{\zeta-z_0}{\zeta-z}$

$q^n+q^{n+1}+\dots=q^n\cdot\frac{1}{1-q}$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\cdot\frac{\zeta-z_0}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^k(\zeta-z)}d\zeta\right]\cdot(z-z_0)^k$$

לכן, המחובר של מקדם k בטור טיילור:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^k(\zeta-z_0)}d\zeta\cdot(z-z_0)^k}$$

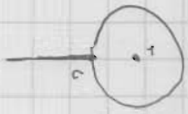
הערות:

נניח כי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^k$ הוא טור חזקות כלשהו עם רדיוס התכנסות R_0. אז הטור הזה הוא

טור טיילור של f(z) סביב z_0 בתחום התכנסותו כולו. ואכן יוצא כבר ש- f(z) אנליטית

בעיגול הפתוח הגדול $(|z-z_0|<R_0)$. יתר על כן, ראינו כי $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

ולכן $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ כאשר $|z-z_0|<R_0$.



דוגמה:

$f(z) = \mathrm{Log}\, z$, $z_0=1$. סביב $z_0=1$: $(n\geq 0)$ $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$.

אז $f(1)=0$, $f'(z)=\frac{1}{z}$, ..., $f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{z^n}$ ולכן $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}\, z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(z-1)^n$$ ב- $|z-1|<1$

משפט:

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום U. יהי $z_0 \in U$. נניח כי $f^{(n)}(z_0)=0$, $\forall n\geq 1$.

אז $f(z)$ קבועה בתחום U.

הוכחה:

יהי D עיגול פתוח סביב z_0 המוכל ב-U. אז לכל $z\in D$:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0)$, ולכן $f(z)$ קבועה ב-D, ומכאן לכל $z\in D$

מתקיים $f^{(n)}(z) = 0$ (ולא רק עבור z_0 אלא בעיגול). כעת,

נגדיר $U_1 = \{z\in U \mid f^{(n)}(z)=0 \ \forall n\geq 1\}$, $U_2 = U\setminus U_1$.

U_1 פתוחה, כי הראינו בקודם (בהוכחה לעיל), שלכל $z_0' \in U_1$ יש עיגול

פתוח D' סביב z_0' שמוכל ב-U, וכך ש-$f(z)$ קבועה על D', ולכן $f^{(n)}(z)=0$

על D', ולכן $D' \subseteq U_1$.

U_1 סגורה, כי $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq U_1$ מתכנסת ל-$a\in U$, אז מרציפות $f^{(n)}$:

$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f^{(n)}(z_k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} f^{(n)}(a)$ ואז $f^{(n)}(a)=0$ לכל $n\geq 1$,

כיוון ש-U קשיר, $U_1=\emptyset$ או $U_2=\emptyset$. אבל $z_0\in U_1$ $\Leftarrow$ $U=U_1$

$\Leftarrow$ $f'(z)=0$ לכל $z\in U$ $\Leftarrow$ f קבועה על U. ⊠

29/12/09

מרוכבות - שעור 12

מסקנה: יהי $f(z)$ פונקציה אנליטית, לא קבועה, בתחום U, ו- $z_0\in U$ נק' אפס של $f(z)$: $f(z_0)=0$.
אז יש n טבעי ראשון כך ש- $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ (כי אחרת לפי משפט מהשיעור שעבר f קבועה)

הגדרה: במקרה כזה נאמר כי z_0 היא אפס מסדר n של $f(z)$.

הערה: מפיתוח טיילור של $f(z)$ סביב z_0: $f(z)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}+\dots$ (בעיגול כלשהו D סביב z_0 אשר מוכל ב-U)
אז בעיגול D: $f(z)=(z-z_0)^n f_n(z)$ כש- $f_n(z)=\underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{:=a_0}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}}_{:=a_1}+\dots$. [מקדמים a_0, a_1 מתאימים]
$f_n(z)$ היא פונקציה אנליטית ב-D כך ש- $f_n(z_0)\neq 0$. מרציפות $f_n(z)$: $f_n(z)\neq 0$ בסביבה (מנוקבת) של z_0. נגדיר $g(z)$ בתחום U: $g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{(z-z_0)^n} & U\ni z\neq z_0\\ f_n(z_0) & z=z_0\end{cases}$. ברור כי בעיגול D
$g(z)=f_n(z)$ ולכן אנליטית ב-D. $g(z)$ אנליטית גם מחוץ ל-D (בתחום U) כי שם $z\neq z_0$
ולכל z כזה $\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ גזירה. $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$, ו- $g(z)$ אנליטית ב-U ואינה
מתאפסת בסביבה (מנוקבת) של z_0.

משפט:
יהי $f(z)$ פונקציה אנליטית, לא קבועה, בתחום U. אז האפסים של $f(z)$ מבודדים.
כלומר לכל אפס של $f(z)$, z_0, יש סביבה $V_{z_0}\subseteq U$ של z_0 כך ש- z_0 הוא האפס היחיד של $f(z)$ ב- V_{z_0} $\left(\begin{cases}f(z)=0\\ z\in V_{z_0}\end{cases}\Longleftrightarrow z=z_0\right)$

הוכחה:
נניח כי $z_0\in U$ הוא אפס של $f(z)$. נניח כי z_0 הוא אפס מסדר $n\geq 1$.
נפרק, כמו קודם, $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$. יש סביבה $V_{z_0}\subseteq U$ של z_0 כך ש- $g(z)\neq 0$,
לכל $z\in V_{z_0}$, ולכן, לכל $z\in V_{z_0}$, $\underset{(z-z_0)^n g(z)}{\overset{}{f(z)}}=0\Longleftrightarrow z=z_0$. $\boxtimes$

משפט:
יהי $f(z)$ פונ' אנליטית בתחום U. נניח כי יש סדרה אינסופית $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq U$ המתכנסת
לנק' ב-U, כך שלכל k, z_k הוא אפס של $f(z)$ (כלומר $f(z_k)=0$ לכל k, ו- $z_k\xrightarrow[k\to\infty]{}a\in U$.)
אז $f(z)=0$ זהותית ב-U.

הוכחה:
מרציפות $f(z)$: $0=f(z_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}f(a)$ ולכן a הוא אפס של $f(z)$. כיוון שבכל סביבה של a
יש אפסים של $f(z)$ (איברי הסדרה החל ממקום מסוים), ולכן a אינו אפס מבודד של f.
נובע כי f קבועה על U ולכן f היא זהותית אפס על U. $\boxtimes$

מסקנה:

משפט:

תהיינה $f_1(z), f_2(z)$ שתי פונקציות אנליטיות בתחום U. אם f_1,f_2 שוות על סדרת נקודות מתכנסת ב-U. אז f_1,f_2 שוות על כל U.

דוגמה: $f(z)=z^2(e^z-1)$, $z=0$ הוא אפס מסדר 3: $f(z)=z^2(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots)=\underbrace{z^3}_{\text{אפס מסדר 3}}(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots)$

$z=1$ הוא אפס מסדר 1: $\text{Log}\, z=z-1-\frac{(z-1)^2}{2}+\dots$.

מסקנה: (תרגיל) לפונקציה אנליטית לא קבועה בתחום U יש לכל היותר מספר בן-מניה של אפסים.
(הנקודות [illegible] - U = [illegible])

- תהי $f(z)$ אנליטית במעגל פתוח D. נניח כי ל-$f(z)$ יש מספר סופי של אפסים ב-D: $z_1,\dots,z_n$, [illegible]. אזי: $f(z)=(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)\cdot g(z)$ כש-$g(z)$ אנליטית ב-D ולא מתאפסת בכלל. נקח נגזרת לוגריתמית: $\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-z_1}+\dots+\frac{1}{z-z_n}+\underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{אנליטית ב-D}}$ $(z\neq z_1,\dots,z_n)$.
יהי γ מסלול סגור ב-D כך ש-$z_j\notin\gamma$ לכל $n\geq j$. אז $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_j}+\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g'(z)}{g(z)}dz}_{0\leftarrow\text{משפט קושי במעגל}}$
ולכן
$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}n(\gamma,z_j)}=\sum_{\{z:f(z)=0,\ z\in D\}}n(\gamma,z)$$

- תהי $f(z)$ אנליטית (לא קבועה) במעגל פתוח D. נניח כי ל-$f(z)$ יש סדרת אפסים $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ ב-D (נספרים כולל ריבוי).
יהי γ מסלול סגור ב-D ונניח שהוא לא עובר דרך אף אחד מאפסי f ($z_j\notin\gamma$ לכל j).
כיוון ש-γ מסילה רציפה, יש מעגל פתוח $D'\subsetneq D$ כך ש-$\gamma\subseteq D'$ (למשל, נסמן ב-z_0 את מרכז D.
נניח כי γ נתונה ע"י $z(t)$, $(a\leq t\leq b)$. אז נקח $R=\max_{a\leq t\leq b}|z(t)-z_0|$, אז ברור כי $\text{Im}(\gamma)\subseteq\{z:|z-z_0|\leq R\}$ $\subset D$ ← [illegible] D' מעגל פתוח; סביב z_0 ברדיוס $R+\varepsilon$ [illegible])
כיוון ש-$\bar{D}'$ קומפקטי, יש ל-$f(z)$ מספר סופי של אפסים ב-$\bar{D}'$ (ולכן ב-D'),
ולכן $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{z_j\in D'}n(\gamma,z_j)$, ומאידך $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{\infty}n(\gamma,z_j)$, כי לכל j עם $z_j\notin D'$ מתקיים $n(\gamma,z_j)=0$ כי γ מוכלת ב-D'. $=\sum_{D\ni z:f(z)=0}n(\gamma,z)$.

פירוש של הנוסחה: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{\infty}n(\gamma,z_j)$ ← נסמן $\gamma=z(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$.

אגף שמאל $=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{f'(z(t))z'(t)}{f(z(t))}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\underset{\text{תמונת }\gamma\text{ ע"י }f}{\Gamma}}\frac{dz}{z}=n(\Gamma,0)\underset{\text{לכן}}{\Longrightarrow}n(\Gamma,0)=\sum_{j=1}^{\infty}n(\gamma,z_j)$

מקרה פרטי: אם γ, $n(\gamma,z)=0$ (לכל מחוץ ל-γ).

לכן: מספר האפסים של $f(z)$ ש-γ מקיפה == מספר הפעמים שתמונת γ ע"י f מקיפה את הראשית.

באופן דומה, כשמחליפים את $f(z)$ ב-$f(z)-a$ נקבל $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz=\sum_{j=1}^{\infty}n(\gamma,z_j(a))$

כאשר $\{z_j(a)\}_{j=1}^{\infty}$ היא סדרת האפסים, כולל ריבוי, של $f(z)=a$ ב-D, ו-γ היא מסילה סגורה, מוכלת ב-D כך ש-$z_j(a)\notin\gamma$ לכל j.

המשך:

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית, לא קבועה, בסביבה פתוחה D. תהי $z_0\in D$, ונסמן $f(z_0)=a_0$.

נניח כי z_0 הוא פתרון מסדר n למשוואה (כלומר z_0 הוא אפס מסדר n לפונקציה $f(z)-a_0$)

אז לכל $\varepsilon>0$ קטן מספיק, קיים $\delta>0$, כך שלכל $a\,[a\neq a_0]$ בעיגול הפתוח ברדיוס δ סביב a_0,

יש למשוואה $f(z)=a$ בדיוק n פתרונות שונים בעיגול הפתוח ברדיוס ε סביב z_0.

