w10D1 13/05/2012 הרצאה

תזכורת:

הראינו: שלכל $\varphi \in C(\Gamma)$,

$$f(z)=\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \in A(\mathbb{C}\setminus\Gamma)$$

וכן

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma \ ,\ w\in D_r(z) \ ,\ r=dist(z,\Gamma)$$

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w-z)^n$$

$$f^{(n)}(z)=\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$$

תזכורת:

יהי $f\in A(G)$ , $z\in G$

נגדיר ריבוי של שורש:

$$M_f(z)=\min_n\{f^{(n)}(z)\neq 0\}$$

z לא שורש $\Longleftrightarrow$ $M_f(z)=0$

$f(z)\neq 0$

$M_f(z)=1$ – שורש פשוט

אם $M_f(a)=m<\infty$ אז קיים $g\in A(G)$ כך ש

$$\begin{cases} f(z)=(z-a)^m g(z) & \forall z\in G \\ g(a)\neq 0 \end{cases}$$

~~משפט: יהי $a\in G$, $f\in A(G)$~~

~~אם $m_f(a)=\infty$ אזי $f\equiv 0$~~

~~$V=\{z\in G \mid m_f(z)=\infty\}$~~

משפט יחידות:

G תחום, $f_1,f_2\in A(G)$

- נניח שקיים $a\in G$ כך שלכל $n\geq 0$:

$$f_1^{(n)}(a)=f_2^{(n)}(a)$$

אזי, $f_1\equiv f_2$.

(נובע מהמשפט לגבי שני האפיונים כי $m_{f_1-f_2}(a)=\infty$)

מסקנה: יהי $a\in G$, $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $z_n\in G\setminus\{a\}$

כמו כן, $f_1(z_n)=f_2(z_n)$ לכל $n$.

אזי: $f_1\equiv f_2$.

הוכחה:

נסמן: $f=f_1-f_2$.

$f(z_n)=0$ לכל $n$, ולכן $f(a)=0$.

אם $m_f(a)<\infty$ אז בהכרח

a זה שורש מבודד, כלומר קיימת סביבה של a

בה אין אפסים אחרים של f, בסתירה.

- מסקנה: אם $f\in A(G)$ אז קבוצת השורשים של f

היא בת-מנייה, בדידה, בלי נק' הצטברות

משפט ממוצע:

$f \in A(G)$ , $z_0 \in G$ , $\bar{D}_r(z_0) \subset G$

אזי:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

הוכחה:

נוסחת קושי

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

נכתוב פרמטריזציה:

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$

$\gamma'(t) = ire^{it}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0}\, rie^{it}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

**משפט:** עקרון המקסימום

$f\in A(G)$ , $a\in G$

$|f|$ מקבלת מקסימום מקומי בנק' $a$

אזי, $f\equiv const$

**הוכחה:**

קיים $r>0$ כך ש $\bar{D}_r(a)\subseteq G$

וכן לכל $w\in\bar{D}_r(a)$ מתקיים $|f(w)|\le|f(a)|$

(כי $a$ מקסימום לוקאלי.)

- נסמן: $\theta := -\arg f(a)$ , $\lambda := e^{i\theta}$

$$|f(a)| = \lambda f(a) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$$

מצד שני: $\lambda f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda f(a)\,dt$

אזי: $$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda f(a) - \lambda f(a+re^{it})\,dt =$$

כי ממשי

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left(\lambda f(a) - \lambda f(a+re^{it})\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda f(a) - Re(\lambda f(a+re^{it}))\,dt$$

ושים לב: $Re(\lambda f(a+re^{it}))\le|\lambda f(a+re^{it})|$
$= |f(a+re^{it})| \le |f(a)| = \lambda f(a)$

ולכן האינטגרנד הוא פונקציה אי-שלילית, שהאינטגרל שלה 0

לכן $\lambda f(a) - Re(\lambda f(a+re^{it})) = 0$

נקבל:

$$0 \le \lambda f(a) = Re\left(\lambda f(a+re^{it})\right)$$

אזי:

$$\forall t \qquad \lambda f(a) = \lambda f(a+re^{it})$$

אזי, $f$ קבועה על המעגל

ולכן $f-const$ קבועה אפס על המעגל, אינסוף

ולכן היא אפס על כל $G$ ~~[illegible]~~

ולכן $f=const$ על $G$.

משל