

W11D5

24/05/2011

ד"ר

המשפט של רימן-רוס
 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$

המשפט של רימן-רוס
 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$

אם $U_a \in G$ ו- $f \in A(G)$ אז
 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$

$$g = \frac{1}{f}$$

$$g \in A(U_a)$$

$$g(z) \rightarrow 0$$

$$h(z) = \begin{cases} g(z) & z \in U_a \\ 0 & z = a \end{cases}$$

$$h \neq 0$$

$$h \in A(U_a)$$

המשפט של רימן-רוס
 $h \in A(U_a)$

$$h_1(a) \neq 0, \quad h(z) = h_1(z-a)^{m_1}$$

$$\forall z \in U_a \quad f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{h_1(z)} \cdot \frac{1}{(z-a)^{m_1}}$$

$$\frac{1}{h_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

$$\frac{1}{h_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_{k+m} (z-a)^k$$

לשון - תוצאות - תוצאות (Lemmas):

אם $f \in A(G)$, $a \in G$, $U_a \subset G$ אז
 $\exists \delta > 0$ כזה שכל $c \in \mathbb{C}$ שבו
 $|f(z) - c| < \delta$ אז $z \in U_a$

הוכחה:

נניח $c \in \mathbb{C}$ ונניח $z \in U_a$ אז

$$|f(z) - c| > \delta$$

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

$$\forall z \in U_a \quad |g(z)| \leq \frac{1}{\delta} \quad \text{כלומר} \quad g \in A(U_a)$$

אם $g \in A(U_a)$ אז $g \equiv 0$

$$\bar{g} \in A(U_a) \quad \text{כלומר}$$

$$z \neq a \quad \text{אם} \quad \bar{g} \equiv g \quad \text{אז}$$

אם $g \equiv 0$ אז $f \equiv c$

אם $g \not\equiv 0$ אז $f \equiv c$

לכן

$$\text{res}_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = C_{-1}$$

$$\gamma = \partial D_\varepsilon(a)$$

$$\overline{D}_\varepsilon^*(a) \subset G$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

כך נקבע

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

אם $R > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל $z \in G$ עם $|z-a| < \delta$ מקיים $|f(z)| < R$.
כלומר, f מתנהגת כמו פולינום בקטע סביב a .

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{כאשר } z \neq 0$$

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$f = \frac{p}{q} \quad \text{כאשר } p, q \text{ פולינומים}$$

$$f \in A(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \quad \text{אם } f \text{ היא פונקציה רצופה וחסומה ב-} \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\text{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$R_1 > R, \quad \gamma = \{z \mid |z| = R_1\}, \quad \{z \mid |z| > R\} \subset G$$

$$\text{res}_\infty f = -\text{res}_0 F, \quad F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

GCC

$\Gamma = \partial G$

$$f \in A(G \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$$

$$f \in C(\bar{G} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \text{res}_{a_j} f$$

$f \in \text{holo auf } a$

$$C_a = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

$$\text{res}_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$$

ILN 2 B

$$\text{res}_1 f = \frac{1}{(1+2)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{res}_{-2} f = \frac{1}{1!} \left(\frac{z}{z-1} \right)' \Big|_{z=-2} = \left(1 + \frac{1}{z-1} \right)' \Big|_{z=-2} = \frac{-1}{(z-1)^2} \Big|_{z=-2} = -\frac{1}{9}$$

Answer (ans) CNV MLN/13

Answer to $R = \frac{P}{Q}$ (I)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(\cos t, \sin t) dt$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad \sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$f(z) = R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$I = 2\pi i \sum \text{Res}_{z_i} f$$