הוכחה:

כיוון ש-z_0 הוא אפס מבודד של $f(z)-a_0$ יש $\varepsilon_0>0$ כך ש-z_0 הוא הפתרון היחיד למשוואה $f(a)=a_0$ בעיגול הפתוח $|z-z_0|<\varepsilon_0$. יהי $0<\varepsilon<\varepsilon_0$. אז בעיגול $|z-z_0|\leq\varepsilon$, z_0 הוא הפתרון היחיד למשוואה $f(z)=a_0$. אם ישנו צורך, נקטין את ε עוד יותר כך ש: אם $n\geq2$, אז z_0 הפתרון היחיד למשוואה $f'(z)=0$ בעיגול $|z-z_0|<\varepsilon_0$ (כיוון ש-f' אנליטית ולא זהותית אפס, אז אפסיה מבודדים). אם $n=1$, אז $f'(z_0)\neq0$, ובגלל רציפות $f'(z)\neq0$ לכל z בעיגול $|z-z_0|<\varepsilon_0$.

יהי γ המעגל $|z-z_0|<\varepsilon$. מהגדרת ε, $f(z)\neq a_0$ לכל z על המעגל. כלומר

$\Gamma=$ תמונת γ תחת f. $a_0\notin\Gamma$. כיוון ש-Γ קבוצה סגורה, המשלים שלה פתוח, קיים $\delta>0$ כך ש:

המשלים של $\Gamma\supseteq D_\delta(a_0)$ - העיגול הפתוח ברדיוס δ סביב נק' a_0. $D_\delta(a_0)$ קב' קשירה, ולכן מוכלת ברכיב קשירות של $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. ולכן $n(\Gamma,a)=n(\Gamma,a_0)$ לכל $a\in D_\delta(a_0)$.

אבל $n(\Gamma,a_0)=n$.

המשך ההוכחה בעמוד הבא.

29/12/08

מרוכבות - הרצאה 11

טורי טיילור

תזכורת: f אנליטית ב- $D=\{|z-z_0|<r\}$, אז קיים לה פיתוח טיילור מסביב (יחיד כמובן)

$|z-z_0|<r$ נכון $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

תרגיל: פתחו את $f(z)$ לטור טיילור סביב z_0:

א. $f(z)=\frac{1}{1-z}$, $z_0=2$:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-(z-2)-2}=\frac{-1}{1+(z-2)}$$

הערה: זה בדיוק הפיתוח,

$$\underset{q=-(z-2)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-2)^n \rightarrow \text{פיתוח טיילור} \quad \left[|q|<1,\ q\in\mathbb{C},\ \frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right]$$

$|z-2|<1$ — טור הנדסי.

כי אם יש פיתוח אחר (ברדיוס $1<R$) אז הפונקציות מסכימות ב- $\{|z|<1\}$, ולכן יהיו המקדמים שלהן שווים ממש.

$$\underset{1}{\sum a_nz^n}=\underset{R}{\sum b_nz^n}$$

ב. $f(z)=\frac{e^z}{1-z}$, $z_0=0$:

$$e^z\cdot\frac{1}{1-z}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1\right)\cdot z^n$$

ב-$|z|<1$ שניהם מתכנסים בהחלט

לפי מכפלת קושי: $(\sum a_nz^n)(\sum b_nz^n)=\sum(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})z^n$

הערה: פיתוח של $f(z)\cdot g(z)$:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f\cdot g)^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}_{\overset{\shortparallel}{M}}=f\cdot g\underset{\text{מכפלת קושי}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot\frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!}\right)(z-z_0)^n}_{\overset{\shortparallel}{M}}$$

תרגיל: נסמן $f(z)=z\cdot(e^z-1)$. מה הסדר של האפס $z=0$ של f?

$$z(e^z-1)=z\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=z^2+\frac{z^3}{2!}+\dots$$ ⟸ הסדר הוא 2.

תרגיל: הוכח שאין פונקציה אנליטית ב- $\{|z|<2\}$ המקיימת $f(\frac{1}{n})=\frac{(-1)^n}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

פתרון: (בשלילה)

נגדיר $g(z)=f(z)-z$. אז $\forall n\in\mathbb{N}.\ g(\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n})-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}=0$

⟸ g מתאפסת על סדרה המתכנסת לנקודה בתחום, ולכן $\underset{\text{(משפט היחידות)}}{g\equiv 0}$ ⟸ $f(z)=z$

ולכן $\frac{1}{2k+1}=f\left(\frac{1}{2k+1}\right)\underset{\text{נתון}}{=}\frac{(-1)}{2k+1}$ סתירה! ⊠

פונ' זוגית:
$f(z)=f(-z)$
ולכן $f^{(2k+1)}(0)=0$
$f^{(2k+1)}(z)=(-1)^{2k+1}f^{(2k+1)}(-z)$
$\underset{0}{f^{(2k+1)}(0)}=-\underset{0}{f^{(2k+1)}(0)}$

תרגיל: נסמן ב- $\sec(z)=\frac{1}{\cos(z)}$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. זו פונקציה זוגית,

לכן פיתוח סביב 0: [illegible] $\frac{1}{\cos(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}\cdot z^{2n}$.

הראו ש $E_{2n}-\binom{2n}{2n-2}E_{2n-2}+\binom{2n}{2n-4}E_{2n-4}-\dots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{2}E_2+\underset{(-1)^nE_0}{(-1)^n}=0$

והסיקו ש E_{2n} שלמים לכל n.

פתרון:

$\frac{1}{\cos z}\cdot\cos z=1$ ולכן $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}\cdot z^{2n}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}\right)=1+0\cdot z+0\cdot z^2+\dots$

מקדם של z^{2n}, $n\geq 1$: $\sum_{k=0}^{n}\frac{E_{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!}=0 \quad /\cdot(2n)!$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^{n-k}E_{2k}=0 \quad \rightarrow$$

נסיק באינדוקציה: ש-E_{2n} שלמים לכל n

($E_0=1$, ויש נוסחת רקורסיה עם מקדמים בינומיים)

מסקנה: תהי f אנליטית בתחום D, γ מסילה סגורה פשוטה המוכלת ב-D.

אזי:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\text{סכום האפסים של } f \text{ המוכלים ב-}\gamma=\sum_{j=1}^{N}z_j$$

z_j האפסים של f (עם ריבוי) המוכלים ב-γ

תזכורת:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum n(\gamma,z_j)\rightarrow \text{מס' האפסים}$$
$z_j: f(z_j)=0$

z_j מוכלים ב-γ

הוכחה:

ניתן לכתוב $f(z)=\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)\cdot \underset{\sim}{g(z)}$ — לא מתאפסת ב-D

z_j - כל האפסים של f ב-D (עם ריבוי)

נשים לב שמתקיים:
$$z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{z}{z-z_1}+\dots+\frac{z}{z-z_N}+z\cdot\frac{g'(z)}{g(z)}$$

ולכן
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N}\int_\gamma\frac{z}{z-z_j}dz+\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{z\,g'(z)}{g(z)}dz}_{=0}$$

$0 \rightarrow$ משפט קושי גורסה

כי $\frac{g'(z)}{g(z)}\cdot z$ אנליטית בו

ומנוסחת קושי:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{z}{z-z_j}dz=\begin{cases}0 & \gamma \text{ לא מקיף } z_j\\ z_j & \text{אחרת}\end{cases}$$

31/12/09

מרוכבות - שיעור 22

המשך ההרצאה:

f(z) - אנליטית בקבוצה פתוחה D, $z_0\in D$, $f(z_0)=a_0$. נניח כי z_0 הוא פתרון מסדר n. קיים $\varepsilon_0>0$: * z_0 הוא האפס היחיד של $f(z)-a_0$ בעיגול $|z-z_0|<\varepsilon_0$.

* בנוסף: z_0 הוא גם האפס היחיד של $f'(z)$ בעיגול. * $n=1$: $f'(z)\neq 0$ לכל z בעיגול הנ"ל.

נקבע $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ ונגדיר $\gamma:|z-z_0|=\varepsilon$. Γ = תמונת המסילה γ תחת f. $a_0\notin\Gamma$.

יש $\delta>0$ כך ש- $D_\delta(a_0)\subseteq\mathbb{C}\setminus\Gamma$. $D_\delta(a_0)$ קשיר $\Leftarrow$ $D_\delta(a_0)$ תלוי ברכיב קשר של $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

לכן, לכל $a\in D_\delta(a_0)$: $n(\Gamma,a)=n(\Gamma,a_0)$. ו- $n(\Gamma,a)=\sum_{j=1} n(\gamma,z_j(a))$, כש- z_j עובר על כל הפתרונות, כולל ריבוי, של $f(z)=a$ ב-D. לכן $n(\Gamma,a)$ = מס' הפתרונות (כולל ריבוי) של $f(z)-a$ אשר נמצאים ב- $D_\varepsilon(z_0)$.

לפי בחירת ε_0: $n(\Gamma,a_0)=n$, ולכן, לכל $a\in D_\delta(a_0)$: $n(\Gamma,a)=n$, ולכן יש n פתרונות (כולל ריבוי): $z_1,\dots,z_n$, למשוואה $f(z)=a$ אשר נמצאים ב- $D_\varepsilon(z_0)$. כאשר $a\neq a_0$, z_j מריבוי 1 (אחרת, נקבל כי $f'(z_j)=0$ ומכאן נקבל $z_j=z_0$ אבל $a=a_0$ בסתירה). לכן $z_1,\dots,z_n$ שונים זמ"ז. ⧄

מסקנה: [illegible] [illegible] [illegible]: לכל a_0 בתמונת f, יש עיגול פתוח $D_\delta(a_0)$ כך ש- $D_\delta(a_0)$ מוכל כולו בתמונת f. כלומר, תמונת f פתוחה.

משפט ההעתקה הפתוחה:

תהי f(z) פונקציה אנליטית, לא קבועה, על תחום U, אז f מעבירה קבוצה פתוחה לקבוצה פתוחה.

הוכחה:

תהי $V\subseteq U$ תת-קבוצה פתוחה. אז $V=\bigcup_\alpha D_\alpha$ כש- D_α עיגולים פתוחים. לכן $f(V)=\bigcup_\alpha f(D_\alpha)$. כמו כן, לכל α, $f|_{D_\alpha}$ אינה קבועה (כי אחרת נקבל כי f קבועה על כל U, לפי משפט יחידות) [illegible], ומהמסקנה, $f(D_\alpha)$ פתוחה לכל α. ולכן $f(V)$ פתוחה. ⧄

עקרון המקסימום:

תהי f(z) אנליטית, לא קבועה, בתחום U, אז $|f(z)|$ אינו מקבל מקס' ב-U.

הוכחה:

נסמן $V=\mathrm{Im}(f)$. אז $V\subseteq\mathbb{C}$ תחום פתוח, ו- $\{|v|:v\in V\}=\{|f(z)|:z\in U\}$ ולכן אין מקס' כי V פתוחה. ⧄

משפט:

תהי $f(z)$ פונ' אנליטית, לא קבועה, בתחום U, ותהי $K\subseteq U$ קבוצה סגורה וחסומה.

אז המקסימום של $|f(z)|$ על K מתקבל רק על ∂K.

