

26/03/2012 ירדן

(חזרי היטאן 10 ירדן) כ"א - י"ד חשוון



איקון: ערלציה משתנה

$$\text{Arg } z = \arctan \frac{y}{x} + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \pi & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$ איין

מבוא לאנליזה
בזרימה:

① $A \subseteq \mathbb{C}$ קטע - פתוח או סגור $z \in A$
קיים סדרה $z_n \in A$ כזו ש- $z_n \rightarrow z$
 בזרימה בזרימה

② $F \subseteq \mathbb{C}$ קטע סגור $z \in F$ בזרימה

למשל:

F סגור $\{z_n\} \subseteq F$ $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in F$ בזרימה

הוכחה:

$z \in F$ נניח: F סגור, $\{z_n\} \subseteq F$ סדרה מתכנסת ל- z .
נניח, בסתירה, $z \notin F$. אז, $z \in \mathbb{C} \setminus F$, כלומר
 $z \in \mathbb{C} \setminus F$ קטע פתוח. אז, קיים $\epsilon > 0$ כזה ש- $D_\epsilon(z) \subseteq \mathbb{C} \setminus F$.
אז $z_n \notin D_\epsilon(z)$ לכל n . אבל, $z_n \rightarrow z$, כלומר, $|z_n - z| < \epsilon$ עבור n מספיק גדול.
כלומר, $z_n \in D_\epsilon(z)$ עבור n מספיק גדול. לכן

$\Rightarrow$

לניה : אם סדרה $\{z_n\} \subset F$ כן $z_n \rightarrow z$

למשק"ם : $z \in F$

נכחשו : F סגורה , כלומר $F \setminus F$ סתומה

לניה : כלומר , $F \setminus F$ לא סתומה

אם , קי"ט נקודה $w \in F \setminus F$ כן א"א

סדרה $D_{w,\epsilon} \not\subset F$

ק"א כמות , נ"ס סדרה , משק"ם

$D_{w,\epsilon} \cap F \neq \emptyset$

נבחר , אחר $\epsilon_n = \frac{1}{n}$

נבחרו : $z_n \in D_{w,\epsilon_n} \cap F$ כן

משק"ם :

(1) $z_n \in F$ לכל n

(2) $|z_n - w| < \frac{1}{n}$ לכל n

אם , $z_n - w \rightarrow 0$ כלומר $z_n \rightarrow w$ וכן $\{z_n\} \subset F$

F סגורה , ז"ל $\lim z_n = w \in F$ בסגוריה

לניה

למשק"ם : (אנחנו בחרנו ביה) :

אם $f: C \rightarrow C$ רציפה

אזי f סגורה $U \subset C$ סתומה משק"ם

לניה $f^{-1}(U)$

$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ קומפקט $K \in \mathcal{C}$ דיון 3.7
 (ה"ת 3.7) $\bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$ סיוע $K \in \mathcal{C}$

דיון 3.8
 $f: C \rightarrow C$ - קומפקט $K \in \mathcal{C}$
 קומפקט $f(K)$

דיון 3.9
 'ק' $K \in \mathcal{C}$ סיוע $f(K)$ $f(K) \in \mathcal{C}$
 סיוע $f(K)$ $f(K) \in \mathcal{C}$
 סיוע $f(K)$ $f(K) \in \mathcal{C}$
 סיוע $f(K)$ $f(K) \in \mathcal{C}$

$U_1, \dots, U_n$ קומפקט $K \in \mathcal{C}$
 $f(U_1), \dots, f(U_n)$ $K \in \mathcal{C}$

$a = f(b) \in f(K)$ $a \in f(K)$
 $a = f(b) \in U_i$ $a \in U_i$
 $U_1, \dots, U_n$ $f(K) \in \mathcal{C}$

דיון

הכרזות: זכרון

$$|z_n - z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{או} \quad z_n \rightarrow z$$

$$|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{אם} \quad z_n \rightarrow \infty$$

