W4D5   28/03/2012   הרצאה

הצמדה הרמונית של u = v כך ש- $u+iv\in A(G)$
(כלומר, $u+iv$ אנליטית)

פונקציות אלמנטריות

$x\in\mathbb{R}$ $\qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

מה קורה כש- $z\in\mathbb{C}$? $\qquad e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}}_{\cos}+i\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin}$$

$$\Rightarrow e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

$$e^{x+iy}:=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

כך נגדיר $e^z=e^{x+iy}$ ל- z מרוכב.

$e^z\in C^{\infty}(\mathbb{C})$ (כלומר גזירה ברציפות אינסוף פעמים)

נראה שפונ׳ האקספוננט מקיימת C-R:

$$e^z = \underbrace{e^x\cos y}_{u} + i\,\underbrace{e^x \sin y}_{v}$$

$$u_x = e^x\cos y \qquad u_y = -e^x\sin y$$

$$v_x = e^x\sin y \qquad v_y = e^x\cos y$$

אכן מקיימת C-R

פונ׳ האקספוננט היא אנליטית

$$e^z \in A(\mathbb{C})$$

נגזרת האקספוננט:

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z$$

"$u_x - iu_y$"

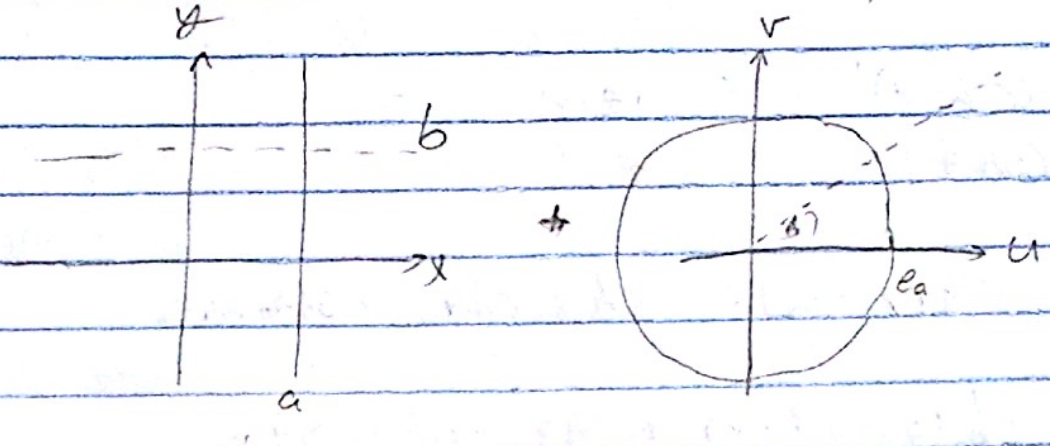
נשים לב:

$$w = e^z$$

$$|w| = e^x$$

$$\arg w = y$$

ציור פונקציות:



תחום הגדרה

ערכי הפונקציה בתחום

למה:

$f \in A(\mathbb{C})$, $f' = f$ $\Leftarrow$ $f(z) = Ce^z$

(נדיר)

נזכיר:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad Ch = \cosh = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

קוסינוס היפרבולי

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} , \qquad Sh(z) = \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \cosh(iz) , \qquad \sin z = \frac{\sinh(iz)}{i}$$

מקיימים:

$(ch\, z)' = sh\, z$

$(sh\, z)' = ch\, z$

$ch(z_1+z_2) = ch\, z_1\, ch\, z_2 + sh\, z_1\, sh\, z_2$

$sh(z_1+z_2) = sh\, z_1\, ch\, z_2 + ch\, z_1\, sh\, z_2$

למה:

אם $f''=f$ אז $f = A\, ch\, z + B\, sh\, z$

הגדרה:

$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $\qquad th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}$

$ct\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$ $\qquad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}$

תחום הגדרה של cth:

$sh\, z = 0 \iff e^z - e^{-z} = 0$

$e^{2z} = 1$

$2z = 2\pi i \cdot k \quad , k\in\mathbb{Z}$

$z = k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

ולכן זה מ״ש $z \neq k\pi i$ ל- $cth(z)$

- נגדיר:

$w = e^z$ אם $\ln w = z$, סימון

ולכן אם $z = x+iy$ אז $|w| = e^x$

$\arg(w) = y$

ולכן $\ln|w| = x$ (מוגדרת רק עד כדי כפולות)

$y = \arg w$

- y לא מוגדר באופן יחיד

קיבלנו $\ln w = \ln|w| + i\arg w$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\arg w$ - פונקציה רב ערכית.

תהי $F: G \to 2^{\mathbb{C}}$, $G \subset \mathbb{C}$ (כלומר ערכי F הן קבוצות)

נגדיר $\varphi: G_1 \to G$, $G_1 \subset G$

(G_1, φ) ענף של F אם

לכל $z \in G_1$, $\varphi(z) \in F(z)$

- נאמר (G_1, φ) ענף רציף אם $\varphi \in C(G_1)$

- נאמר (G_1, φ) אנליטי אם $\varphi \in A(G_1)$

- נוכל להגדיר: $\operatorname{Arg} z$ - ענף ראשי

יהיו (G,α_2) , (G,α_1) שני ענפים של $\arg z$.

אזי:

$$\alpha_1(z)-\alpha_2(z)=2\pi k$$

$$k:=k(z)\in\mathbb{Z}$$

אם $\alpha_1,\alpha_2\in C(G)$ אזי

$$k(z)=\frac{\alpha_2(z)-\alpha_1(z)}{2\pi}$$

ולכן $k(z)\in C(G)$ רציפה

אבל k רק מספרים שלמים

ולכן k קבוע ~~[illegible]~~

לכן, ל- α_1,α_2 ~~[illegible]~~ ענפים רציפים $\alpha_1-\alpha_2$ קבוע.

מסקנה: ב- $D\setminus\{0\}$ אין אף ענף רציף של $\arg$

הוכחה:

בשלילה, α ענף של $\arg$ ב- $D\setminus\{0\}$

~~[illegible]~~

נסתכל בתחום $G_1=D\cap(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$

נגדיר $\alpha_1=\mathrm{Arg}|_{G_1}$

אזי קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש- ~~$\alpha(z)=\mathrm{Arg}|_{G_1}$~~

$$\alpha(z)=\alpha_1(z)+k$$

ל- α_1 אין המשך רציף ל- $D\setminus\{0\}$.

$$\alpha_1(-\tfrac12+\varepsilon)\to\pi$$

$$\alpha_1(-\tfrac12-\varepsilon)\to-\pi$$

אם ב- G קיים ענף רציף $\alpha(z)$ של $\arg(z)$

אז קיים ענף רציף $l(z)$ של $\ln(z)$

$$l(z) = \ln|z| + i\alpha(z)$$

נגדיר:

$$\mathrm{Log}\, z := \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

- אם (G, l) ענף של $\ln(z)$

אזי $e^{l(z)} = z$

כלומר, l היא ההפכית של e^w

ובגלל ש- l רציפה, e^w אנליטית

נקבל ש- l אנליטית.

$$(l(z))' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

- תהא $f \in A(G)$, ולכל $z \in G$, $f(z) \neq 0$

אזי, נוכל להגדיר: $\ln f$

- אם ב- $\mathrm{Im} f$ מוגדר ענף l של $\ln z$

אז מוגדר ענף $l \circ f$ של $\ln f$

$$e^{l \circ f(z)} = f(z)$$