W12D5 31/05/2012 הרצאה

$f \in A(\mathbb{C}_+)$ (1)

$\mathbb{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im} z > 0 \}$

$\Gamma_R(t) = Re^{it} \quad , \; t \in [0, \pi]$

$f(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$

צ"ל:

$$\forall \lambda > 0 \qquad \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iz\lambda} \, dz \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad , \qquad g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$ (2)

- נשים לב:

$$x = z \in \mathbb{R} \qquad \frac{\sin x}{x} = \operatorname{Im} g(z)$$

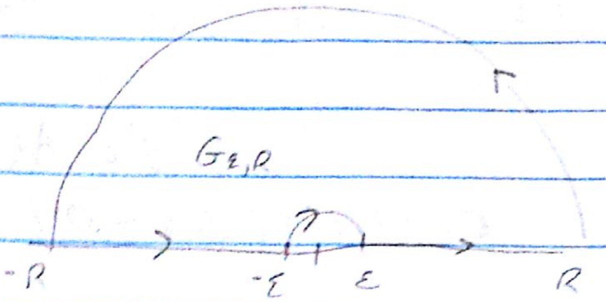
צ"ל:

$$I = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} g(z) \, dz$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx$$

נגדיר כעת:

$$I_{\varepsilon,R} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left[\int_{\varepsilon}^{R} g(z) \, dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} g(z) \, dz \right]$$



$$G_{\varepsilon,R} = \{ z \in \mathbb{C}_+ \mid \varepsilon < |z| < R \}$$

$$g \in A(G_{\varepsilon,R})$$

g אנליטית בתחום ולכן

$$\int_{\partial G_{\varepsilon,R}} g = 0$$

אזי

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{-\Gamma_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{\Gamma_R} = 0$$

אזי

$$I_{\varepsilon,R} = \int_{\Gamma_\varepsilon} - \int_{\Gamma_R}$$

נסמן

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z)$$

$$h(z) = e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z)\,dz$$

$\varepsilon < 1$: $$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z)\,dz \right| \le \max_{|z|<1} |h(z)| \cdot L(\Gamma_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon i e^{it}}{\varepsilon e^{it}}\,dt = \pi i$$

ולכן:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} i\pi$$

ע (1),

$$\int_{\Gamma_R} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

ולכן

$$I_{\varepsilon, R} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}]{} i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$$

(3) נחשב את:

$$0 < \alpha < 1 \qquad I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha (1+x)}\,dx$$

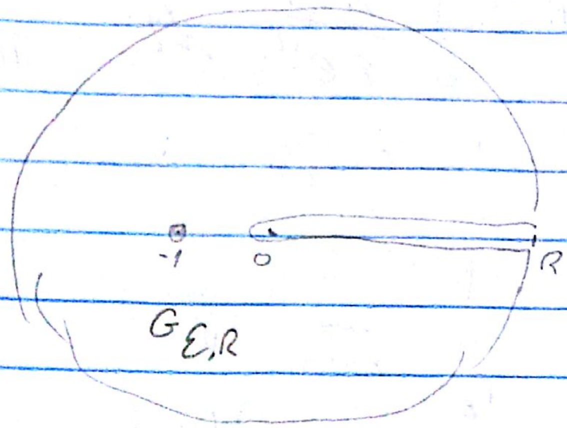
נגדיר:

$$g(z) = \frac{1}{z^\alpha (1+z)}$$

$$z^\alpha = e^{\alpha\, l(z)}$$

$$g \in A(G) \qquad l(z) = \ln(|z|) + i \arg z$$

$$G = \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \{-1\}\} \qquad z \in (0, 2\pi)$$



- $$\int_{\partial G_{R,\varepsilon}} = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} g$$

$$\Gamma_R = \{ |z| = R \}, \quad \gamma_\varepsilon = \{ |z| = \varepsilon \}$$

$$I_+ = [\varepsilon, R], \quad I_- = [R, \varepsilon]$$

$$\partial G_{R,\varepsilon} = I_+ + I_- - \gamma_\varepsilon + \Gamma_R$$

- $$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \right| = \left| \int_{|z|=\varepsilon} g(z)\, dz \right| \le 2\pi\varepsilon \max_{z \in \gamma_\varepsilon} |g(z)| \le$$

$$\overset{\varepsilon<1}{\le} 2\pi\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^\alpha (1-\varepsilon)} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ \alpha < 1}]{} 0$$

$$\left| \int_{|z|=R} g(z)\, dz \right| \le 2\pi R \max_{z \in \Gamma_R} \frac{1}{|z|^\alpha |1+z|} \le$$

$$\underset{\substack{\alpha > 0 \\ R > 1}}{\le} 2\pi R \frac{1}{R^\alpha (R-1)} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\cancel{4b} \quad I_+ = \int_\varepsilon^R \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx$$

$$I_- = \int_R^\varepsilon g(z) = \int_R^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha e^{2\pi i\alpha}(1+x)}\,dx$$