הוכחה:

נניח בשלילה כי $|f(z)|$ מצומצם ל-K, מקבל מקס' ב- $z_0\in\mathring{K}$. לכן יש סביבה D סביב z_0,

המוכלת ב-K. כיוון ש-f אינה קבועה על U, גם $f|_D$ אינה קבועה. ולכן $|f(z)|$

מצומצם ל-K אינו מקבל מקסימום (לפי עקרון המקס') – סתירה.

לכן $|f(z)|$, מצומצם ל-K, מקבל מקסימום ב-∂K. ⧄

משפט ויירשטראס

תהי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אנליטיות בתחום U. נניח כי לכל $z\in U$ מתקיים:

$f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$. נניח כי לכל תת-קבוצה סגורה וחסומה $K\subseteq U$, $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש

ל-$f(z)$ על K. אז $f(z)$ אנליטית ב-U, וגם $f'(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(z)$ ($z\in U$),

ו- $\{f_n'(z)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $f'(z)$ במ"ש על כל קבוצה סגורה וחסומה $K\subseteq U$.

הוכחה:

תהי $a\in U$, ויהי r כך ש- $\{z\,|\,|z-a|\le r\}\subseteq U$. מנוסחת קושי, לכל $|z-a|<r$:

$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ לכל $n\ge1$. $\left\{\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על המעגל $|\zeta-a|=r$

לפונק' $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$. אך

$$\max_{|\zeta-a|=r}\left|\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|=\max_{|\zeta-a|=r}\frac{|f_n(\zeta)-f(\zeta)|}{|\zeta-z|}\le\frac{\max\limits_{|\zeta-a|=r}(|f_n(\zeta)-f(\zeta)|)}{r-|z-a|}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$|\zeta-z|\ge\underbrace{|\zeta-a|}_{r}-|z-a|$

כי המעגל $|\zeta-a|=r$ הוא קב' סגורה וחסומה

לכן נובע כי $\int\limits_{|\zeta-a|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\xrightarrow[n\to\infty]{}\int\limits_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ ולכן $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$.

ראינו, במקרה הכללי, כי אגף ימין מגדיר פונ' אנליטית של z, ולכן $f(z)$ אנליטית ב $|z-a|<r$.

זה נכון לכל $a\in U$, ולכן $f(z)$ אנליטית ב-U. מנוסחת קושי: $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$

וכמו כן $f_n'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=r}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$. אך בדיוק כמו קודם, הסדרה $\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$

מתכנסת במ"ש על המעגל $|\zeta-a|=r$ ל- $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$,

$\Longleftarrow$ $f_n'(z)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}f'(z)$ לכל $z\in U$.

ניתן להראות שהתכנסות זו היא במ"ש על כל קב' סגורה וחסומה (ללא הוכחה)

5/1/10

מרוכבות - שיעור 23

תזכורת:

משפט ויירשטרס בטורים

נתונה סדרת פונקציות אנליטיות $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ בתחום U. ונניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ מתכנס נקודתית לפונק' $f(z)$ (לכל $z\in U$). נניח כי ההתכנסות היא במ"ש על כל קבוצה סגורה וחסומה המוכלת ב-U.

אז $f(z)$ אנליטית ב-U, ו- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z) = f'(z)$,

וגם ההתכנסות מתכנס במ"ש ל- $f'(z)$ על כל קבוצה סגורה וחסומה המוכלת ב-U.

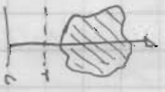
פונקצית זיטה של רימן ← דוגמא: $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, $f_n(z) = n^{-z} = \frac{1}{n^z} = e^{-z\log_e n}$. וכאן הוא מספר טבעי

בתחום $Re(z)>1$: $|n^{-z}| = |e^{-z\log n}| = e^{Re(-z\log n)} = e^{-Re(z)\log n} = n^{-Re(z)}$

ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} < \infty$ ל- $x>1$. ועכשו:

תהי K קבוצה סגורה וחסומה המוכלת בחצי המישור $Re(z)>1$. אז יש $a>1$ כך ש- $Re(z)\ge a$ לכל $z\in K$

ולכן $n^{-Re(z)} \le n^{-a}$ לכל $z\in K$.



לכן הטור מתכנס במ"ש ב- $Re(z)\ge a$, ומכאן ש- $\zeta(z)$ אנליטית ב- $Re(z)>1$, ו-

$$\zeta'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(n^{-z})' = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}\log n \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}\right)'.$$

משפט קושי הכללי

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \Leftrightarrow$$

1) רוצה למצוא תחום "כללי" U בו המשפט תמיד נכון

2) למצוא עקומים כללי של האינט' בו המשפט תמיד נכון.

- ובפרט נוכיח קושי.

הגדרה: (תחום פשוט קשר)

נאמר כי תחום U הוא פשוט קשר (simply connected) אם $(\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus U$ קשיר.

דוגמאות:

1

מעגל פתוח הוא פשוט קשר

2

איננו פשוט קשר (זה משלים של נקודה, כאשר מישור מורחב, לא קשיר)

3

רצועה מקבילה באינסוף היא פשוטת קשר

טבעת

- לא פשוט קשר

למה:

אם U תחום פשוט קשר, אז לכל מסילה סגורה γ שמוכלת ב-U מתקיים $n(\gamma,a)=0$ לכל $a\notin U$.

← $\Phi(z)$ רציפה על המעגל $|z-z_0|=r$ ולכן $\Phi(z)-\Phi(z_0) = \int_\gamma [\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t)]\,dt$

לכן $|\phi(\zeta)-\phi(\zeta_0)| \le (b-a)\cdot\max_{a\le t\le b}|\varphi(\zeta,t)-\varphi(\zeta_0,t)| \xrightarrow{\zeta\to\zeta_0} 0$, ובפרט רציפה ולכן ה- $z\mapsto\int_{|\zeta-z|=r}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ אנליטית

כי הרי φ רציפה ב- $D_0\times[a,b]$.

(D_0 = סביבה סגורה של ζ_0 שמוכלת ב-U, קומפקטית) ב-z, כנדרש,

לכן $F(z)$ אנליטית (בעיגול $|z-z_0|<r$) ולכן (גזירה):

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{1}{(\zeta-z)^2}\int_a^b\varphi(\zeta,t)\,dt\,d\zeta=\int_a^b\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{\varphi(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right)dt=\int_a^b\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)\,dt$$

משפט קושי (הכללי):

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום U. יהי γ מסילה סגורה שמוכלת ב-U, כך ש $n(\gamma,a)=0$ $\forall a\notin U$.

אז מתקיים: (א) $\int_\gamma f(z)dz=0$

(ב) $\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i\cdot n(\gamma,z)\cdot f(z)$ לכל $z\in U\setminus\gamma$.

הוכחה:

נגדיר $U'=\{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma \mid n(\gamma,z)=0\}$. לפי ההנחה: $\mathbb{C}\setminus U\subseteq U'$ ולכן $U\cup U'=\mathbb{C}$.

U' פתוחה: ראינו כי $\mathbb{C}\setminus\gamma$ הוא איחוד של רכיבים קשירים, והם מהווים פתוחים (כי רכיב קשירות של קב' פתוחה הוא פתוח).

כמו כן, ראינו כי על כל רכיב קשירות כזה האינדקס של γ קבוע. לכן U' הוא איחוד הרכיבים הקשירים של $\mathbb{C}\setminus\gamma$, שעליהם האינדקס הקבוע הוא 0. לכן U' פתוחה.

כעת, נגדיר ב- $(w,z)\in U\times U$ את $g(w,z)$ כמו בלמה 1: $g(w,z)=\begin{cases}\frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w\ne z\in U\\ f'(z) & w=z\in U\end{cases}$.

עתה נגדיר $z\in\mathbb{C}$: $h(z)=\begin{cases}\int_\gamma g(w,z)dw & z\in U\\ \int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw & z\in U'\end{cases}$. הגדרה טובה: כי $z\in U\cap U'\Rightarrow z\in U\setminus\gamma$ וגם $n(\gamma,z)=0$, ובנוסף $w\ne z$ לכל $w\in\gamma$,

ואז $g(w,z)=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ ולכן $\int_\gamma g(w,z)dw=\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw-f(z)\underbrace{\int_\gamma\frac{dw}{w-z}}_{2\pi i\cdot n(\gamma,z)=0}=\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw$

לכן ההגדרה טובה.

$h(z)$ שלמה: אם $z\in U'$ אז h אנליטית ב-z, לפי משפט קודם.

(נשים לב ש- $\int_\gamma g(w,z)dw=\int_a^b\underbrace{g(w(t),z)w'(t)}_{=\varphi(z,t)}dt$) ולפי למה 1 + למה 2: ההעתקה $z\mapsto\int_\gamma g(w,z)dw$ אנליטית ב-$z\in U$

כעת h חסומה: נניח כי $|z|$ גדול, כך ש-$n(\gamma,z)=0$, ואז $z\in U'$ ונקבל:

$|h(z)|=\left|\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw\right|\le l(\gamma)\cdot\max_{w\in\gamma}|f(w)|\cdot\max_{w\in\gamma}\frac{1}{|w-z|}\xrightarrow{|z|\to\infty}0$ ולכן $h(z)\xrightarrow{|z|\to\infty}0$.

ומכאן ש-$h(z)$ חסומה.

⟸ ממשפט ליוביל, $h(z)$ קבועה, ומכך ש- $h(z)\to 0$ נקבל $h(z)\equiv 0$ בכל המישור.

ומכאן ל- $z\in U\setminus\gamma$ נקבל $\int_\gamma\underbrace{g(w,z)}_{=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}}dw=0 \xLeftarrow{\text{נעביר } -\frac{f(z)}{w-z} \text{ לאגף}} \int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw=2\pi i\cdot f(z)\cdot n(\gamma,z)$ ☒ (נוסחת קושי)

כעת ניקח $f(w)$ את $f_1(w)=(w-z_0)f(w)$ כש- $z_0\in U\setminus\gamma$ נק' קבועה.

אז נקבל: $\int_\gamma\underset{=f(w)}{\frac{f_1(w)}{w-z_0}}dw=2\pi i\cdot\underset{=0}{f_1(z_0)}\cdot n(\gamma,z_0)=0$ ☒ (משפט קושי)

5/1/10

מרוכבות - תרגול 12

עקרון המקס'
א' ויירשטראס
א' קושי מוכלל

עקרון המקסימום

אם f אנליטית בתחום U, רציפה עד השפה (כלומר ב-$\bar{U}$) ולא קבועה,

אז $\max_{z\in\bar{U}}|f(z)|$ מתקבל רק ב-∂U (כלומר: אם המקס' מתקבל ב-U אז f קבועה)

מסקנה: נגדיר $M_f(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ $(r<R)$ כאשר f אנליטית ב-$D=\{|z|<R\}$.

אם f לא קבועה $\Longleftarrow$ $r\mapsto M_f(r)$ עולה ממש

תרגיל 1: תהי f אנליטית ב-$\{|z|<1\}$ ורציפה עד השפה. נניח שעל $|z|=1$:

$\mathrm{Im}\, z\geq 0\to|f(z)|\leq 2$ וגם $\mathrm{Im}\, z\leq 0\to|f(z)|\leq 3$.

הוכח כי $|f(0)|\leq\sqrt{6}$.

פתרון: נגדיר $g(z)=f(z)\cdot f(-z)$. אז g אנליטית ב-$\{|z|<1\}$ ורציפה ב-$\{|z|\leq 1\}$.

