ענפים

הגדרת ענף:

נגדיר פונק' רציפה בתחום G

כך ש- $0 \notin G$, $\ell : G \to \mathbb{C}$

כך שלכל $z \in G$ נקבל, $z = e^{\ell(z)}$

אז ℓ - ענף של לוג

הענף לא יחיד:

לחתוך בכל (קרן) מ-0 ומקבלים תחום שונה.

נגיד:

למשל:

$$Log(z) = \ln|z| + i\,Arg(z)$$

בתחום $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

- זו פונק' יחידה, רציפה, מוגדרת היטב

$$Log(i) = \ln|i| + i\,Arg(i) = \frac{\pi}{2} i$$

באופן שקול, אפשר להגדיר ענפים
לפונק' ל- $\sqrt{z}$:
ענף ראשי : לכל $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)} \qquad (\Leftarrow f^2(z) = z)$$

<u>תרגיל:</u>
חשבו ענף ראשי של i^{1+i}

$$i^{1+i} = e^{(1+i)\,\mathrm{Log}\, i} = e^{(1+i)\cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} = i e^{-\frac{\pi}{2}}$$

<u>תרגיל:</u> הוכח / הפרך

$$z^2 = (-z)^2 \Rightarrow 2\log z = 2\log(-z) \Rightarrow \log z = \log(-z)$$

לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\log(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$
$$\log(-i) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

זה כי לא מתקיים:

$z = re^{i\theta}$

$$\log(z^2) = \log(r^2 e^{i2\theta}) = 2\ln r + i(2\theta + 2\pi k)$$

אבל

$$2\log(z) = 2\log(re^{i\theta}) = 2\ln r + 2i(\theta + 2\pi k) = 2\ln r + i(2\theta + 4\pi k)$$

ולכן אין משתמשים את הכלל המוכר:

$$\log z^a \neq a \log z$$

תרגיל: הוכח/הפרך

$\text{Log}\, e^z = z$	①	לא
$\log e^z = z$	②	לא
$e^{\log z} = z$	③	כן
$\text{Log}(z_1 \cdot z_2) = \text{Log}\, z_1 + \text{Log}\, z_2$	④	לא
$\text{Log}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Log}\, z$	⑤	כן

פתרון:

① לא. $z = 2\pi i$

$$\log e^z = \log 1 = 0$$

② לא, צריך אחד מהם קבוצה, ולכן לא.

③ כן. לפי ההגדרה

④ לא. $z_1 = z_2 = e^{i \cdot \frac{3}{4}\pi}$

$$\text{Log}\, z_1 + \text{Log}\, z_2 = 2\,\text{Log}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2i\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi i$$

אבל: $\text{Log}(z_1 \cdot z_2) = \text{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2} i$

⑤ נכון $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$

$$\text{Log}\, z = \ln|z| + i\theta$$

$$\text{Log}\,\frac{1}{z} = -\ln|z| + i\,\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\ln|z| + i\,\text{Arg}\left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right) = -\ln|z| - i\theta = -\text{Log}\, z$$

$-\theta \in (-\pi, \pi)$

תרגיל: יהי G תחום (פשוט קשר) $0 \notin G$

תהי f אנליטית ב- G כך ש- $f'(z) = \frac{1}{z}$

נניח כי קיים $z_0 \in G$ כך ש-

$$e^{f(z_0)} = z_0$$

צ"ל: f ענף של $\log$.

פתרון:

$$h(z) = z \cdot e^{-f(z)}$$

ברור:

$$h(z_0) = 1$$

וכן h אנליטית ב- G.

$$h'(z) = e^{-f(z)} + z \cdot e^{-f(z)} \cdot -\frac{1}{z} = 0$$

$\Leftarrow$ h קבועה ב- G, $h(z_0) = 1$

$\Leftarrow$ $h = 1$ על G.

$\Leftarrow$ $z = e^{f(z)}$ על G.

$\Leftarrow$ f ענף של $\log$.

מש"ל