

תאריך: 3.12.12 עמוד: 30% מהמבחן

WSD2

תאריך: 02/04/2012

נושאים פורמליים

משוואת קו-רמן:

$$f = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$$

סק:

$$C-R \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

Laplace

אלמנטרית:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

- בהצגת $z, \bar{z}$ נשתמש בביטויים

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

- משוואת קו-רמן בקואורדינטות

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

2.15: $u(z) = \log |z|$ $\bar{z}$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

3.1: u ק"מ $u - r$ הרמון במישור
 פונקציה (רמון) $u - r$ הרמון.

(רמון) $u(r, \theta) = \log r$

• $\Delta u = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} = 0$

- נ"ח בק"מ $u - r$ (המחזורי) במישור $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\bar{z}$ $f = u + iv$

2.16: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \theta} = 1$
 $\frac{\partial r}{\partial r} = 0 \Rightarrow$ r $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$ $\Rightarrow$ r $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$

$0 = v(r, \theta) - v(r, \theta + 2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta = 2\pi$

במקרה.

תכונה:

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ אינז'י, $f \neq 0$ ואז, f' אינז'י

3: $u = \log |f|$ הרמוני

סיכום:

$$\Delta u = 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \log |f| =$$

נשמר זה שיהיה הפונקציה
ההרמונית היא מה שנקראת
פונקציה
הרמונית

$$\Delta u = \Delta \log |f \bar{f}| = 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\log |f \bar{f}| \right) =$$

$$= 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z} \bar{f} + f \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}{f \bar{f}} \right)$$

נשמר זה: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (קריטריון קובנר)

וכן, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$ אינז'י, וזוהי תכונה

תכונה:

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z} \bar{f}}{f \bar{f}} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{f'}{f} \right)$$

$\Delta u = 0$ וזוהי תכונה. $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f'}{f} \right) = 0$

לע

המשפט: $|a| < 1$ $\Leftrightarrow$ a נקודה פנימית בדיסק D
 עבור $z \neq \frac{1}{\bar{a}}$ נגד $f: D \rightarrow D$ $f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

3. $|f(z)| < 1$, $|z| < 1$ נגד

הפונקציה f היא $f(D) \subseteq D$ (הערה: f היא אפואמורפיה)

4. $|z|=1 \Leftrightarrow |f(z)|=1$ (הערה: f היא אפואמורפיה)

הוכחה: $|w|=1 \Leftrightarrow$ $w = f(z)$ $\Leftrightarrow$ $|w|=1$

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$$w - w\bar{a}z = z - a$$

$$w + a = z + w\bar{a}z$$

$$z = \frac{w+a}{1+\bar{w}a}$$

$$|z| = \left| \frac{w+a}{1+\bar{w}a} \right| = \frac{|w+a|}{|1+\bar{w}a|} = \frac{|w+a|}{|\bar{w} + \bar{a}|} = 1$$

נניח $w, w_2 \in f(D)$ $\Leftrightarrow$ $|w_1| > 1$, $|w_2| < 1$

אם f היא אפואמורפיה בדיסק D $\rightarrow$ f היא אפואמורפיה בדיסק D

הפונקציה f היא אפואמורפיה בדיסק D

אם $w \in f(D)$ $\Leftrightarrow$ $|f(w)| = 1$ $\Leftrightarrow$ $|w| = 1$

הפונקציה f היא אפואמורפיה בדיסק D

$$f(D) \subseteq C \setminus D \quad \text{or} \quad f(D) \subseteq D$$

$$f(a) = 0$$

$$f(D) \subseteq D$$

QED

Let $f: A \rightarrow B$ be a function. If $f(A) \subseteq A$, then f is called a self-map.

Let $f: A \rightarrow B$ be a function. If $f(A) \subseteq B$, then f is called a map.

Let $f: A \rightarrow B$ be a function. If $f(A) \subseteq A$, then f is called a self-map.

Let $f: A \rightarrow B$ be a function. If $f(A) \subseteq B$, then f is called a map.

Let $f: A \rightarrow B$ be a function. If $f(A) \subseteq A$, then f is called a self-map.

QED

173

$$f(ax + bw) = af(v) + bf(w)$$

13 / 54 / 1st floor

$$f(2): f(x+y) = xf(1) + yf(1)$$

$$y = \frac{2.5}{2.1}$$

4: 212

$$f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} f(1) + \frac{z-\bar{z}}{2i} f(i) = z \left(\frac{f(1)+f(i)}{2} \right) + i \left(\frac{f(1)-f(i)}{2} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial E} = 0$$

$$\frac{f(n) - (f(n))}{2} = 0$$

$$f(a) = f(0)$$

$$\rightarrow f(x) = x \cdot f(1) \cdot g(f(1)) = f(1) \cdot x$$

$$f(\alpha z + \beta w) = \alpha z f(1) + \beta w f(1) = \alpha f(1) + \beta f(w)$$

Jan

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\cos(z+i) = \frac{e^{i(z+i)} + e^{-i(z+i)}}{2} = \frac{e^{-1+i z} + e^{1-i z}}{2}$$

$$z = x + iy, |\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$$

$$|\sin z|^2 = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{-2i} = \frac{1}{4} (e^{iz} - e^{-iz})(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}})$$

$$= \frac{1}{4} (e^{iz} e^{i\bar{z}} - e^{iz} e^{-i\bar{z}} - e^{-iz} e^{i\bar{z}} + e^{-iz} e^{-i\bar{z}})$$

$$= \frac{1}{4} (\cosh^2 y - \cos^2 x) = \frac{1}{4} (2 \cosh^2 y - 1 - (2 \cos^2 x - 1))$$

$$= \cosh^2 y - \cos^2 x$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1$$

6

from 5 to 120

120

120

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1$$

$$e^{iz} = w$$

$$w + \frac{1}{w} = 2$$

$$(w-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow w = 1$$

$$e^{iz} = 1$$

$$e^{i(x+iy)} = 1$$

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 1$$

$$\cos x = e^y$$

$$\sin x = 0$$

note 10 25

$$= x = 2\pi k, \text{ for } e^{-y} = 1$$

with value as 2000 6

$$\log(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\} \quad (1.3.1)$$

$$w = 2\pi i k \log(z) \quad m \text{ is } w \log(z) \quad \text{one of } w \log(z)$$

$$\log(1) = \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\log(re^{i\theta}) = \{\ln r + i(\theta - 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$z = e^{i \log z}$$

$$\log e^z = z$$

$$e^z = 1$$

$$z = 2\pi i$$

$$\log e^z = \log 1 = 2\pi i k$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^\alpha = e^{-\log z}$$

$$i^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \log i} = e^{\sqrt{3} (\ln|i| + i \arg(i))} =$$

$$= e^{\sqrt{3} \cdot i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$$

$$e^{i \sqrt{3} (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} = e^{i \sqrt{3} (\frac{\pi}{2} + 2\pi m)}$$

$$i \sqrt{3} (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = i \sqrt{3} (\frac{\pi}{2} + 2\pi m) + 2\pi i l \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3} (n - m) = l \Leftrightarrow$$

$$\text{for } m, n \quad n = m, \quad l = 0 \Leftrightarrow$$