כעת אם על $|z|=1$: $|g(z)|=|f(z)|\cdot|f(-z)|\underset{\downarrow}{\leq}2\cdot 3=6$. ומעקרון המקסימום: $|g(z)|\leq 6$ על $|z|\leq 1$

כי אחד מהם בחצי העליון והשני בחצי התחתון

ובפרט $|f(0)|^2=|g(0)|\leq 6$ ∎

תרגיל 2: חשב:

$$\max_{|z|\leq 1}|z^2-z|\overset{\text{עקרון המקס'}}{=}\max_{|z|=1}|z^2-z|=\max_{|z|=1}\overset{1}{\overset{\shortparallel}{|z|}}|z-1|=\max_{|z|=1}|z-1|=2$$

המרחק המקס' מנק' $a=1$ במעגל

משפט ויירשטראס:

יהיו $f_n(z)$ אנליטיות בתחום U, $f_n(z)\xrightarrow{n\to\infty}f(z)$ לכל $z\in U$, והתכנסות זו היא במ"ש על כל תת קומפקטית (=סגורה וחסומה) [כלומר במ"ש מקומית]

אז גם f אנליטית, וגם $f_n'\to f'$ נקודתית ובמ"ש מקומית.

תרגיל: הוכיחו כי לכל $R<1$ קיים N כך שלכל $n>N$: ל- $P_n(z)=1+2z+\dots+(n+1)z^n$ אין אפסים ב-$\{|z|<R\}$.

פתרון: נחשב גבול נקו' כש-$n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}P_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{k+1})'$$

$$\overset{\text{משפט ויירשטראס}}{\underset{\text{עבור הנ"ל }|z|<1}{\leftarrow}}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}\right)'=\left(\frac{1}{1-z}-1\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$$

ומכיון שההתכנסות של טור הנ"ל היא במ"ש על כל תת קומפקטית,

נקבל שגם $f_n\to\frac{1}{(1-z)^2}$ במ"ש על כל תת קומפקטית (שוב לפי ויירשטראס).

נקבע $R<1$. אז לכל $\varepsilon>0$, קיים N כך שלכל $n>N$: $|P_n(z)-\frac{1}{(1-z)^2}|<\varepsilon$ $\forall|z|\leq R$.

הפונקציה $\frac{1}{(1-z)^2}$ לא מתאפסת ב-$\{|z|\leq R\}$. זו קבוצה קומפקטית, ולכן מתקבל בה

מינימום ל- $\left|\frac{1}{(1-z)^2}\right|$. נסמן $\delta=\min_{|z|\le R}\left|\frac{1}{(1-z)^2}\right|>0$. נבחר $\varepsilon=\frac{\delta}{2}$, ונשתמש ב-(*)

כי בחרנו N מתאים. אז $|P_n(z)|\ge \underbrace{\left|\frac{1}{(1-z)^2}\right|}_{\ge\delta}-\underbrace{\left|\frac{1}{(1-z)^2}-P_n(z)\right|}_{\le\frac{\delta}{2}}\ge\frac{\delta}{2}>0$

הערה: צריך התכנסות במ"ש מקומית ולא במ"ש:

דוגמה: z^n על $\{|z|<1\}$: ידוע $\forall|z|<1,\ z^n\xrightarrow{n\to\infty}0$ (נקודתית), אבל ההתכנסות לא במ"ש:

ההתכנסות אינה במ"ש $\Longleftarrow$ $\sup_{|z|<1}|z^n-0|=1\not\to 0$

אבל כן במ"ש מקומית: יהי $K\subseteq\{|z|<1\}$ קב' קומפקטית. נסמן $r=\max_{z\in K}|z| < 1$

קיים כי קב' קומפ'.

ואז $\sup_{z\in K}|z^n-0|\le\sup_{|z|\le r}|z|^n=r^n\xrightarrow{n\to\infty}0$.

משפט קושי (כללי):

U פתוח, f אנליטית ב-U, γ מסילה סגורה ב-U כך ש- $n(\gamma,a)=0\ \ \forall a\notin U$.

אז $\int_\gamma f(z)dz=0$, וכן נוסחאות קושי מתקיימות.

תרגיל: נתונה טבעת - $A=\{1<|z|<2\}$. תהי f אנליטית ב-A.

הוכיחו כי $\int_{|z|=r_1}f=\int_{|z|=r_2}f$ לכל $1<r_1<r_2<2$.

פתרון: נסמן γ כמסילה:

אז $\int_\gamma f(z)dz=\underset{\text{(נגד כיוון השעון)}}{\int_{|z|=r_1}f}-\underset{\text{(עם כיוון השעון)}}{\int_{|z|=r_2}f}$

אז $n(\gamma,a)=0$ לכל $a\notin A$.

$\Leftarrow\ \int_\gamma f=0$ לפי משפט קושי $\Leftarrow\ \int_{|z|=r_1}f=\int_{|z|=r_2}f$ ▨

תרגיל 3 (לפי עקרון המקס'): f אנליטית על קבוצה של תחום U.

הוכיחו של- $\mathrm{Re}(f)$ אין מקסימום מקומי ב-U.

פתרון:

נגדיר פונ' $g(z)=e^{f(z)}$ ← אנליטית ב-U. ואז $|g(z)|=e^{\mathrm{Re}(f(z))}$,

ואם $\mathrm{Re}\,f(z)$ מקבלת מקסימום מקומי ב-U, אז גם $|g(z)|$ הייתה מקבלת מקס' מקומי, וזו סתירה לעקרון המקס'. ▨

מרוכבות - שיעור 24

7/1/10

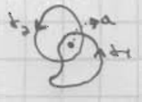
הגדרה: (תזכורת)

מעגל (cycle) הוא סכום פורמלי $\gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \dots + n_k\gamma_k$ כאשר $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ הן מסילות סגורות, ו- $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{Z}$. (כלומר $((\gamma_1,n_1),(\gamma_2,n_2),\dots,(\gamma_k,n_k))$).

הגדרה: יהיו $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ מסילות בתחום U, ו- $f(z)$ פונקציה אנליטית על U.

נגדיר $\boxed{\int_\gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot \int_{\gamma_i} f(z)dz}$ (מספיק כי $f(z)$ רציפה על $\bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i)$)

ונגדיר ל- $a \notin \bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i)$: $\boxed{n(\gamma,a) = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot n(\gamma_i,a)}$ כרגיל



משפט קושי: (תזכורת)

יהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום U, ויהי γ מעגל ב- U כך ש- $\gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i\gamma_i$ כנ"ל, ו- $n(\gamma,a)=0$ $\forall a\notin U$. אז מתקיים:

(א) $\boxed{\int_\gamma f(z)dz = 0}$. (ב) $\boxed{\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i \cdot n(\gamma,z)f(z)}$ לכל $z \in U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i)$.

הוכחה:

דומה כמעט מילה במילה למקרה של מסילה אחת: נגדיר: $U' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i) \mid n(\gamma,z)=0\}$.

U' זו קבוצה פתוחה, כי ניתן לכתוב אותה כ- $U' = \{z \in \bigcap_{i=1}^{k}(\mathbb{C} \setminus Im(\gamma_i)) \mid n(\gamma,z)=0\}$. ומכאן ההוכחה זהה. ■

הגדרה: מקרה פרטי:

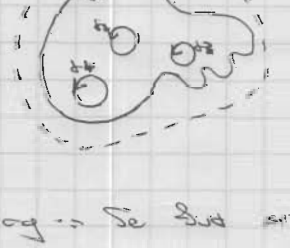
יהיו γ_1,γ_2 זוג מסילות סגורות בתחום U כך ש- $n(\gamma_1,a)=n(\gamma_2,a)$ לכל $a\notin U$.

אז לכל פונקציה אנליטית $f(z)$ על U: $\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz}$

(הסבר: כי $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ הוא מעגל)

* **מסקנה:** ניתן לחשב אינטגרל על מסילה נוחה יותר, בתנאי שהיא מקיפה את a אותו מס' פעמים

דוגמה: (ראה לציור)



$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, ו- $n(\gamma,a)=0$ $\forall a\notin U$.

אז $\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i} f = 0$ ולכן $\int_{\gamma_1} f = \sum_{i=2}^{4}\int_{\gamma_i} f$.

הגדרה: מה לגבי משפט קיום ענף של ה- log של פונקציה.

<u>מסקנה:</u> (קיום ענף של ה-log)

יהי U תחום פשוט קשר, ותהי $f(z)$ פונ' אנליטית ב-U כך ש-$f(z)\neq 0$ לכל $z\in U$.

אז קיים ענף של $\log f(z)$ ב-U.

<u>הוכחה:</u>

הפונקציה $\frac{f'(z)}{f(z)}$ אנליטית ב-U. ממשפט קושי: $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ לכל מסילה סגורה הנמצאת ב-U

לכן ל-$\frac{f'(z)}{f(z)}$ יש קדומה אנליטית $F(z)$ ב-U. נסמן פונקציה: $g(z)=e^{-F(z)}f(z)$.

נשים לב ש- $g'(z)=-e^{-F(z)}\cdot\underbrace{F'(z)}_{=\frac{f'(z)}{\cancel{f(z)}}}\cdot\cancel{f(z)}+e^{-F(z)}\cdot f'(z)=0$ ולכן $g(z)=c\ (\neq 0)$ קבועה על U.

$e^{F(z)}=\frac{1}{c}\cdot f(z)$. נבחר $a\in\mathbb{C}$ כך ש- $\frac{1}{c}=e^{a}$, ואז $e^{F(z)-a}=f(z)$, ולכן $F(z)-a$

הוא ענף (אנלי.) של $\log f(z)$ ב-U. ☐

<u>מסקנה:</u> (מקרה פר'.)

עבור $f(z)=z$, אם U הוא תחום פשוט קשר כך ש-$0\notin U$,

אז יש ענף של $\log z$ ב-U.

<u>הערה:</u> בהמשך נדון בפונקציות אנליטיות פרט לנקודה.

מרוכבות - שיעור 25

12/1/10

טורי לורן (Laurent)

נתבונן בטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ עם רדיוס התכנסות $R>0$. נציב $\frac{1}{z-z_0}$ במקום $z-z_0$.

אזי אם $\frac{1}{|z-z_0|}<R$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ מתכנס (בהחלט), כלומר אם $|z-z_0|>\frac{1}{R}$.

- אם $\rho>\frac{1}{R}$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ מתכנס במ"ש כאשר $|z-z_0|\geq\rho$.
- אם $r<\frac{1}{R}$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ אינו מתכנס כאשר $|z-z_0|\leq r$.

שימוש

באופן כללי נתבונן בטורים-דו-צדדיים: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ כש- $r<|z-z_0|<R$.

R = רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$.

$\frac{1}{r}$ = רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}\underset{\frac{1}{z-z_0}}{U^n}$

} טור כזה נקרא טור לורן

אם טור כזה מתכנס בטבעת $0<|z-z_0|<R$. כמו כן, הטור אינו מתכנס במ"ש בסגור של הטבעת.

בכל קבוצה סגורה וחסומה המוכלת בטבעת (הפתוחה) הטור מתכנס במ"ש.

→ הטור מגדיר פונקציה אנליטית בטבעת.

