

11/11/17

20/05/2017 הכרזה

לשם הנושא:

$f \in A(G)$

$$\{z \mid r \leq |z - z_0| \leq R\} \subseteq G$$

כאשר $r < |z - z_0| < R$ ו- z_0 נקודה פנימית.

הפונקציה $f(z)$ מתפתחת בסדר טיילור:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$\gamma_p = \{z \mid |z - z_0| = p\}, \quad r \leq p \leq R$$

הוכחה:

הכפל:

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad (n \geq 0)$$

$D_r(z_0) \rightarrow$ הפונקציה $f_+ \in A(D_R(z_0))$

$$b_n = \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-z_0)-(z-z_0)} = \frac{-1}{(z-z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{z-z_0}}$$

$$z \in \Gamma_r \quad \left| \frac{z-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{r}{|z-z_0|} = \rho < 1$$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{-1}{z-z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{z-z_0} \right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k$$

$$z \in \Gamma_r \quad \rightarrow \text{ענף פתוח}$$

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k f(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k$$

$$f_-(z) = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-z_0)^n \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$f_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} (f_+ - f_-)$$

המשפט: f היא פונקציה אנליטית

• $f \in H(D)$

אם f היא פונקציה אנליטית ב- a ו- $\epsilon > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$D_\epsilon^*(a) := D_\epsilon(a) \setminus \{a\} \subseteq G, a \notin G$$

עבור כל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

המקדמים C_n נתונים על ידי

(I) $C_n = 0$ עבור $n < 0$ • a היא נקודה אנליטית

(II) $C_n = 0$ עבור $n > N$ • f היא פונקציה רגולרית

(III) $C_n = 0$ עבור $n < -N$ • f היא פונקציה אנליטית

למשל: $f(z) = \frac{1}{z-a}$ • $D_\epsilon^*(a) \subset G$ • f היא פונקציה אנליטית

אם a היא נקודה אנליטית

$$M = \sup_{|z-a| \leq \epsilon} |f(z)| < \infty$$

$$\forall r, 0 < r < R = \frac{\epsilon}{2}$$

$$|C_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \sup_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} = \frac{M}{r^n}$$

$$\forall r < \epsilon/2 \quad |C_n| \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

לכן $C_n = 0$ עבור $n < 0$