

W10D2 . 14/05/2012 1122

[illegible]

(replaced ρ with ρ) $\rho: G \rightarrow \mathbb{C}$
 for $\rho \in G$, $\rho \in \mathbb{C}$
 : $\rho \in \mathbb{C}$, $\rho \in \text{Hol}(G)$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \forall z \in \text{Int } \gamma$$

5K $f \in C(\bar{G})$ $\rho \in \mathcal{M}_c$, $\langle \rho, f \rangle = 0$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \forall z \in G$$

$m \in \mathbb{Z}$ GS $\int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{z^m} dz$ $\Rightarrow$ 14.12.13 $\Rightarrow$ en

2. $m \leq 0$ - אז ממש נותן n נוסף
 3. $m \geq 0$ - נכנס n נוסף

M70 214
(NO)

$$f(z) = e^{z^2}$$

W10D2 . 14/05/2012 1122

14/05/2012

11225

ה'תשנ"ח יולי י"ב

1) $\text{ker } \alpha \subset \text{ker } \beta$ and $\alpha|_G: G \rightarrow C$

Don't see, $\Delta = 130$ in

$$f \in \text{Hol}(G) \quad \mu \in C_{PW}^1$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \forall z \in \text{Int } G$$

$f \in C(\bar{G})$ ρ_2 ρ_1 , β

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \forall z \in G$$

meZ $\oint$ $\frac{e^{2z}}{z^m} dz$ $2\pi i$ $|z|=1$ $14/12/13$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \frac{dv}{dt} = m v a$
 $= m v \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = m v \frac{dv}{dr} v = m v^2 \frac{dv}{dr}$
 $= m \frac{1}{3} v^3 \frac{dv}{dr} = \frac{m}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4} v^4 \right)$
 $= \frac{m}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4} v^4 \right) = \frac{m}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4} v^4 \right)$
 $= \frac{m}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4} v^4 \right) = \frac{m}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4} v^4 \right)$

M70 214

$$f(z) = e^{z^2}$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{z^{n+1}} dz \quad (*)$$

$$f(z) \cdot e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$f^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \text{From Cauchy's theorem - 1/15 - 1/15}$$

$$f^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!}{k!} \quad \text{From Cauchy's theorem - 1/15 - 1/15}$$

$$\frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(0) = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m} dz \quad \text{From Cauchy's theorem - 1/15 - 1/15}$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m} dz = \begin{cases} 0 & m=2k \\ \frac{2\pi i}{(m-1)!} \left(\frac{1}{k!} \right) & m=2k+1 \end{cases}$$

From Cauchy's theorem
 f is analytic in the region

$z \in \mathbb{C}$ so $\text{Re } z > M$ or $\text{Im } z > M$
 f is analytic in the region

$$|e^{-f(z)}| = e^{-\text{Re } f(z)} \quad \text{From Cauchy's theorem - 1/15 - 1/15}$$

$$|g(z)| = e^{-\text{Re } f} \leq e^M \quad \text{From Cauchy's theorem - 1/15 - 1/15}$$

$$e^{-f(z)} = c \in \mathbb{C} \quad \text{From Cauchy's theorem - 1/15 - 1/15}$$

$$-f(z) \in \log(c) \quad \text{From Cauchy's theorem - 1/15 - 1/15}$$

$f = \text{const}$ so f is constant in the region $\text{Re } z > M$ or $\text{Im } z > M$

תרגיל:

הקטע $i, 1$ של הציר הריאלי - z של f

$$f(z) = f(z+i) = f(z+1)$$

תרגיל 3: f קבוע

$$f(z) = f(x+iy) = f(x-Lx] + i(y-Ly)]$$

128, 129, 130:

$$L = \{ 0 \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leq 1 \}$$

54

המשפט השני

$$f(L) = f(\mathbb{C})$$

הקטע L הוא קטע של $\mathbb{C}$ ו- f היא פונקציה מ- L אל $\mathbb{C}$.
 הקטע L הוא קטע של $\mathbb{C}$ ו- f היא פונקציה מ- L אל $\mathbb{C}$.
 הקטע L הוא קטע של $\mathbb{C}$ ו- f היא פונקציה מ- L אל $\mathbb{C}$.