משפט לורן:

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בטבעת $r<|z-z_0|<R$,

אז בטבעת אפשר להציג את הפונקציה כטור לורן: $\boxed{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}$
[באופן יחיד]

ולכל נקודה $r<\rho<R$, אז המקדמים של הטור: $\boxed{a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta}$ (לכל n)

הוכחה:

יהיו γ_1,γ_2 שני מעגלים סביב z_0 המוכלים בטבעת הפתוחה, כמו בציור. →

תהי z נק' הנמצאת בפנים הטבעת המוגדרת ע"י γ_1,γ_2. נסמן $\gamma=\gamma_2-\gamma_1$.

זה מחזור בטבעת הפתוחה, המקיים $n(\gamma,a)=0$ לכל a כך ש- $|a-z_0|\geq R$ או $|a-z|\leq r$

ועבור זה : $n(\gamma,z)=n(\gamma_2,z)=1$. מנוסחת קושי: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]$

$$\hookrightarrow\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0-(z-z_0)}d\zeta=\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)\cdot 1}{(\zeta-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}d\zeta \longrightarrow \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$$

טור הנדסי (חסום)

$$=\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\right)d\zeta \overset{\text{התכנסות במ"ש ב-}\gamma_2}{\overset{!}{=}} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^n$$

ובאופן דומה:

$$-\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0-(\zeta-z_0)}d\zeta=\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}d\zeta \overset{\text{טור הנד׳}}{\overset{!}{=}} \int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n}d\zeta=$$

התכנסות במ"ש על γ_1

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\gamma_1}f(\zeta)\cdot(\zeta-z_0)^n d\zeta\right)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \dashrightarrow \left[\overset{\text{נסמן}}{k=-n-1}\right]$$

ולכן סה״כ:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]=$$

מצאנו ←

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^n\right)+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^k\right)$$

ולבסוף, עבור כל ρ הנ״ל בין ה-רדיוסים של γ_1 ו-γ_2, ונובע, ממשפט קושי:

$$\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad , \quad \int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

נציב ונקבל

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\overset{\text{מקדם}}{a_n}(z-z_0)^n \qquad \square$$

פיתוח לורן סביב z_0 הוא יחיד: נניח $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ (מתכנס בטבעת $r<|z-z_0|<R$)

ולכן: $f(z)(z-z_0)^k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+k}$. נניח כי $r<\rho<R$. הטור מתכנס במ״ש של $|z-z_0|=\rho$

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho}f(\zeta)(\zeta-z_0)^k d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\underbrace{(\zeta-z_0)^{n+k}d\zeta}_{=0 \text{ לכל } n \text{ כי } n\neq-k-1}\underset{n=-k-1}{=}a_{-k-1}\cdot 2\pi i$$

לכן $a_{-k-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}f(\zeta)(\zeta-z_0)^k d\zeta$ (לכל k שלם)

$-k-1=n$

ולכן $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ לכל n שלם $\square$

דוגמא: $\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!\,z^{2n-1}}$ $|z|>0$

הגדרה: (נקודה סינגולרית)

נניח כי $f(z)$ פונקציה אנליטית במעגל המנוקב $0<|z-z_0|<R$,

אז נאמר כי z_0 היא נקודה סינגולרית מבודדת של f.

1. נאמר כי z_0 היא נק׳ סינגולרית סליקה אם ניתן להגדיר את $f(z)$ להיות אנליטית בסביבה מלאה של z_0. [לא מנוקבת]

2. נאמר כי z_0 היא קוטב (pole) אם $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

3. אם z_0 אינה קוטב ואינה נק׳ סינגולרית סליקה, נאמר כי z_0 היא נקודה סינגולרית עיקרית של f.

למה: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית ב- $0<|z-z_0|<R$,

אז z_0 היא נק׳ סינגולרית סליקה $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ חסומה בסביבה מנוקבת של z_0.

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם z_0 סליקה, אז יש $g(z)$ אנליטית ב- $|z-z_0|<R$ כך ש- $g(z):=f(z)$ לכל $z\neq z_0$ בתחום (רציפה).

ובפרט קיים הגבול $\lim_{z\to z_0}f(z)=g(z_0)$, לכן יש סביבה של z_0 שבה $f(z)$ ($g(z)$) חסומה.

($\Rightarrow$) נניח כי $R_0<R$ הוא רדיוס כך ש- $\exists M$ שחוסם את $f(z)$ ב- $0<|z-z_0|\leq R$: $|f(z)|\leq M$.
(של סביבה מנוקבת)

נראה ש-z_0 סליקה: נכתוב את פיתוח לורן של $f(z)$ ב- $0<|z-z_0|<R$: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$.

נראה כי $a_n=0$ לכל $n<0$; ממשפט לורן $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)}d\zeta$ כש- $r<\rho<R$ כלשהו.

ניקח $\rho \le R_0$ ונשאיף לאפס את ρ. $|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\rho\cdot\max_{|z-z_0|=\rho}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \le \frac{\rho}{\rho^{n+1}}\cdot M = M\rho^{-n} \xrightarrow[\rho\to0]{} 0$ $(n<0)$

לכן המקדמים השליליים של f הם 0. לכן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ← וזהו טור טיילור.

לכן אפשר יהיה להרחיב אנליטית את f ב- $|z-z_0|<R$. ובנקודה z_0 נגדיר כך: $f(z_0)=a_0$. ∎

דוגמאות: $\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\cdot\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots$ ⇐ $z=0$ - סליקה.

$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)+\dots$ ⇐ $z=a$ - סליקה.

נראה מה קורה בקוטב של f: נניח כי z_0 הוא קוטב של $f(z)$, כלומר קיים $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$.
$[f(z)$ אנליטית ב- $0<|z-z_0|<R]$

נקח $0<R_0<R$ כך ש- $f(z)\neq0$ עבור $0<|z-z_0|<R_0$.

נגדיר ב- $0<|z-z_0|<R_0$: $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$. זוהי פונקציה אנליטית במעגל המנוקב $0<|z-z_0|<R_0$, וגם $\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=0$

בפרט $\varphi(z)$ חסומה בסביבה מנוקבת של z_0, ולכן z_0 היא נק' סליקה עבור $\varphi(z)$. ולכן אפשר להרחיב את $\varphi(z)$ לפונקציה אנליטית $[g(z)]$ בעיגול (הלא-מנוקב) $|z-z_0|<R_0$, שנסמנה: (נסמנה $g(z)$) ב- $0<|z-z_0|<R_0$: $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{g(z)}$.

וב- z_0: $g(z_0)=0$ $\left(=\lim_{z\to z_0}\varphi(z)\right)$. לכן z_0 הוא אפס של הפונ' האנליטית $g(z)$ (כיוון ש- $g(z)$ לא זהותית אפס).

לכן z_0 הוא אפס מסדר סופי, נאמר $n\ge1$, של $g(z)$. אז אפשר לכתוב: $g(z)=(z-z_0)^n\cdot h(z)$

כש- $h(z)$ אנליטית ב- $|z-z_0|<R$, ו- $h(z_0)\neq0$. ואז נקבל:

$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n h(z)}=\frac{1/h(z)}{(z-z_0)^n}=\frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}$. שימו לב כי יש סביבה (קטנה) של z_0 שבה הפונקציה $\Phi(z)$ (אנליטית) אין מתאפסים בה.

ההפך, כמובן, נכון: אם $\Phi(z)$ אנליטית בסביבה $|z-z_0|<r_0$ של z_0, וגם $\Phi(z_0)\neq0$,

אז לכל n לגבי הפונקציה $f(z)=\frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}$ יש קוטב ב- z_0. ברור כי $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

טור לורן של $f(z)$ סביב z_0 זה מה שכבר ניתן כך:

נכתוב את פיתוח טיילור: $\Phi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\dots$, אז $f(z)=\frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}=\frac{a_0}{(z-z_0)^n}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{n-1}}+\dots$

- יש מספר סופי של חזקות שליליות של $z-z_0$ (ההפך נכון גם כן).

<u>הגדרה</u>: (קוטב מסדר n)

נאמר כי z_0 הוא <u>קוטב מסדר n</u> ($n\ge1$ שלם), של $f(z)$, אם הפיתוח לורן: $f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\dots$ המקדם הראשון אינו מתאפס - $a_{-n}\neq0$.

כש- $n=1$ אומרים קוטב <u>פשוט</u>: $f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots$.

<u>משפט</u>: (Casorati-Weirestass)

נניח כי z_0 היא נק' סינגולרית עיקרית של $f(z)$,

אז התמונה דרך f של כל סביבה מנוקבת של z_0 היא <u>צפופה</u> ב- $\mathbb{C}$.

מרוכבות - תרגול 13

12/1/10

לורן
נק' סינגולריות
משפט השארית

משפט לורן

f אנליטית בטבעת $r<|z-z_0|<R$ $(0\le r, R\le\infty)$, אז קיים ל-f פיתוח לורן מהצורה: $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$

וכן $a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$ כאשר $k\in\mathbb{Z}$, $r<\rho<R$

מיון נקודות סינגולריות מבודדות

(1) **סליקה:** אפשר להגדיר $f(z_0)$ מחדש כך ש-f תהיה אנליטית (הרחבה אנליטית)

$\underset{\text{שקול ל-}}{\Longleftrightarrow}$ f חסומה בסביבת z_0.

(2) **קוטב:** $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$

$\underset{\text{שקול ל-}}{\Longleftrightarrow}$ מספר החזקות השליליות בפיתוח סביב z_0 סופי.
[המעלה הגבוהה ביותר (בערך מוחלט)]

(הגדרה: מספר זה נקרא הסדר של הקוטב)

(3) **עיקרית:** לא (1) וגם לא (2).

$\underset{\text{שקול ל-}}{\Longleftrightarrow}$ ל-f יש ∞ חזקות שליליות בפיתוח סביב z_0.

[דוגמא: $\frac{1}{(1-z)^2}$ ← קוטב מסדר 2 ב- $z_0=1$]
זהו כבר פיתוח לורן של הפונקציה

דוגמאות:

① $f(z)=\frac{\cos z}{z^2}$ בטבעת $\{0<|z|<\infty\}$:

פיתוח לורן:
$$\frac{\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\cdot z^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\cdot z^{2m-2}=\frac{a_{-2}}{z^2}+a_0+a_2z^2+\dots$$

$\Leftarrow$ $z_0=0$ - קוטב מסדר 2.

באופן כללי: [אם נרשום $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z^n}$ עם φ אנליטית בעיגול $|z|<R$ ולא מתאפסת ב-0
$\Leftarrow$ ל-f יש קוטב מסדר n ב-0.]
[בכללי - $\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$]

②
$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

א. מצאו ל-f בטבעת $\{1<|z|<2\}$:
[זו דוגמא לפיתוח בנק' שאינה - לא סינגולרית]

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}\overset{|\frac{1}{z}|<1}{=}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$
$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2(\frac{z}{2}-1)}\underset{|\frac{z}{2}|<1}{=}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$
$$\Rightarrow f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

ב. בטבעת $\{0<|z-1|<1\}$ סביב 1:

אז: $\frac{1}{z-1}$ ← כבר סביב 1. $\frac{1}{z-2}$ ←
$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}\overset{0<|z-1|<1}{=}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$
$$\Rightarrow f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

$\Leftarrow$ $z_0=1$ קוטב מסדר 1.

