

WGD5

10/05/2012

20377

$$f \in A(G)$$

$$D_R(z_0) \subset G$$

$$\forall z \in D_R(z_0)$$

$$C \subset D_R(z_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

$$\varphi \in C(\mathbb{I}_m^M)$$

$$z \in \mathbb{C}^M$$

$$f(z) := \int_M \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$f \in A(\mathbb{C} \setminus M)$$

$$|z - z_0| < r$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

$$r = \text{dist}(z_0, M) = \inf_{w \in M} |z_0 - w|$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \int_M \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$r = \text{dist}(z_0, \Gamma)$$

$$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

$$|z - z_0| < r$$

$$c.p.$$

$$z \in \Gamma$$

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0 - (z_0 - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{z - z_0}}$$

$$: \text{geometric series}$$

$$\left| \frac{z_0 - z}{z - z_0} \right| < \frac{|z - z_0|}{r} = \frac{r}{r} = 1 < 1$$

$$: \text{OK}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - z}{z - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{z - z_0}}$$

$$\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - z}{z - z_0} \right)^n = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0}$$

$$: \text{p.f.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n \cdot \varphi(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$$

$$: \text{p.f.}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{(z - z_0)^n \varphi(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$: \text{p.f.}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad C_n = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$f(z) = \sum C_n (z-z_0)^n \quad : f(0) = 1$$

$$f'(z) = \sum n C_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$f(z_0) = C_0$$

$$f'(z_0) = 1 \cdot C_1$$

$$f^{(n)}(z_0) = n! \int \frac{u(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$f \in A(G)$$

$$GCC$$

$$f \in C^\infty(G) \quad (1)$$

$$C := \partial D, \quad \bar{D} \subset G \quad (2)$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$|z-z_0| < \text{dist}(z_0, \partial G) \quad \text{or } z \in \text{int } G \quad z_0 \in G \quad (3)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

G : Γ ∂G $f \in C(G)$ $f|_{\partial G}$

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0$$

$$f \in A(G) \quad \text{ש"כ}$$

הוכחה:

f - Γ ∂G F Γ ∂G F Γ ∂G

$$F'(z) = f(z) \quad , \quad z \in G \quad F|_{\partial G}$$

$$f \in A(G) \Leftrightarrow f' \in C^0(G) \Leftrightarrow f \in C^0(G) \Leftrightarrow f \in A(G)$$

למשל

הוכחה:

$$z_0 \in G$$

$$f \in A(G)$$

$$\bar{D}_R(z_0) \subset G$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$|\zeta - z_0| = R$$

$$\boxed{\text{ע"ק ע"כ}} : \text{פ"ק, נ"כ}$$

$$: \text{ש"כ} \quad M_R = M_R(z_0) = \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)| \quad \text{מ"כ}$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} M_R$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \max_{\zeta \in \bar{D}_R(z_0)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right|$$

$$= n! \cdot R \cdot \frac{M_R}{R^{n+1}} = \frac{n! \cdot M_R}{R^n}$$

: Liouville (לעבן

$$\forall z \quad |f(z)| \leq M \quad : \text{אין } f, \quad f \in A(\mathbb{C})$$

$$f \equiv \text{const} \quad \text{ס'ל}$$

ביטוי:

$$: \text{אין } f \quad n=1 \quad \text{אין } f \quad \text{אין } f$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \cdot M_R(z_0)}{R^n} \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$z_0 \in \mathbb{C} \quad \text{ס'ל} \quad f'(z_0) = 0 \quad \text{אין } f$$

לעבן

סקיצה:

המשפט של ליאוויל

י'ה

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad a_n \neq 0$$

$$P(z) = 0 \quad \text{אין } z \quad \text{אין } z$$

$$P(z) = 0 \quad \text{אין } z \quad \text{אין } z$$

ביטוי:

$$P(z) \neq 0 \quad \text{אין } z \quad \text{אין } z$$

$$F(z) = \frac{1}{P(z)} \in A(\mathbb{C}) \quad : \text{אין } z$$

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \max_{|z|=R} \frac{1}{|a_n z^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k|} = \frac{1}{|a_n| R^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| R^{k-n} \right)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

אין P קבוע

$$f \in A(\mathbb{C}) \quad \text{אין } f \quad \text{אין } f$$

לעבן

$$z_0 \in G$$

$$f \in A(G)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

$$f(z_0) = 0$$

$$= 20 \text{ (כ) } (732)$$

$$m_f(z_0) = \min \{ n \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0 \}$$

$$z_0 \text{ צריכ } k \text{ כזה } k = m_f(z_0) \text{ (732)}$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} & z \neq z_0 \\ \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} & z = z_0 \end{cases}$$

$$g \in A(G)$$

$$|z - z_0| < r$$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!} (z - z_0)^m$$

$g(z)$

$$g \in A(G)$$

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

$$g(z_0) \neq 0$$

$$\text{...}$$

למשל: $z_0 \in G$, $f \in A(G)$, G פתוח.

וכן $M_f(z_0) = 0$

כל G - כן $f \equiv 0$

הוכחה:

נסמן: $V = \{z \mid M_f(z) = 0\}$

אז V קבוצת נקודות מסוימות

אז $V = G$ או $V \neq G$

וכן $z_0 \in G$ וכן $V = G$

(אם $V \neq G$ אז V סגורה):

$V = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in G \mid f^{(n)}(z) = 0\} = \text{סגורה}$

קבוצה סגורה ופתוחה
היא אוכלוסית
כלומר $V = G$

(אם $V \neq G$ אז V סגורה):

$G \setminus V = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{z \in G \mid f^{(n)}(z) \neq 0\}$

אז $G \setminus V$ פתוח

$D_r(z_0) \subset G$

אם $z_0 \in V$

כל $w \in D_r(z_0)$ אז $w \in V$

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (w-z_0)^n = 0$$

$\Rightarrow f|_{D_r(z_0)} \equiv 0$

$\Rightarrow f|_{D_r(z_0)} \equiv 0$

אז

$\Rightarrow V \text{ פתוח}$