הכרזות: אינסוף של זכרון

$$\{z_n\}, \{w_n\} \quad \text{סדרות} \quad \text{מחשבים}$$

$$z_n \cdot w_n \rightarrow c \quad \text{אם} \quad z_n \rightarrow \infty \quad \text{ומחשבים}$$

סדרות:

$$z_n \rightarrow z, \quad w_n \rightarrow w$$

$$z_n \cdot w_n \rightarrow z \cdot w \quad \text{(רשית)}$$

יהי $\varepsilon > 0$

$$|w| < M, \quad |z_n| < M \quad \text{כך} \quad c$$

(z_n מחשבים ולכן מסומן)

$$|w_n z_n - wz| = |w_n z_n - wz_n + wz_n - wz| \leq$$

$$\leq |z_n| |w_n - w| + |w| |z_n - z|$$

$$\begin{matrix} \text{מסומן} & \downarrow & \text{מסומן} & \downarrow \\ M & & M & & 0 \end{matrix}$$

ק"ל $N > 0$ כך $N > 0$

$$|w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$|w_n z_n - wz| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \text{(ק"ל)} \quad \text{סל}$$

מ. $N > 0$ סל

לע

$$z \in \mathbb{C}, \quad a_n = h \cdot z^n \quad (1)$$

$$b_n = \text{Arg} \left(\frac{1-h}{2n-i} \right) \quad (2)$$

$$r = |z| < 1 \quad (1)$$

$$|a_n| = h \cdot r^n \rightarrow 0$$

$$r = |z| \geq 1$$

$$|a_n| = h \cdot r^n \rightarrow \infty$$

$$b_n = \text{Arg} \left(\frac{1-h}{2n-i} \right) = \text{Arg} \left(\frac{(1-h)(2n+i)}{(2n-i)(2n+i)} \right) =$$

$$\text{Arg} \left(\frac{2ni - 2n^2 - 1 - in}{4n^2 + 1} \right) = \text{Arg} \left(-\frac{2n^2+1}{4n^2+1} + i \frac{h}{4n^2+1} \right)$$

$$b_n = \text{Arg}(c_n) \quad : n \rightarrow \infty$$

$$\text{Re}(c_n) < 0, \quad \text{Im}(c_n) > 0$$

$$c_n \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$b_n = \text{Arg}(c_n) \rightarrow \pi = \text{Arg}(-\frac{1}{2})$$

$$\text{Arg} \left(\frac{2n^2+1}{4n^2+1} - i \frac{h}{4n^2+1} \right) \rightarrow -\pi = \text{Arg}(-\frac{1}{2})$$

הצגה:

$z_0 \in \mathbb{C}$ נקודה
 f פונקציה
 $z_n \rightarrow z_0$ סדרה
 $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ תוצאה

הצגה: $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n - 1}{z^n + 1}$

השאלה: האם הפונקציה f מתאמת? $|z| = 1$?

הצגה:

$$\left| \frac{z^n - 1}{z^n + 1} - 1 \right| = \left| \frac{z^n - 1 - (z^n + 1)}{z^n + 1} \right| = \left| \frac{-2}{z^n + 1} \right| \rightarrow 0$$

אכן $f(z) = 1$ עבור $|z| > 1$

עבור $|z| < 1$

$$\left| \frac{z^n - 1}{z^n + 1} + 1 \right| = \left| \frac{z^n - 1 + z^n + 1}{z^n + 1} \right| = \left| \frac{2z^n}{z^n + 1} \right| \rightarrow 0$$

אכן $f(z) = -1$ עבור $|z| < 1$

$$f(z) = \begin{cases} 1 & |z| > 1 \\ -1 & |z| < 1 \end{cases}$$

אכן $f(z) = 1$ עבור $|z| > 1$ ו- $f(z) = -1$ עבור $|z| < 1$.
 עבור $|z| = 1$ הפונקציה לא מתאמת.

הגדרה: f (קטור) z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

- הגבול של f בנקודה z_0 הוא L אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כזה שכל z המקיים $0 < |z - z_0| < \delta$ מקיים $|f(z) - L| < \epsilon$.

