W12D1 28/05/2012 הרצאה

$f \in A(G \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$

$f \in C(\overline{G} \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$

$\Gamma: \partial G \in C^1_{P.W.}$

אזי:

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \operatorname{res}_{a_i} f}$$

דוגמא:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t}\,dt \quad , a>1$$

$$\cos t = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$z=e^{it} \qquad dz = ie^{it}dt = iz\,dt$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{iz}\,dz$$

$$\int_{|z|=1} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\,dz = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2az+1}\,dz$$

נמצא אפסים:

$$z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$$

$z_1 = -a-\sqrt{a^2-1} < -1$ — z_1 מחוץ למעגל

$z_2 = -a+\sqrt{a^2-1}$, $|z_2| = \frac{1}{|z_1|} < 1$ — z_2 בתוך המעגל

פשוטים אזי

$$\operatorname{res}_{z_2}\left(\frac{1}{z^2+2az+1}\right) = \operatorname{res}_{z_2}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right) = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

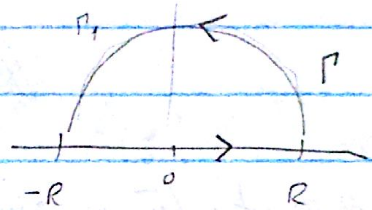
ולכן:

$$\int = 2\pi i \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

דוגמא נוספת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}$$

נגדיר Γ:



$$\int_{\Gamma} \frac{z^4}{1+z^6}\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} res_{a_i} f$$

כאשר $|a_j|<R$, $\mathrm{Im}\,a_j>0$

Γ_1 : $|z|=R$, $\mathrm{Im}\,z>0$

$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right| \le L(\Gamma_1) \max_{|z|=R} f(z) = \pi R \cdot \max_{|z|=R} \frac{|z|^4}{1+|z|^6} =$$

$$= \pi R \cdot \frac{R^4}{1+R^6} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

ולכן $\int_{\Gamma_1} = 0$ כאשר $R\to\infty$

- קטבים של $1+z^6$ שנמצאים ב- $\mathrm{Im}\,z>0$: (אם $R>1$)

$\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\omega_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\omega_3 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$

נסמן:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$\varphi(z) = z^4$

$\psi(z) = 1+z^6$

$$res_{w_j} f = \frac{\varphi(w_j)}{\psi'(w_j)} = \frac{w_j^4}{6w_j^5} = \frac{1}{6w_j}$$

לכן, קיבלנו:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} \cdot \underbrace{(\overline{w_1}+\overline{w_2}+\overline{w_3})}_{=\overline{2i}} = \frac{2\pi}{3}$$

דוגמא נוספת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\,dx \quad , \quad \lambda > 0$$

נסמן:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \ldots$$

כמו קודם:

$$I_R = \int_{\Gamma} - \int_{\Gamma_1}$$

הנק' הסינגולרית היחידה בתחום היא i

$$Res_i f = \frac{e^{i\lambda i}}{2i} \Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{e^{i\lambda i}}{2i} = \pi e^{-\lambda}$$