[illegible] 30/04/2017 תרגול

תרגיל: $h:[0,1]\to\mathbb{C}$ רציפה.

הוכיחו:

$f(z)=\int_0^1 \frac{h(t)}{t-z}\,dt$ גזירה ב $\mathbb{C}\setminus[0,1]$

פתרון:

יהי $z_0\in\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

$$f(z)-f(z_0)=\int_0^1 \frac{h(t)}{t-z}-\frac{h(t)}{t-z_0}\,dt=\int_0^1 \frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z)(t-z_0)}\,dt=$$

$$=(z-z_0)\int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z)(t-z_0)}\,dt$$

לכן:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\int_0^1 \frac{h(t)}{(t-z)(t-z_0)}\,dt$$

- נרצה להחליף בין הסדר של הגבול והאינטגרל.

לשם כך, נרצה להראות:

אם הפונקציה $\frac{h(t)}{(t-z)(t-z_0)}$ $(t\in[0,1])$

מתכנס במ"ש לפונקציה $\frac{h(t)}{(t-z_0)^2}$ כאשר $z\to z_0$

נראה התכנסות במ"ש.

נשים לב:

$$\frac{h(t)}{(t-z_0)(t-z)} - \frac{h(t)}{(t-z_0)^2} = \frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z)(t-z_0)^2}$$

- $h(t)$ רציפה ב $[0,1]$ ולכן מוגבלת (וירשטראס)

קיים $M>0$ כך ש $|h(t)|<M$.

ולכן $z_0 \in \mathbb{C}\setminus[0,1]$

$$|z_0-t| \geq dist(z_0,[0,1]) = d > 0$$

כאשר $z \to z_0$:

נשים לב אם $z \in D_{z_0,\frac{d}{2}}$ מתקיים:

$$|z-t| \geq |z_0-t| - |z-z_0| \geq d/2$$

ולכן נקבל:

$$\left|\frac{h(t)(z-z_0)}{(t-z)(t-z_0)^2}\right| \leq \frac{M|z-z_0|}{\frac{d}{2}\cdot d^2} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$$

ולכן, קיבלנו התכנסות במ"ש, ולכן נוכל להחליף את הסדר בין הגבול לאינטגרל:

$$f'(z_0) = \int_0^1 \frac{h(t)}{(z-z_0)^2}\,dt$$

[illegible] [illegible]

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ [illegible] , [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

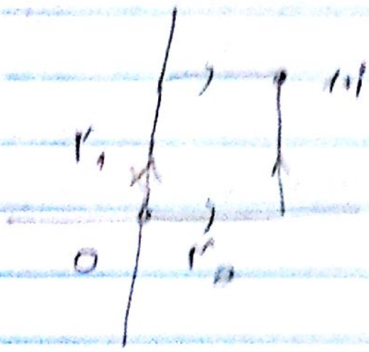
[illegible]:

$$\text{Length}(\gamma) = L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

[illegible]:

[illegible] [illegible] $\bar{z}$ $f(z)=\bar{z}$

[illegible] γ_1,γ_0:



[illegible] [illegible] γ_1,γ_0:

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} t & t\in[0,1] \\ 1+i(t-1) & t\in(1,2] \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} it & t\in[0,1] \\ (t-1)+i & t\in(1,2] \end{cases}$$

$\int [illegible]\,dx = \int [illegible]\,dx$ [illegible]

$= \int [illegible]\,dx - \int [illegible]$ [illegible]

$= \frac{[illegible]}{[illegible]} [illegible]$

$= [illegible]$

$= [illegible]$

$\int [illegible]\,dx = 1 - [illegible]$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

$a\in\mathbb{R}$ [illegible] $= \int_{|z|=r} \frac{1}{z-a}\,dz$

[illegible] $|a|<r$ [illegible]

$t\in[0,2\pi]$ $\qquad r(t)=re^{it}$

$r'(t)=ire^{it}$

$$\int_{|z|=r}\frac{1}{z-a}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}-a}\cdot ire^{it}\,dt=$$

$$=i\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-it}}\,dt$$

$$=i\cdot\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}e^{-it}\right)^n dt=$$

[illegible]

$$=i\sum\left(\frac{a}{r}\right)^n\cdot\int_0^{2\pi}e^{-int}\,dt=i\,2\pi=2\pi i$$

$$\underset{n=0}{2\pi}\qquad \underset{n\neq 0}{=0}$$

$$\int_{\Gamma_\pi} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{\Gamma_\pi} -\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{a}\int_{\Gamma_\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n dz = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_\pi} z^n\,dz = 0$$

<u>תרגיל:</u>

יהי f הולומורפית בתחום קמור G,

כך ש- $Re(f')>0$.

הוכח: f חח"ע ב- G.

<u>הוכחה:</u>

יהי $z_1,z_2\in G$. קו ישר

G תחום קמור, ולכן $\gamma=[z_1,z_2]\subseteq G$

נסמן $t\in[0,1]$ ונגדיר $\gamma(t)=z_1t+z_2(1-t)$.

$$f(z_1)-f(z_2) = \int_\gamma f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\cdot(z_1-z_2)\,dt =$$

$$= (z_1-z_2)\Big[\underbrace{\int_0^1 Re(f'(\gamma(t)))\,dt}_{>0} + i\int_0^1 Im(f'(\gamma(t)))\,dt\Big] = (z_1-z_2)a + (z_1-z_2)bi \neq 0$$

ולכן חח"ע.

תרגיל:

הוכיחו כי אם f ממשית ורציפה ב-$\mathbb{C}$

כך ש- $|f(z)| < 1$

אז:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| < 4$$

$\Gamma =$ מעגל היחידה

פתרון: נסמן $\int_\Gamma f(z)dz = Re^{i\theta}$

עבור $R \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

אזי,

$$R = \int_\Gamma e^{-i\theta} f(z)\,dz = \left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right|$$

- נבחר פרמטריזציה $\Gamma: \gamma(t) = e^{it}$

$\gamma'(t) = ie^{it}$

$$R = \int_\Gamma e^{-i\theta} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(e^{it})\, ie^{it}\,dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{i(t-\theta)} f(e^{it})\,dt = i\left[\int_0^{2\pi}\cos(t-\theta) f(e^{it})\,dt + i\int_0^{2\pi}\sin(t-\theta) f(e^{it})\,dt\right]$$

$$= -\int_0^{2\pi}\sin(t-\theta) f(e^{it})\,dt + \underbrace{i\int_0^{2\pi}\cos(t-\theta) f(e^{it})\,dt}_{\text{חלק מדומה } = 0 \text{ כי } R \text{ ממשי}}$$

$$R = -\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin(t-\theta)\, dt = \quad : p > 1$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin(\theta - t)\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| \, |\sin(\theta - t)|\, dt$$

1

$$R \leq \int_0^{2\pi} |\sin(\theta - t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |\sin t|\, dt = 4$$