אם $L = \infty$ או $L = -\infty$ נקראים הגבולים אלו "גבולות אינסוף".

- f (קטור) z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

- f (קטור) z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

הקטור f הוא $f(z) = \bar{z}$ וכן $g(z) = |z|$ z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

הקטור f הוא $f(z) = \bar{z}$ וכן $g(z) = |z|$ z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

הקטור f הוא $f(z) = \bar{z}$ וכן $g(z) = |z|$ z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

הקטור f הוא $f(z) = \bar{z}$ וכן $g(z) = |z|$ z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{z+t} - \bar{z}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{t}}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{z+it} - \bar{z}}{it} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-it}{it} = -1$$

הקטור f הוא $f(z) = \bar{z}$ וכן $g(z) = |z|$ z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

$$f(z) = \bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{g(z)^2}{z}$$

הקטור f הוא $f(z) = \bar{z}$ וכן $g(z) = |z|$ z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

הקטור f הוא $f(z) = \bar{z}$ וכן $g(z) = |z|$ z (נקודה) z_0 (נקודה) h (מרחק) $h \rightarrow 0$ (קרייט) h (מרחק) h (מרחק) h (מרחק)

זכור $z=0$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t}{t} = -1$$

הערה:

f (קטע) — אנליט' — בתחום D
 (D תחום, וקטעיה)
 אם f היא צ'ר-נצביל' (נחשב "הארכים")
 ככל נקודה $z \in D$.

הערה: $f = u + iv$ — אנליט' — ב- D
 ו- v פונק' קבועה אם f פונק' קבועה

הערה: $f = u + iv$ — אנליט' — ב- D , TFAE :

- (1) f קבועה
- (2) $\text{Im } f$, $\text{Re } f$ קבוע
- (3) $|f|$ קבוע
- (4) $\text{Arg}(f)$ קבוע

(C-R) תנאי קושי-רימן

הפונקציה f היא z - אנליטית

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

התנאים u_x, u_y, v_x, v_y (1)

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

דוגמה 1: f היא פונקציה אנליטית

$$f(x,y) = (3x+y) + i(3y-x) \quad (1)$$

$$f(x,y) = 2xy + i(x^2+y^2) \quad (2)$$

בחינה: $V = 3y - x, \quad u = 3x - y \quad (1)$

בנקודה (x,y) מתקנים $u_x = 3, u_y = -1, v_x = -1, v_y = 3$

התנאים $u_x = v_y$ ו- $u_y = -v_x$ מתקנים בכל נקודה (x,y) ב- $\mathbb{C}$ ולכן f היא פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$.

הפונקציה f היא אנליטית (כלומר f היא פונקציה אנליטית)

$$u = 2xy, \quad v = x^2 + y^2 \quad (2)$$

בנקודה (x,y) מתקנים $u_x = 2y, u_y = 2x, v_x = 2x, v_y = 2y$

התנאים $u_x = v_y$ ו- $u_y = v_x$ מתקנים בכל נקודה (x,y) ב- $\mathbb{C}$ ולכן f היא פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$.

אם $x=0$ ו- $y=0$ מתקנים $u_x = -v_x$ ו- $u_y = -v_y$.

לכן f היא פונקציה אנליטית ב- $\{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

$$D \text{ מרום}$$

$$\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Im}(g)$$

הצגה: f, g
 כוונתו
 3.1

$$\exists z_0 \in \mathbb{C} \quad , \quad g = if + z_0$$

$$f = u + iv$$

$$h = g - if$$

$$D \rightarrow h$$

$$h = \text{const}$$

$$\operatorname{Im}(h) = \text{const}$$

$$\operatorname{Re}(f) = u = \operatorname{Im}(g)$$

$$\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Im}(g - if) = \operatorname{Im} g - \operatorname{Im}(if)$$

$$if = iu - v, \quad \operatorname{Im}(if) = u$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(h) = 0$$

כל הנקודות של h הן מסתובבות

כל $z_0 \in \mathbb{C}$ קיים z כך

$$g - if = z_0$$

$$g = if + z_0$$

לע