04/03/2012 מרוכבות - שיעור

יפים גלוסקין

ספרים:

Dr. Sarason notes 04
Complex Funct.

שי אבמן - אנליזה קלאסית

שעות קבלה:
יום חמיש 15:00

מספרים מרוכבים

$i^2 = -1$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$

$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$

$\mathbb{C}$: $\alpha + i\beta$ לפי

$0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$

$-(\alpha, \beta) = (-\alpha, -\beta)$

$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$

תכונות: $u, v, w \in \mathbb{C}$
$u(v + w) = uv + uw$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - חבורה קומוטטיבית ביחס לכפל

$1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$, $i = (0, 1)$

$u = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^*$: $u^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$

$u = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$

u 의 실수부 $\alpha = Re(u)$

u 의 허수부 $\beta = Im(u)$

u 의 켤레 $\bar{u} = (\alpha, -\beta)$

$$Re\, u = \frac{u + \bar{u}}{2}$$

$$Im\, u = \frac{u - \bar{u}}{2i}$$

$u = (\alpha, \beta)$

u 의 절댓값 $|u| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$$u \cdot \bar{u} = |u|^2$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\alpha \to (\alpha, 0)$

$$u^{-1} = \frac{\bar{u}}{u\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{|u|^2}$$

$\overline{u_1 \cdot u_2} = \overline{u_1} \cdot \overline{u_2}$:מכפלה של צמודים

$\overline{u_1 \cdot u_2} = u_1 \cdot \overline{u_1}$, $u_1 = u$

$u, z \in \mathbb{C}$ יהיו

$$|u+z|^2 = |u|^2 + |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, u\bar{z}$$

הוכחה:

$$|u+z|^2 = (u+z)(\overline{u+z}) = (u+z)(\bar{u}+\bar{z}) =$$

$$= u\bar{u} + u\bar{z} + z\bar{u} + z\bar{z} =$$

$$= |u|^2 + u\bar{z} + \overline{u\bar{z}} + |z|^2 =$$

$$= |u|^2 + |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, u\bar{z}$$

מסקנה: אי שוויון המשולש

$$|u+z|^2 \le |u| \cdot |z|$$

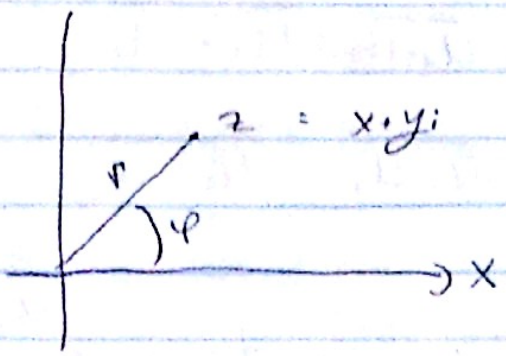
הוכחה:

$$|u+z|^2 = |u|^2 + |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, u\bar{z} \le |u|^2 + |z|^2 + 2|u\bar{z}| =$$

$$= |u|^2 + |z|^2 + 2|u||z| = (|u| + |z|)^2$$

מקבלים את אי שוויון המשולש.

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$



$z \neq 0$ הזווית של z - $\varphi = \arg(z)$

$r = |z|$

הצורה - (r, φ) הקואורדינטות - הקוטבית

$\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \neq 0$

$x = 2\cos\varphi$

$y = 2\sin\varphi$

$\operatorname{Re} z = |z| \cos \arg z$

$\operatorname{Im} z = \sin$

$z \neq 0$, $\arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$

הכפל במרוכבים בקואורדינטות פולריות:

$z_1 \sim (r_1, \varphi_1)$

$z_2 \sim (r_2, \varphi_2)$

$z_1 = r_1 \cos\varphi_1 + i\, r_1 \sin\varphi_1$

$z_2 = r_2 \cos\varphi_2 + i\, r_2 \sin\varphi_2$

$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) +$

$+ i\,(r_1 r_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + r_1 r_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) =$

$= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\, r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) =$

$z_1 \cdot z_2 \sim (r_1 \cdot r_2,\ \varphi_1 + \varphi_2)$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$

דוגמה: $z_1 = z_2 = -i$

$|-i| = 1$

$\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$

$\arg((-i)(-i)) = \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}$