תרגול מרוכבות

צריך להגיש 70% מתרגילי הבית
ורק לעבור

itay landner

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

z ל ארגומנט θ, $r = |z|$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$(\text{cis}\theta_1)\cdot(\text{cis}\theta_2) = \text{cis}(\theta_1+\theta_2)$$:מכפלה

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$e^{-i\alpha} = \overline{e^{i\alpha}}$$

שורשים:

$$\sqrt[5]{1-i}$$

(כל z שמקיים $z^5 = 1-i$ הוא $z \in \mathbb{C}$)

$$\omega = z^5 = 1-i$$

$$\omega = |1-i| \cdot e^{i(\text{Arg}(1-i))} = \quad (0, 2\pi]$$

$$\omega = \sqrt{2}e^{i} \qquad |1-i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(1-i) = \arctan\left(\tfrac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\tfrac{\pi}{4} + 2\pi k = 2\pi - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{7\pi}{4}$$

$$z = re^{i\theta}$$:נציב

$$z^5 = \omega$$

$$(re^{i\theta})^5 = \sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow r = 2^{\frac{1}{10}}, \quad 5\theta = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{7\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k$$

פתרונות:

$$z_1 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\cdot\frac{7\pi}{20}}, \quad z_2 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{7\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi\right)}, \ldots, \quad z_5 = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{7\pi}{20}+\frac{8}{5}\pi\right)}$$

תרגיל:

$0 < \alpha < \pi$, $\arg(1+e^{-i\alpha})$ — לחשב את

$$\operatorname{Arg}(1+e^{i\alpha}) = \arctan\left(\frac{-\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right) =$$

$(1+\cos\alpha) - i\sin\alpha$

$$= \arctan\left(\frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \arctan\left(-\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\alpha}{2}$$

$$\arg(1+e^{-i\alpha}) = \left\{-\frac{\alpha}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

תרגיל:

תהי z מספר מרוכב כלשהו

הוכיחו: $|z|^2 = z\operatorname{Re} z$

פתרון:

$a^2+b^2 = 2a$

$a^2 - 2a + b^2 = 0$

$(a-1)^2 + b^2 = 1$

מעגל ברדיוס 1 סביב $(1,0)$

תרגיל: הוכיחו: $|z|=1$ אם"ם $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

פתרון: $\Leftarrow$: נניח ש $z \neq 0$ כך ש $z \in \mathbb{R}$

אז $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{1} \cdot \bar{z}$ כי $|z|=1$

לכן $z+\frac{1}{z} = z+\bar{z} = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$: נניח ש $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ אז

$z+\frac{1}{z} = \overline{z+\frac{1}{z}}$

לכן $z+\frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$

$z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \bar{z} \cdot \frac{z}{|z|^2}$

$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} + \frac{z}{|z|^2}$

$z\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = \bar{z}\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right)$

$(z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0$

$|z| = 1 \iff 1 - \frac{1}{|z|^2} = 0$ 또는 $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\, z = 0 \iff z - \bar{z} = 0$ 또는

$z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 일 때 $\left|\frac{z}{|z|} - |z|w\right| = \left|\frac{w}{|w|} - |w|z\right|$

$\Leftrightarrow$

$|\quad|^2 = |\quad|^2$

$\left(\frac{z}{|z|} - |z|w\right)\overline{\left(\frac{z}{|z|} - |z|w\right)} = \left(\frac{w}{|w|} - |w|z\right)\overline{\left(\frac{w}{|w|} - |w|z\right)}$

$\left(\frac{z}{|z|} - |z|w\right) \cdot \left(\frac{\bar{z}}{|z|} - |z|\bar{w}\right) = \left(\frac{w}{|w|} - |w|z\right)\left(\frac{\bar{w}}{|w|} - |w|\bar{z}\right)$

$\frac{z\bar{z}}{|z|^2} - z\bar{w} - \bar{z}w + |z|^2|w|^2 = \frac{w\bar{w}}{|w|^2} - z\bar{w} - \bar{z}w + |z|^2|w|^2$ ✓

$1 = 1$

$\therefore$