המשפט

המשפט השני

$$f \in \operatorname{Hol}(G) \text{ , } f \in \operatorname{Hol}(G) \text{ , } f \in \operatorname{Hol}(G)$$

המשפט השני
 הקטע L הוא קטע של $\mathbb{C}$ ו- f היא פונקציה מ- L אל $\mathbb{C}$.

$$f \in C(\overline{D_{(0,1)}}), \quad f \in \operatorname{Hol}(D_{(0,1)})$$

תרגיל 4:

$$\operatorname{Re} z \geq 0 \quad |f| \leq 3 \quad \text{ע } \gamma$$

$$\operatorname{Re} z < 2 \quad |f| \leq 2 \quad \text{ע } \gamma$$

55:

$$|f(0)| \leq \frac{5}{2} = 2.5 \quad \text{א)}$$

$$|f(b)| \leq \sqrt{6} < 2.5 \quad \text{ב)}$$

המשפט של פאליס (1) : $|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt$$

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} + \int_{\frac{7\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} \right) \leq \frac{3\pi + 2\pi}{2\pi} = \frac{5}{2}$$

המשפט של פאליס (2) : $g(z) = f(z) \cdot f(-z)$
 $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, $|z| = 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$

$$|g(z)| = |f(z)| \cdot |f(-z)| \leq 6$$

המשפט של פאליס (3) : $|g(0)| \leq \max_{|z|=1} |g(z)| \leq 6$

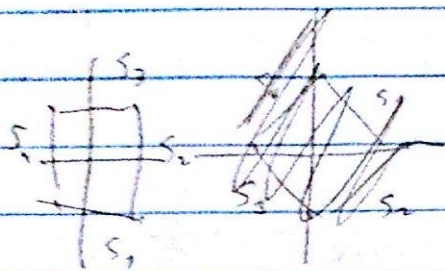
$$|g(0)| = |f(0)|^2$$

המשפט של פאליס (4) : $|f(0)| \leq \sqrt{6}$

המשפט:

יהי $f \in H^1(\mathbb{D})$ פונקציה אנליטית בדיסק $\mathbb{D}$.

נניח כי f מתאפס ב-4 נקודות שונות z_1, z_2, z_3, z_4 על המעגל $\partial\mathbb{D}$.



נניח כי $f \in H^1(\mathbb{D})$, $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

נניח כי $|f(z_j)| \leq M_j$ עבור $j=1,2,3,4$.

$$|f(0)| \leq \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}{4}$$

הוכחה:

$$g(z) = f(z) + f(\bar{z}) + f(-z) + f(-\bar{z})$$

נניח כי $z, -z, i z, -i z \in \partial\mathbb{D}$ עבור $z \in \partial\mathbb{D}$.

$$|g(z)| \leq |f(z)| + |f(\bar{z})| + |f(-z)| + |f(-\bar{z})| \leq M_1 + \dots + M_4 \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}$$

הוכחה: נניח כי f היא פונקציה אנליטית בדיסק $\mathbb{D}$.

נניח כי $z_0 \in \mathbb{D}$, G הוא המרחב הריבועי $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

נניח כי $f(z_0) = 0$.

נניח כי $0 \leq k \leq n-1$.

$$f^{(k)}(z_0) = 0$$

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

נניח כי $f(z) = z^n$ על G .

$z_0 \in D$, $f \in \text{Hol}(D)$: למשל
 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g \in \text{Hol}(D)$, $g(z_0) \neq 0$
 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$

למשל : $f \in \text{Hol}(D)$

$f \equiv g$: אנליטי , $f, g \in \text{Hol}(G)$
 G : קבוצה , $f \equiv g$: אנליטי
 $f \equiv g$: אנליטי

$f, f' \in \text{Hol}(G)$: אנליטי , $f \in \text{Hol}(G)$: אנליטי
 $f \in \text{Hol}(G)$: אנליטי

$z_0 \in G$: אנליטי , $f \in \text{Hol}(G)$: אנליטי
 $z_0 \in G$: אנליטי

$f^2(z_0), f^3(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow f(z_0) \neq 0$: אנליטי

$$f = \frac{f^3}{f^2} \in \text{Hol}(G)$$

אנליטי :

$$f^3(z_0) = f^2(z_0) = 0 \Leftrightarrow f(z_0) = 0$$

f^2, f^3 : אנליטי , f^2, f^3 : אנליטי

$g_1, g_2 \in \text{Hol}(G)$: אנליטי , $g_1, g_2 \in \text{Hol}(G)$: אנליטי

$g_1(z_0), g_2(z_0) \neq 0$: אנליטי

$$f^0(z) = (z - z_0)^0 g_1(z)$$

$$f^3(z) = (z - z_0)^3 g_2(z)$$

אנליטי :

$$f(z) = \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)^j} \frac{g_k(z)}{g_j(z)} = (z - z_0)^{k-j} \frac{g_k(z)}{g_j(z)} \in \text{Hol}(G)$$