

W10D5

17/05/2012 הדר צור

סדר (פונקציה):

$$f(0) = 0$$

$$f \in A(D)$$

$$\text{Im } f \subseteq \bar{D}$$

$$z \in D \quad \sqrt{r} \quad |f(z)| \leq |z|$$

$$0 \neq z_0 \in D \quad \text{קיים}$$

$$\lambda \quad \text{קיים} \quad |f(z_0)| = |z_0|$$

$$\forall z \quad f(z) = \lambda z$$

הוכחה:

הוכחה:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \in A(D) \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

קיים $r > 0$ כך ש-

$$\exists z_0 \in \bar{D}_r(0)$$

$$|g(z)| \geq |g(z_0)| \quad \forall z \quad |z| \leq r$$

$$|z_0| = r \quad \text{כך} \quad g \neq \text{const}$$

לפי משפט המקסימום (המקסימום)

לפי:

$$\forall z, |z| \leq r: \quad \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} \leq \frac{1}{r}$$

$$\forall r < 1: \quad \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1$$

לפי, $\forall z \in D$ מקיים:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{כאשר} \quad \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$$

הוכחה, אם קיים $z_0 \neq 0$ כך ש- $|f(z_0)| = 1$ אז

המקסימום המקסימום $f(z) = \text{const}$

לפי

התכנסות פונקציות: $f_n \xrightarrow{p} f$ $\Leftrightarrow$ $f_n|_U \xrightarrow{p} f|_U$
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \geq \frac{1}{\delta} \forall x \in U$

קטגוריית קטגוריית $\mathcal{K} \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{p} f$
 $f_n|_U \xrightarrow{p} f|_U$

קטגוריית $\mathcal{K}$ $\Rightarrow$ $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \geq \frac{1}{\delta} \forall x \in U$
 $f_n|_U \xrightarrow{p} f|_U$

$K \subseteq \bigcup U_k$ K סגור

אם $f_n \xrightarrow{p} f$ אז $f_n|_U \xrightarrow{p} f|_U$ $\Rightarrow$ $f_n|_U \xrightarrow{p} f|_U$
 $\Rightarrow$ $f_n|_U \xrightarrow{p} f|_U$

בעל ייחוס:

$$f_n \xrightarrow{P} f, \quad f \in A(\mathbb{D})$$

152

$$f \in A(\mathbb{D}) \quad (1)$$

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{P} f^{(k)}$$

$$K \subset \mathbb{D} \quad (2)$$

הוכחה:

נניח שיש סדרה (f_n) של פונקציות

על $\mathbb{D}$ כאלה

$$f_n|_{\partial\mathbb{D}} \Rightarrow f|_{\partial\mathbb{D}} \quad \text{כאן, קיבלנו} \quad \partial\mathbb{D}$$

$$\int_{\partial\mathbb{D}} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{D}} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

אבל

(2)

$$\mathbb{D} \subset G, \quad z \in \mathbb{D}, \quad z \in G, \quad \Gamma := \partial\mathbb{D}$$

(10)

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad \forall z \in \mathbb{D}, \quad \mathbb{D} = \mathbb{D}_r(z_0)$$

$$K = \mathbb{D}_r(z_0) \quad (10)$$

$$\forall z \in K, \quad |(\zeta - z)| \geq r/2$$

$$|\zeta - z_0| = r$$

$$\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \xrightarrow{z \in \mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \quad \text{כאן}$$

$$\zeta \in \partial\mathbb{D}_r(z_0)$$

$$\sup_{\substack{z: |z-\beta| < \frac{1}{2} \\ |z-\beta| < r}} \left| \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-\beta)^{k+1}} \right| \leq \left(\frac{2}{r} \right)^{k+1} \sup_{z, \beta} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{4!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\beta)}{(z-\beta)^{k+1}} d\beta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\beta)}{(z-\beta)^{k+1}} d\beta = f^{(k)}(z)$$

Gen

$$\begin{aligned} |z| < 1: & \quad \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \\ |z| > 1: & \quad -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \end{aligned}$$

$$\sum a_n z^n \quad \frac{1}{(1-z)(2-z)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

$$|z| < 1 \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

$$|z| < 2 \quad \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} z + \frac{1}{2^3} z^2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad |z| < 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = \begin{cases} -1 & n < 0 \\ \frac{1}{2^{n+1}} & n \geq 0 \end{cases} \quad 1 < |z| < 2$$

R₂: Tim V. Cant

$$R = \left\{ z \mid a_2 | z - a_1 | \leq \rho_1 \right\} \quad (11)$$

17/10/16 1/2000 12.16

$P_2 \leq P_1 \leq P_0 = P_0$

$$R(p_1, p_2) = \int_{p_2}^{177.1' p_1} p_1$$

$$\oint_{\partial R(R_1, R_2)} f(z) dz = 0$$

$$E_n \quad V_0 = \{ R_2 - (2 - 2) \leq R_1 \mid 0 \leq \arg(2 - 2) \leq \frac{2\pi}{4} \}$$

$$W_0 = \text{Conv } Y_0 \text{ CR}(P_1, P_0)$$

$$V_h = \frac{1}{2} \left(P_1 + 2P_2 + P_3 \right) \cdot \frac{100}{100} = \frac{100}{2} = 50$$

הוכחה: $n=0,1,\dots,n-1$ ע"פ ההנחה

$$\int_{\partial V_n} f(z) dz = 0$$

לכן $0 = \partial V_0 + \partial V_1 + \dots + \partial V_{n-1} = \partial R(R_1, R_1)$ פ"ח

$f \in A(G)$, $R = \{ R_2 \leq |z - z_0| \leq R_1 \} \subset G$
 $V_1 = \{ z \mid |z - z_0| = R_1 \}$
 $V_2 = \{ z \mid |z - z_0| = R_2 \}$
פ"ח $z \in R$ $\int$, $\int$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_2}^{R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$V_1 - V_2 = \partial R$$

$$\forall |z - z_0| < R_1 : \frac{1}{2\pi i} \int_{R_1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1$$

$$z \in R \Rightarrow |z - z_0| > R_2 : \frac{1}{2\pi i} \int_{R_2} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} , g \in A(G) : \text{פ"ח}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{R_1 - R_2} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{R_1 - R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_1 - R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$