ג. כנ"ל $\{|z|>2\}$:

* כמו קודם רק הפוך וכן $|\frac{1}{z}|<1$.

$$\frac{1}{z-1}\overset{\text{כמו א'}}{=}\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$
$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}\underset{|\frac{2}{z}|<1}{=}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$
$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

③ $f(z)=\sin(\frac{1}{z})$ בתחום - $\{0<|z|<\infty\}$:

$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}$ ← $z_0=0$ - נק' סינגולרית עיקרית
(כי יש אינסוף חזקות שליליות)

הערה: אם $f(z)$ אנליטית ב- $\{|z-z_0|<R\}$ ולא פולינום,
אז $f(\frac{1}{z-z_0})$ מקבלת נק' סינגולרית עיקרית ב- z_0.

משפט השאריות

U תחום, f אנליטית ב- $U\setminus\{z_1,\dots,z_m\}$, γ מסילה ב- $U\setminus\{z_1,\dots,z_m\}$ כך ש- $\forall a\notin U.\ n(\gamma,a)=0$

ונסמן $\mathrm{Res}_{z=a} f(z)$ כמו המקדם של $\frac{1}{z-a}$ בפיתוח לורן של f סביב a.

אז

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{m} n(\gamma,z_j)\cdot\mathrm{Res}_{z=z_j} f(z)}$$

דוגמא: $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z-1)}$. נחשב: $\int_{|z|=2} f(z)\,dz$.

$z_0=0$ ← קוטב מסדר 2 (כי $\frac{e^z/(z-1)}{z^2}$ עם מונה אנליטי. ...)

$z_0=1$ ← קוטב מסדר 1. (כנ"ל)

מה שמעניין, כי $\mathrm{Res}\, f(z)=b_{-1}$ כי השאר מתאפסים
← נובע מזה בהוכחת המשפט

סביב $z_0=1$: $\frac{e^z}{z^2(z-1)}=\frac{b_{-1}}{z-1}+b_0+b_1(z-1)+\dots$ נכפול ב- $(z-1)$:

$\frac{e^z}{z^2}=b_{-1}+b_0(z-1)+b_1(z-1)^2+\dots \Longrightarrow b_{-1}=\lim_{z\to \underset{z_0}{1}}\left(\frac{e^z}{z^2}\right)=e$ (Res$_1$)

כי השאר 0 אם $z\to1$

סביב $z_0=0$: $\frac{e^z}{z^2(z-1)}=\frac{b_{-2}}{z^2}+\frac{b_{-1}}{z}+b_0+\dots$ נכפול ב- z^2:

$\frac{e^z}{z-1}=b_{-2}+b_{-1}z+b_0z^2+\dots$ נגזור כדי לקבל את b_{-1}
(השאר - בצורה של חזקות
חיוביות - אפס)

$\Longrightarrow b_{-1}=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)\Big|_{z=0}=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}\Big|_{z=0}=-2$ (Res$_2$)

$\Longrightarrow \int_{|z|=2} f(z)\,dz=2\pi i(e-2)$

משפט השאריות $(b_{-1})_1=\mathrm{Res}_1$ $(b_{-1})_2=\mathrm{Res}_2$

מרוכבות - שיעור 26

14/01/10

תזכורת **משפט:** (קזי - ויירשטראס, בשג)

יהי: $f(z)$ פונ' אנליטית בטבעת מנוקבת $0<|z-z_0|<R_0$, ו-z_0 היא נקודה סינגולרית עיקרית של f, אז התמונה של כל סביבה מנוקבת של z_0 (התמונה בטבעת הנ"ל) היא צפופה ב-C.

הוכחה:

נניח בשלילה כי יש סביבה (מנוקבת) $0<|z-z_0|<\delta_0$ $(\delta_0\le R_0)$ שתמונתה אינה צפופה, כלומר יש $b\in C$ שאינו נקודת סגור של תמונת סביבה זו. ומכאן יש $\varepsilon_0>0$ כך שהסביבה $\{w\in C: |w-b|<\varepsilon_0\}$ זרה לערכים שמקבלת $f(z)$ כאשר $0<|z-z_0|<\delta_0$. כלומר, לכל z כך ש-$0<|z-z_0|<\delta_0$: $|f(z)-b|\ge\varepsilon_0$.

נגדיר $g(z)=\frac{1}{f(z)-b}$ $(0<|z-z_0|<\delta_0)$. זוהי פונקציה אנליטית בטבעת המנוקבת $0<|z-z_0|<\delta_0$ (כי אם $|f(z)-b|\ge\varepsilon_0$ ובפרט $f(z)-b\ne0$, ובנוסף $f(z)-b$ אנליטית). כמו כן, $|g(z)|=\frac{1}{|f(z)-b|}\le\frac{1}{\varepsilon_0}$ — חסומה בכל $0<|z-z_0|<\delta_0$, ולכן z_0 היא נק' סינגולרית סליקה של $g(z)$. נמשיך ונסמן ב-$g(z)$ את ההרחבה האנליטית של $g(z)$ ל-$0\le|z-z_0|<\delta_0$.

$f(z)-b=\frac{1}{g(z)}$ ולכן $0<|z-z_0|<\delta_0 \Leftarrow f(z)=b+\frac{1}{g(z)}$. כיוון ש-$z_0$ הוא "סל"ס" הרי קוטב של $\frac{1}{g(z)}$

בפירוט: → (• אם $g(z_0)\ne0$ אז z_0 היא נק' סליקה של f. • אם $g(z_0)\ne0$ אז z_0 הוא אפס, עם סדר n, של $g(z)$. אז $g(z)=(z-z_0)^n h(z)$ $\Longleftarrow$ $\frac{1}{g(z)}=\frac{1/h(z)}{(z-z_0)^n}$, ולכן z_0 הוא קוטב מסדר n של $\frac{1}{g(z)}$).

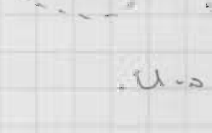
* h אנליטית (בסביבה), $h(z_0)\ne0$

בכל אופן הוא קוטב או סליקה בסתירה לכך ש-z_0 היא נק' סינגולרית עיקרית.

⊠

משפט השאריות

הקדמה: נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום U, פרט למספר סופי של נק' $a_1,\dots,a_r\in U$. נניח כי γ הוא מחזור בתחום U, שאינו עובר דרך $a_1,\dots,a_n$ כך ש-$n(\gamma,z)=0$ לכל $z\notin U$. נרצה לחשב נוסחה ל-$\int_\gamma f(z)dz$. נקיף כל נק' סינגולרית a_j במעגל C_j (מעגל רגיל, בכיוון) כך שהעיגול הסגור שהוא תוחם מוכל ב-U, וזרים זה לזה.



נגדיר $\eta=\gamma-\sum_{j=1}^{n} n(\gamma,a_j)C_j$. זהו מחזור ב-$U$.

אז $n(\eta,z)=0$ לכל z מחוץ ל-$U\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$:

אם $z\notin U$ אז $n(C_j,z)=0$ לכל j, ולכן $n(\eta,z)=n(\gamma,z)=0$. אם $z=a_i$ אז:

$n(\eta,a_i)=n(\gamma,a_i)-\sum_{j=1}^{n} n(\gamma,a_j)\underbrace{n(C_j,a_i)}_{i\ne j \text{ אם } 0}=n(\gamma,a_i)-n(\gamma,a_i)=0$, ולכן, ממשפט קושי הכללי:

$\int_\eta f(z)dz=0$, כלומר $\int_\gamma f(z)dz=\sum_{j=1}^{n} n(\gamma,a_j)\cdot\int_{C_j} f(z)dz$. נחשב מחובר ה-$j$ את פיתוח

סביב a_j: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(j)}(z-a_j)^n$ ולכן $\int_{C_j} f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(j)}\cdot\underbrace{\int_{C_j}(z-a_j)^n dz}_{0 \text{ אם } n\ne-1}=2\pi b_{-1}^{(j)}$

משפט: (השארית)

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום U פרט למספר סופי של נקודות $a_1,..,a_n \in U$.

תהי γ מסילה סגורה בתחום U שאינה עוברת דרך $a_1,..,a_n$, כך ש- $n(\gamma,z)=0$ לכל $z \notin U$.

אז

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma,a_j)\, b_{-1}^{(j)}}$$

הגדרה: סימון: השארית של F בנק' a_j - $b_{-1}^{(j)} = \operatorname{Res}_{z=a_j}(f(z))$

אזי

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} n(\gamma,a_j)\cdot \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z)}$$

הערה: (קוטבים ושארית)

באופן כללי, אם a הוא קוטב מסדר r של $f(z)$ אז:

$$f(z) = \frac{b_{-r}}{(z-a)^r} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + \dots$$

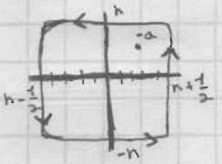
$$(z-a)^r f(z) = b_{-r} + b_{-r+1}(z-a) + \dots + \underbrace{b_{-1}(z-a)^{r-1}}_{(r-1)!\,b_{-1}} + \dots$$

נגזור $r-1$ פעמים

$$\Rightarrow \frac{1}{(r-1)!}\cdot \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left((z-a)^r f(z)\right)\Big|_{z=a} = \operatorname{Res}_{z=a} f(z)$$

מרוכבות - שיעור 27

19/01/10



$\gamma_n :$

תרגיל: חשב את $\int_{\gamma_n} \overbrace{\frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2}}^{f(z)} dz$ על המסילות: → שימושים למשפט השאריות

פתרון: לפי משפט השאריות: $\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{השאריות}\\\text{בתוך המסילה}}} Res(f(z))$, וכאן [illegible]:

$$\underset{z=k}{Res}\frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2} = \frac{1}{\pi(k+a)^2}$$

$$\underset{z=-a}{Res}\frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2} = (\cot(\pi z))'\Big|_{z=-a} = -\frac{\pi}{\sin^2(\pi a)}$$

לכן נקבל:

$$\circledast \quad \int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i\left(\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\pi(k+a)^2} - \frac{\pi}{\sin^2(\pi a)}\right) = 2i\left(\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(k+a)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}\right)$$

נראה כי כש- $n\to\infty$ האינט' $\to 0$.

$$\left|\int_{\gamma_n}\frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2}dz\right| \le (8n+2)\cdot\max_{z\in\gamma_n}\frac{|\cot(\pi z)|}{|z+a|^2} \underset{\downarrow}{\le} (8n+2)\cdot\frac{\max_{\gamma_n}|\cot(\pi z)|}{(n-a)^2}$$

$|z+a|\ge|z|-a\ge n-a$

על γ_n תמיד ש- $|z|\ge n$

נראה כי $\cot(\pi z)$ חסום על γ_n (כש- $n\to\infty$):

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| = \left|\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right| = \left|\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}\right|$$

עבור $z=\pm(n+\frac{1}{2})+it$, $-n\le t\le n$,...... $\underset{\text{חשבון}}{\Leftarrow}$ חסום!

עבור $z=t\pm in$, $-n-\frac{1}{2}\le t\le n+\frac{1}{2}$, אז $2\pi iz=2\pi it\mp2\pi n$,

לכן $e^{2\pi iz}=e^{2\pi it}\cdot e^{\mp2\pi n}$ ואז $\left|\frac{e^{2\pi it}\cdot e^{\mp2\pi n}+1}{e^{2\pi it}\cdot e^{\mp2\pi n}-1}\right|$ חסום גם!