$$2\pi i \operatorname{Res}_{-1} g = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int_\varepsilon^R \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx + \int_R^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha e^{2\pi i\alpha}(1+x)}\,dx\right)$$

$$2\pi i \operatorname{Res}_{-1} g = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx - \frac{1}{e^{2\pi i\alpha}}\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx =$$

$$= \left(1 - e^{-2\pi i\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx$$

$$\operatorname{Res}_{-1} g(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)g(z) = \left.\frac{1}{z^\alpha}\right|_{z=-1} = e^{\pi i\alpha}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\,dx = 2\pi i\,\frac{1}{e^{\pi i\alpha}\left(1-e^{-2\pi i\alpha}\right)} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i\alpha} - e^{-\pi i\alpha}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{2i\sin(\pi\alpha)} = \boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}}$$

$$f(z) = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} \in A(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

(מחזורית) $f(z+1) = f(z)$

$$\sin \pi z = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + O(z^3) =$$

$$= \pi z \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + O(z^3) \right)$$

$$(\sin(\pi z))^2 = (\pi z)^2 \left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3} + O(z^2) \right)$$

$$\frac{1}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{(\pi z)^2} \left[1 + \frac{(\pi z)^2}{3} + O(z^2) \right] =$$

$$= \frac{1}{(\pi z)^2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + \cdots O(z^2)$$

$\Rightarrow$ עבור $f(z) - \frac{1}{z^2}$,

0 נק' סליקה!

(משמש בכך ש- $f(z+1) = f(z)$, ועוד)

באופן דומה, שעבור $f(z) - \frac{1}{(z-n)^2}$, n היא נק' סליקה!

לכל $n \in \mathbb{Z}$.

נרצה להשתמש במה שעשינו קודם $(R = P + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N)$,
אבל כאן $N = \infty$! אז צריך להיזהר עם ההתכנסות...
נגדיר פונ' עזר:

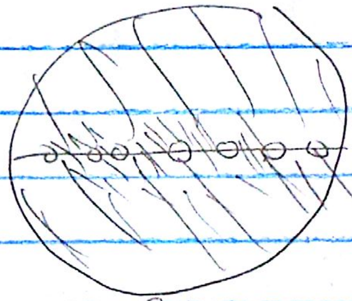
$$g(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

עבור z_0

ונבחין כי $\forall$ חוץ מסביבה של z_0, g מתכנס יפה ($\sum \frac{1}{n^2}$ ויירשטרס)
בצורה דומה לזו ח
נגדיר תחום – $G_{R,\varepsilon}$ – עיגול ברדיוס R, חוץ מסביבות-ε של השלמים.

$$G_{R,\varepsilon} := \{|z|<R \cap dist(z,\mathbb{Z})>\varepsilon\}$$

נראה, הטור מתכנס במ"ש ב-$G_{R,\varepsilon}$ לכל ε.


$G_{\varepsilon,R}$

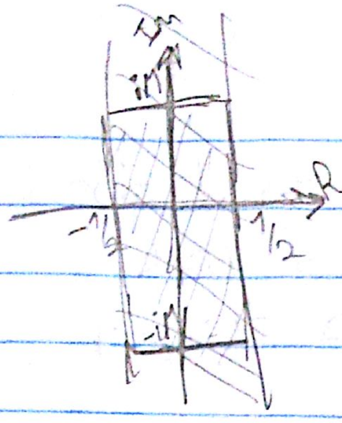
עבור $z\in G_{\varepsilon,R}$

חסום ע"י $\left(\frac{1}{|z-n|^2}\right)$ $\forall$ כי – עבור $|n| \le 2R$; ועבור $|n|>2R$
$|z-n|>\varepsilon$; $|z-n|\ge\frac{n}{2}$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{|z-n|^2} \le \sum_{|n|\le 2R}\frac{1}{\varepsilon^2} + \sum_{|n|>2R}\frac{4}{n^2}$$

מסקנה: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$ מתכנס במ"ש ולכן בכל $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow g\in A(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$. $\xRightarrow{\text{ולכן}}$ $h(z) := f(z) - g(z) \in A(\mathbb{C})$
והצלחנו "להרוג" את הקטבים של f



כעת, נביט ב-h ברצועה סגורה

נביט במלבן - $(-iM, iM)$, ומחוץ למלבן

בתוך המלבן - h אנליטית ולכן חסומה

מחוץ למלבן - ניזכר בעובדה הבאה:

$$(z=x+iy) \Rightarrow |\sin \pi z| = \left|\frac{e^{i\pi(x+iy)} - e^{-i\pi(x+iy)}}{2i}\right|.$$

ומחוץ למלבן ($|y|\geq M$), נקבל

$$|\sin \pi z| \geq \frac{e^{M}-1}{2}$$

אז $f \xrightarrow[\text{Im} z\to\infty]{} 0$

אבחנה - זה אותו דבר עבור הפונק' g.