

$f = u + iv$: 12
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 10
 $v = g(u)$ 11
 f : 13

$f = u + ig(u)$: 14
 $\frac{\partial}{\partial x} u = u_x = \frac{\partial}{\partial y} g(u) = \frac{\partial}{\partial y} u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} g(u) \right) = g'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial y} u$
 $\frac{\partial}{\partial y} u = u_y = -\frac{\partial}{\partial x} g(u) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} g(u) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u = -g'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u$

$$\begin{cases} u_x - g'(u) u_y = 0 \\ u_y + g'(u) u_x = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -g'(u) \\ g'(u) & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\det A = 1 - g'(u)^2 > 0$$

הכרחי $\leftarrow$ $u_x = u_y = 0$

$$\Rightarrow v_x = v_y = 0 \quad (C-R)$$

$$\Rightarrow u, v \text{ קבועים}$$

$$\Rightarrow f \text{ קבוע}$$

לע

סנקציה הכחול

הצורה: $D \rightarrow \mathbb{R}$, D תחום, u פונקציה
 חלקה u אשר u חלקה
 פסגים u וכן $u_{xx} + u_{yy} = 0$

- אם פונקציה חלקה u ו- v פונקציה
 חלקה: u פונקציה v פונקציה

הנני: $p = ax^2 + cy^2$ פונקציה
 חלקה p פונקציה?

הנני: p פונקציה חלקה p פונקציה (אם p חלקה)
 חלקה

$$p_x = 2ax + cy \quad p_y = cx + 2cy$$

$$p_{xx} = 2a \quad p_{yy} = 2c$$

חלקה, p פונקציה חלקה

$$p_{xx} + p_{yy} = 2a + 2c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -c}$$

משפט

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקה D תחום
 חלקה f פונקציה חלקה f פונקציה
 חלקה f פונקציה חלקה f פונקציה
 חלקה f פונקציה חלקה f פונקציה

הערה: אם $\delta - u$ י"ס בוסק
 הרמון $\rightarrow$ צורה של u היא $u(x, y)$
 צד כד קטע חבור.

הערה: C ו- u ק"מ הרמון צורה

צורתו: $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
 צורה u הרמון $\rightarrow$ צורה C ו- u

בוסק:

$$u_x = \frac{x^2 y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u_{xx} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2) \cdot 2 \cdot 2x \cdot (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2xy^2 + 4x^3 - 4xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

כדי עבור u_y נקיים משוואה.

ההרמון $\rightarrow$ צורה V צורה אק"מ:

$$V_y = u_x, \quad V_x = -u_y$$

$$\Rightarrow V_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \text{const } C(x)$$

$$V_x = -u_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + C(x) \right) = -u_y = -\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$C'(x) = 0$$

$$C(x) = \text{const} \in \mathbb{R}$$

$$V = \frac{-y}{x^2+y^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

היא הפונקציה הוורטקסית