$\Leftarrow$ סה"כ חסום. לכן $\int_{\gamma_n}f(z)dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\circledast$

$\Leftarrow$ $0=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$ ונקבל

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}}$$

דוגמה: נציב $a=\frac{1}{2}$ ונקבל $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}=\pi^2$ ואז $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{\text{סימטרי}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}$

לכן $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$.

ובנוסף השוויון הבא, נקבל אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}_{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}}_{\frac{\pi^2}{8}}$$

לכן $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$

לכן $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$

אינטגרלים מהצורה: $\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)\,dt$:

$R(x,y)$ = פונקציה רציונלית במשתנים ממשיים x,y. נכתוב את האינטגרל כאינט' מסילתי. על

מעגל היחידה: $z=z(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$ $(0\le t\le2\pi)$, $dz=ie^{it}dt=iz\,dt$.

$\left(|z|=1 \,,\, =\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right)$ $\cos(t)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $\sin(t)=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$.

ואז

$$\boxed{\int_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)\frac{dz}{iz} \underset{\substack{\downarrow\\\text{משפט השאריות}}}{=} 2\pi i\cdot\sum_{[illegible]}\left(\begin{matrix}\text{השאריות}\\\text{במעגל היחידה}\end{matrix}\right)}$$

דוגמא:

$(a>b>0)\quad \int_0^{\pi}\frac{dt}{a+b\cos(t)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+b\cos(t)} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} \;\circled{=}$

נציב ש: $z\left(a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = az+\frac{b}{2}(z^2+1) = \frac{b}{2}z^2+az+\frac{b}{2}$

לכן $\circled{=}\;\frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{bz^2+2az+b}\;\circled{=}$. שורשי המכנה: $\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4b^2}}{2b} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

$\alpha-\beta=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. $\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $\beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

ו- $|\alpha|=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}<1$, $|\beta|=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}>\frac{a}{b}>1$.

לכן

$$\circled{=}\;\frac{1}{i}2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\frac{1}{b(z-\alpha)(z-\beta)} \underset{\downarrow}{=} 2\pi\cdot\frac{1}{b(\alpha-\beta)} = \frac{2\pi}{b\cdot\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$z=\alpha$ קוטב פשוט

אינטגרלים מהצורה: $(a\geq 0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin(ax)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(ax)\,dx$:

$R(x)=$ פונקציה רציונלית (מנת פולינומים ב-x) כך שהמעלה של המכנה גדולה מהמעלה של המונה ב-2,

אין ל-$R(z)$ קטבים על הציר הממשי (המכנה אינו מתאפס על ציר x ממשי).

נבחר פונקציה מרוכבת $R(z)e^{iaz}$ והמסילה: $\gamma=\gamma_r$: 

(r גדול מספיק)

נניח כי $z_1,\dots,z_N$ הם כל הקטבים של $R(z)$ בחצי המישור העליון, נניח כי r גדול דיו.

אז

$$\int_{-r}^{r}R(x)e^{iax}dx+\int_0^{\pi}R(re^{it})e^{iare^{it}}\cdot ire^{it}\,dt = \int_\gamma R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\sum_{\substack{z=z_j\\1\leq j\leq N}}\operatorname{Res}\left(R(z)e^{iaz}\right)$$

נבדוק: $\left|\text{האינטגרל העליון}\right| \leq \pi r\cdot\max_{0\leq t\leq\pi}\left(|R(re^{it})|\cdot e^{\operatorname{Re}(iare^{it})}\right) = \pi r\cdot\max_{0\leq t\leq\pi}|R(re^{it})|\,e^{\overset{\leq 0\ (0\leq t\leq\pi\ \text{כי})}{-ar\sin t}} \leq \pi r\cdot\max_{0\leq t\leq\pi}|R(re^{it})| \leq$

$\leq M\pi r^{-1}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$ ⟵ מתקיים R, כי $r_0>0$ ו- $M>0$ כך שלכל $|z|\geq r_0$ מתקיים $|R(z)|\leq M\cdot|z|^{-2}$. נניח כי $r\geq r_0$, אז $|R(re^{it})|\leq Mr^{-2}$

אם האינטגרל העליון $\to 0$ כאשר $r\to\infty$, האינטגרל התחתון: $\int_{-r}^{r}R(x)e^{iax}dx\xrightarrow[r\to\infty]{}\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{iax}dx$.

לכן (נשווה חלק ממשי וחלק מדומה): $(a\geq 0)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(x)\,dx = \operatorname{Re}\left[(2\pi i)\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_j}\left(R(z)e^{iaz}\right)\right]}\ ,\quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin x\,dx = \operatorname{Im}\left[(2\pi i)\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_j}\left(R(z)e^{iaz}\right)\right]}$$

דוגמא: $(a\geq 0,\ b>0)$ $\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}dx \;=\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}dx\right)$ ⟸ $R(x)=\frac{1}{x^2+b^2}$

פתרון:

לפי הנוסחה שלנו: $=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=ib}\frac{e^{iaz}}{\underset{(z+ib)(z-ib)}{z^2+b^2}}\right]$ ⟵ עם הנוסחה עבור $\int R(x)\cos(x)$ שפיתחנו בשיעור

נחשב: $\operatorname*{Res}_{z=ib}\frac{e^{iaz}}{(z+ib)(z-ib)} = \frac{e^{ia(ib)}}{2ib} = \frac{e^{-ab}}{2ib}$

$$\Longrightarrow\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i\cdot\frac{e^{-ab}}{2ib}\right] = \frac{\pi\cdot e^{-ab}}{2b}$$

הערה:

התנאים של רציונליות הם הכרחיים כי האינטגרל של $R(x)$ הוא 1 (לפחות המכנה), אחרת

$R(x)=\frac{x}{x^2+b^2}$ כי זו זוגית - $\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx=\right)$ $\int_0^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx=?$ $(a,b>0)$:**תרגיל**

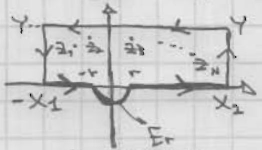
$\operatorname{Res}_{z=ib}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}=\dots$

נחשב את הגדלים: כגון $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin(x)dx$ כש- $a>0$.

$R(x)$ = פונקציה רציונלית עם מעלת המונה < מעלת המכנה (גדולה ב-1 או יותר),

ונניח כי ל-$R(z)$, אין קטבים ממשיים, פרט לקוטב יחיד ב-$z=c$, ואז נקח מסלול.

γ:



(מקרה די כללי)

$$\int_{\gamma}R(z)e^{iaz}dz=2\pi i\left[\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}_{z=z_j}(R(z)e^{iaz})+\operatorname{Res}_{z=c}(R(z)e^{iaz})\right]$$

″

סכום השארי' בקטבים
שבתוך המסלול

נראה כעת: מחשב ישירות $\int_{E_r}R(z)e^{iaz}dz=\int_{\pi}^{2\pi}R(re^{it})e^{iare^{it}}\cdot ire^{it}dt$, ואז כאשר $r\to0$, מתברר [illegible] נקבל ש:

לכן נפרק לטור ; $R(z)e^{iaz}=\frac{a_{-1}}{z}+f(z)$ $\quad f(z)=a_0+a_1z+\dots$

אנליטית ולכן יש טור טיילור בסביבת $z=c$

$\int_{E_r}\frac{a_{-1}}{z}dz+\int_{E_r}f(z)dz$.

$a_{-1}\cdot\int_{\pi}^{2\pi}\frac{i\cancel{re^{it}}}{\cancel{re^{it}}}dt=a_{-1}\pi\cdot i=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{z=0}(R(z)e^{iaz})$

שואף ל- 0
כש- $r\to0$

כי $f(z)$ רציפה בסביבה קטנה של 0

$$\left|\int_{E_r}f(z)dz\right|\le\pi r\cdot\max_{z\in E_r}|f(z)|\overset{\uparrow}{\le}M\cdot r\xrightarrow[r\to0]{}0\implies$$

לגבי שאר המלבן, ישנו
לכל צלעות האינטגרלים
האינטגרלים שלנו:

$$\left(\int_{-X_1}^{-r}+\int_{r}^{X_2}\right)+\int_{X_2}^{X_2+iY}+\int_{X_2+iY}^{-X_1+iY}+\int_{-X_1+iY}^{-X_1}$$

נתון ש- $|R(z)|\le M\cdot|z|^{-1}$ ל- $|z|\ge r_0$, ואז: $\overset{(1)}{\left|\int_{X_2+iY}^{-X_1+iY}\right|}\le\frac{Me^{-Y}}{Y}(X_1+X_2)$, $\overset{(2)}{\left|\int_{-X_1+iY}^{-X_1}\right|}\le\frac{M}{aX_1}$, $\overset{(3)}{\left|\int_{X_2}^{X_2+iY}\right|}\le\frac{M}{aX_2}$

ולכן, כאשר $Y\to\infty$ אז $(1)\to0$, וגם כאשר $X_1,X_2\to\infty$ אז $(2),(3)\to0$,

ולבסוף: $r\to0$ נקבל:

$$\lim_{r\to0}\left(\int_{-\infty}^{-r}R(z)e^{iaz}dz+\int_{r}^{\infty}R(z)e^{iaz}dz\right)=\underbrace{2\pi i\left[\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}_{z=z_j}(R(z)e^{iaz})+\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{z=0}(R(z)e^{iaz})\right]}$$

זה החלק הנותר, כלומר $\overset{\text{ערך ראשי}}{pr}\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{iax}dx$

הכללה לכמה - עובד בקטבים.

הגדרה: מישור - מפלס (שכן לא מסילה) + u קטע, מתקיים u מתח.

מרוכבות - הרצאה 14

19/01/10

משפט: (Roucé)

U תחום, f,g פונקציות אנליטיות ב-U, $\gamma \subseteq U$ מסילה כך ש- $n(\gamma,a)=0$ $\forall a\notin U$,
[וכן $n(\gamma,z)\in\{0,1\}$]

נניח ש- $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ לכל $z\in\gamma$.

אז γ מקיפה אותו מספר של אפסים (כולל ריבוי) עבור f ועבור g.

עקרון הארגומנט:

אם f מרומורפית ב-U עם אפסים $z_1,\dots,z_n$ וקטבים $p_1,\dots,p_m$. γ מסילה סגורה ב-U
[אנליטית על המסילה עצמה] (קטבים ואפסים אינם על γ)
כך ש- $n(\gamma,a)=0$ $\forall a\notin U$, אז מתקיים:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma,z_j) - \sum_{k=1}^{m} n(\gamma,p_k)}$$

הוכחת משפט רושה:

מהנתון, אין אפסים (לא ל-f ולא ל-g) על γ. [כי אם $f(z)=0$ או $g(z)=0$ נקבל סתירה] מהנתון נקבל ש- $\left|1-\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ על γ

$\Longleftarrow$ $F(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$ מעבירה את γ לתוך כדור ברדיוס 1 סביב $z_0=1$.

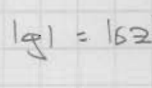
אז נגדיר $\operatorname{Log}\frac{g(z)}{f(z)}$, והיא קדומה אנליטית של $\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)' \Big/ \left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$.

