WSD1 06/05/2012 הרצאה

תזכורת - משפט לעבה:

G קמור, $f\in A(G)$ $\Leftarrow$ קיים $F\in A(G)$ כך ש $F'=f$

<u>למה:</u>

G_1, G_2 קמורים, $G=G_1\cup G_2$, $f\in A(G)$

צ"ל קיימת קדומה ב- G:

<u>הוכחה:</u> קיימות

$F_1: G_1\to \mathbb{C}$, $F_2: G_2\to C$

- נגדיר: $\varphi = F_1 - F_2$

$\forall z\in G_1\cap G_2$ $\varphi'(z) = f(z)-f(z)=0$

$\forall z\in G_1\cap G_2$ $\Rightarrow \varphi(z)=const$

- <u>נגדיר:</u>

$$F(z)=\begin{cases} F_1(z) & z\in G_1 \\ F_2(z)+const & z\in G_2\end{cases}$$

$F\in C(G)$, $F'(z)=f(z)$ $\forall z\in G$.

מש"ל

<u>טענה:</u>

$G \subset \mathbb{C}$, ~~$D_R(a)$~~ $C = \partial D$ שפה מעגל ברדיוס R

תחום G , $\bar{D} \subset G$, $f \in A(G)$

אזי:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in Int\, D \\ 0 & z \in Ext\, D \end{cases}$$

<u>הוכחה:</u>

אם $z_0 \in Ext\, D$ אז קיים $\rho > R$ קטן מספיק

כך ש $|z_0 - a| > \rho$

נסמן: $G_1 : D_\rho(a) \subseteq G$

שמקיים:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \in A(G_1)$$

$C \subset G_1$ סגורה, קשירה ואז:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = 0$$

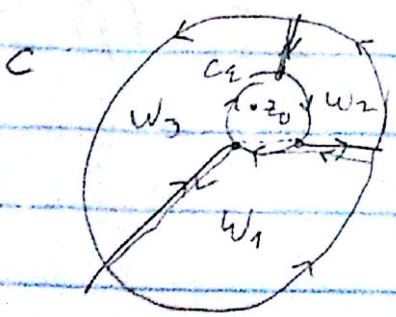
אם $z_0 \in Int\, D$ אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $\bar{D}_\varepsilon(z_0) \subset D$

נסמן $C_\varepsilon = \partial D_\varepsilon$

נוכיח ש:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = \int_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta$$

$$\partial W_1 + \partial W_2 + \partial W_3 = C - C_\varepsilon$$



נגדיר: $V_i = conv(W_i)$

הקמורה – תחום קמור של W_i.

$V_i \subseteq G \setminus \{z_0\}$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \in A(G \setminus \{z_0\})$$

ולכן

תחום קמור $\quad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \in A(V_i)$

ולכן

$$\int_{\partial W_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = 0$$

ולכן

$$\int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \int_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$$

צ"ל:

$$I_\varepsilon = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} - f(z_0) \right| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

נשים לב:

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \left\{ \begin{array}{l} \zeta(t) = z_0 + \varepsilon e^{it} \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{it}}{z_0 + \varepsilon e^{it} - z_0}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

ולכן:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$$

חזק:

$$I_\varepsilon = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right|$$

$$I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} L(C_\varepsilon) \cdot \max_{\zeta \in C_\varepsilon} \left| \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\max_{\zeta \in \bar{D}} \left| \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \right|}_{\text{חסום}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$