אז נקבל $\int_\gamma \left(\frac{g'}{g}(z)-\frac{f'}{f}(z)\right)dz = \int_\gamma \frac{(g/f)'}{(g/f)}dz = 0$ וכן $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{g'}{g}$, ומעקרון הארגומנט נקבל

ש-γ מקיפה אותו מס' אפסים עבור f ו-g: $\sum n(\gamma,z_j^f) = \sum n(\gamma,z_j^g)$. ☒

שאלה: כמה פתרונות יש למשוואה $z^7-2z^5+6z^3-z+1=0$ בתוך עיגול היחידה $\{|z|<1\}$?

פתרון:



נבחר $g(z)=6z^3$ (ניקח את המונום עם הערך הגדול ביותר בערך מוחלט, כי שואפים שהוא יהיה קרוב ל-$f(z)$

ומאחר ש- $|z|=1$ על המסילה, אז המונום עם הערך הגדול הוא זה עם המקדם הכי גדול - 6)

ואז על המסילה $\{|z|=1\}$ מתקיים בנוסף: $|f-g| = |z^7-2z^5-z+1| \leq 1+2+1+1 = 5$

$|g| = |6z^3| \xrightarrow{(\text{על } |z|=1)} 6$

אז נקבל מתקיים $|f-g|<|g|$ על γ $\Longrightarrow$

אז ל-f יש אותו מספר אפסים כמו ל-g בעיגול $\{|z|<1\}$, ומספר זה הוא 3.
(כי ל- $6z^3$ אפס $z=0$, וזה מריבוי 3)

נושא: אינטגרל - $\int_0^\infty x^a R(x)\,dx$.

$R(x) =$ פונקציה רציונלית ממשית, ללא קטבים על $(0,\infty)$,

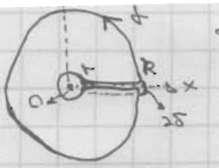
(הערה: המקרה המעניין הוא $a\notin\mathbb{Z}$ כי אחרת אפשר להכניס את x^a ל-$R(x)$)

כך ש: $\lim_{x\to\infty}(x^{a+1}R(x)) = \lim_{x\to 0^+}(x^{a+1}R(x)) = 0$

טענה:

$$\boxed{\int_0^\infty x^a R(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}}\cdot\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{z=z_j}\left(z^a R(z)\right)}$$

$z=z_j$ ← קטבים של R



ניקח γ כמו בציור מעגל. R מספיק גדול, r מספיק קטן כך ש-γ מקיפה את כל

הקטבים של $z^a R(z)$ (חוץ מ-0), ולכן ממשפט השארית:

[נסמן $z_1,\dots,z_k$]

$$\int_\gamma z^a R(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j}(z^a R(z))$$

נראה שהאינטגרלים של הקשתות (המעגלים R, r) הם זניחים:

$$\overset{z=Re^{it}}{\underset{t:\alpha_\delta\to 2\pi-\alpha_\delta}{}}$$

$$\Big|\int_{R\text{-}\text{קשת}}\Big| = \Big|\int_{\alpha_\delta}^{2\pi-\alpha_\delta} R^a\cdot e^{iat}\cdot R(R\cdot e^{it})\cdot iR\cdot e^{it}\,dt\Big| \underset{R>R_\varepsilon}{\leq} (2\pi-2\alpha_\delta)\cdot\varepsilon$$

(קבוע $\varepsilon>0$, וניקח R_ε כך ש: $R>R_\varepsilon$: $|R^{a+1}\cdot R(R\cdot e^{it})|<\varepsilon$)

ובאופן דומה עם קטן מספיק r ($r<r_\varepsilon$).

*טענה: ($\delta>0$)

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^\infty (x+i\delta)^a R(x+i\delta)\,dx = \int_0^\infty x^a R(x)\,dx$$

(בלי הוכחה, משמאל לציר)

באופן דומה מהכיוון: ($\delta>0$)

$$(x-i\delta)^a R(x-i\delta) = e^{a\overbrace{[\log|x-i\delta| + i\cdot\arg(x-i\delta)]}^{\text{רציפה}}}$$ [redacted]

$\delta\to 0$: $\log|x|$, $R(x-i\delta)$

עבור log עם ה- $0<\arg<2\pi$

$$= x^a\cdot e^{2\pi i a}\cdot R(x)$$

ולכן מטענה *:

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^\infty (x-i\delta)^a R(x-i\delta)\,dx = e^{2\pi i a}\int_0^\infty x^a R(x)\,dx$$

בסה"כ,

$$(1-e^{2\pi i a})\int_0^\infty x^a R(x)\,dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=z_j}(z^a R(z))$$

ואז ערך האינטגרל מתקבל לפי הנוסחה. ☒

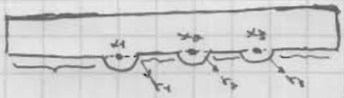
מרוכבות - שיעור 28

21/01/10

משפט: תהי $R(x)$ פונ' רציונלית שקטביה על הישר הם פשוטים, וכן מקיימת תנאי [illegible] מקיימת התנאי. אז

$$\boxed{pv\left(\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}dx\right) = 2\pi i\left[\sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=z_j}(R(z)e^{iaz})+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\operatorname{Res}_{z=x_l}(R(z)e^{iaz})\right]}$$

כאשר $z_1,\dots,z_N$ הם הקטבים בחצי המישור העליון של $R(z)$, ו- $x_1,\dots,x_L$ הם הקטבים על הישר.



הוכחה: נקח בצורה דומה לזאת שעברה, רק הפעם עבור מספר קטבים:

האינטגרלים ברדיוס זה סביב הקטבים יתנו לנו חצי, וגם נקבל אינטגרלים על קטעי הישר שאינם קרובים לקטבים:

$$\int_{-\infty}^{x_1-r_1} + \int_{x_1+r_1}^{x_2-r_2} + \int_{x_2+r_2}^{x_3-r_3} + \int_{x_3+r_3}^{\infty} .$$

- שים לב כי כל הקטבים המשמעותיים הם אלה של $\cos(ax)$, זה שונה מאלו של $\sin(ax)$.

ולכן נקבל בהתאם: $pv\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\left(\sum_{z=z_j}\operatorname{Res}+\frac{1}{2}\sum_{x=x_l}\operatorname{Res}\right)\right]$ וגם $pv\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin(ax)dx = \operatorname{Im}[״]$

דוגמה: נחשב את $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. אז $R(x)=\frac{1}{x}$ ולכן

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[2\pi i\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{z=0}\underbrace{\frac{e^{iz}}{z}}_{e^{i0}=1}\right] = \frac{\pi}{2}$$

דוגמה: נחשב: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x^5-x}dx$. אז $R(x)=\frac{1}{x(x^4-1)}$, והקטבים הם $0,\pm 1,\pm i$.

i הוא הקוטב בחצי המישור העליון, ו- $0,\pm 1$ הקטבים על הישר. ($-i$ הוא מתחת לחצי המישור העליון)

ולכן

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left[2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i}+\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{z=1}+\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{z=-1}+\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{z=0}\right)\right]$$

ואז נחשב:

$$\operatorname{Res}_{z=i}\frac{e^{i\pi z}}{z^5-z} = \frac{(z-i)e^{i\pi z}}{z^5-z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-\pi}}{i\cdot(-2)\cdot 2i} = \frac{e^{-\pi}}{4}$$

$$\operatorname{Res}_{z=0}\frac{e^{i\pi z}}{z^5-z} = \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1}\Big|_{z=0} = -1$$

, ושאר החישובים .....

תרגיל: $f(z)$ אנליטית על קבוצה פתוחה U, $D\subseteq U$ תחום חסום כך ש- $\bar{D}\subseteq U$.

נניח $|f(z)|$ קבוע על ∂D. הוכח כי יש $z_0\in D$ כך ש- $f(z_0)=0$ (או קבוע).

פתרון:

נניח $|f(z)|=c$ על ∂D כאשר $c>0$ (כי אם $c=0$ אז מעקרון המקסימום $F\equiv C$ בסתירה לנתון) [לא קבועה]

אז מעקרון המקסימום: $|f(z)|<c$ לכל $z\in D$. בשלילה, אם $f(z)\neq 0$ לכל $z\in D$,

אז $\frac{1}{f(z)}$ אנליטית ב-D וגם $\left|\frac{1}{f(z)}\right| = \frac{1}{c}$ על ∂D.

מעקרון המקסימום: $\left|\frac{1}{f(z)}\right| < \frac{1}{c}$ לכל $z\in D$, וגם $|f(z)|>c$ לכל $z\in D$ - סתירה. ∎

__תרגיל:__ $f(z)$ שלמה, $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ לכל z, הוכח כי f קבועה.

__פתרון:__

$e^{-f(z)}$ שלמה. $|e^{-f(z)}| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leq 1$ ולכן ממשפט ליוביל: $e^{-f(z)} = c$ קבועה.
(כיוון f שלמה)

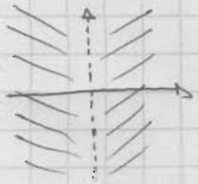
ולכן $\arg(c) = \theta_0 + 2\pi n$. אז $-f(z) = \log|c| + i\theta_0 + 2\pi i \cdot n_z$ ולכן $f(z) = \underbrace{-\log|c| - i\theta_0}_{a_0} - 2\pi i \cdot n_z$

$\mathrm{Image}(f) \subseteq a_0 + 2\pi i \mathbb{Z}$ בדידה. כיוון שתמונת f קשירה, נקבל שהיא רק נקודה אחת.

ולכן $f(z) =$ קבוע. ☒

__תרגיל:__ f שלמה, ונניח כי $\operatorname{Re} f(z) \neq 0$ לכל z. הוכח כי f קבועה.

__פתרון:__



כיוון שתמונת f קשירה, היא חייבת להיות בתוך אחד מ-2 המישורים הפתוחים.
(משפט ליוביל)

אז $\operatorname{Re}(w) > 0$ או $\operatorname{Re}(w) < 0$. ☒

__תרגיל:__ $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f: U \to \mathbb{C}$ פונקציה. נניח כי $g(z) = f(z)^2$ ו- $h(z) = f(z)^3$ פונקציות אנליטיות ב-U. הוכח כי f אנליטית ב-U.

__פתרון:__

אם אין אפסים ל-$f(z)$ בתחום, אז ברור שגם ל-$g(z), h(z)$ אין, ואז $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ אנליטית בתחום כמנה של אנליטיות (=מנה של אנליטיות).

נניח אם כן כי $z_0 \in U$ הוא אפס של $g(z)$ (ולכן גם של $h(z)$ כי אין אפסים אחרים)

כיוון ש-z_0 הוא אפס מסדר סופי של g ושל h, אז:

$g(z) = (z-z_0)^m g_1(z)$ ו- $h(z) = (z-z_0)^n \cdot h_1(z)$ כאשר g_1, h_1 אנליטיות ב-U ואינן מתאפסות ב-z_0.

מתקיים: $g(z)^3 = f(z)^6 = h(z)^2$ ולכן $(z-z_0)^{3m} g_1(z)^3 = (z-z_0)^{2n} h_1(z)^2$

$z = z_0$ אפס מסדר $3m$; מסדר $2n$

ולכן $3m = 2n$, כלומר $n = \frac{3}{2}m > m$.

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{\overset{\frac{1}{2}m}{n-m}} \cdot \frac{h_1(z)}{g_1(z)}$$

מתאפסת ב-z_0

מנה של שתי אנליטיות שאינן מתאפסות ב-z_0

$\Leftarrow$ z_0 נק' סליקה של $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, ולכן f רציפה שם.

ולכן f רציפה בכל התחום. ☒