W8D5 03/05/2012 הרצאה 3

מסקנה:

$f(x,y)\geq 0$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(x,y)\,dx\right)dy = \sup_M \sup_N \int_0^M\left(\int_0^N f(x,y)\,dx\right)dy$$

דוגמה חשובה

יהי $x>0$

$$J=\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \overset{t\to tx}{=} x\cdot\int_0^\infty e^{-t^2x^2}\,dt$$

$$J^2 = J\cdot\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = J\cdot\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2} J\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}x\left(\int_0^\infty e^{-t^2x^2}\,dt\right)dx =$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2(t^2+1)}x\,dx\right)dt = \left\{\begin{matrix} u=x^2(t^2+1) \\ du=2x(t^2+1)\,dx\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-u}\cdot\frac{1}{2(t^2+1)}\,du\right)dt = \int_0^\infty\left(\frac{1}{2(t^2+1)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$$J^2=\frac{\pi}{4}\ ,\quad \boxed{J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

משפט:

γ מסילה

$f_n \ ,\ f \in C(\gamma)$

$f_n \rightrightarrows f$ (במ"ש)

אזי:

$$\int_\gamma f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\gamma f(z)\,dz$$

הוכחה:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f_n(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma f(z)-f_n(z)\,dz\right| \le$$

$$\le L(\gamma)\cdot \underbrace{\max_{z\in\gamma}|f(z)-f_n(z)|}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

מסקנה:

אם $f(z,w)\in C(\gamma\times E)$, E סגורה (או פתוחה), אז:

$$h(w) = \int_\gamma f(z,w)\,dz \in C(E)$$

משפט:

Γ מסילה

$f_n \,,\, f \in C(\Gamma)$

$f_n \rightrightarrows f$ (במ"ש)

אזי:

$$\int_\Gamma f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Gamma f(z)\,dz$$

הוכחה:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz - \int_\Gamma f_n(z)\,dz\right| = \left|\int_\Gamma f(z)-f_n(z)\,dz\right| \leq$$

$$\leq L(\Gamma)\cdot \max_{z\in\Gamma} |f(z)-f_n(z)| \longrightarrow 0$$

מסקנה:

אם $f(z,w)\in C(\Gamma\times E)$, E סגורה (או פתוחה), אז:

$$h(w) = \int_\Gamma f(z,w)\,dz \in C(E)$$

משפט קושי

משפט Goursat: $T\subset\mathbb{C}$ משולש.
$T\subseteq G$, $f\in A(G)$ אזי:

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$$

- אם ל-f יש קדומה זה כבר ברור.

הוכחה:

נסמן $A = \left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right|$

נחלק את המשולש:

שקול:

$$\partial T = \partial T_1 + \partial T_2 + \partial T_3 + \partial T_4$$

$$A = \left|\int_{\partial T_1} + \int_{\partial T_2} + \int_{\partial T_3} + \int_{\partial T_4}\right| \le \left|\int_{\partial T_1}\right| + \left|\int_{\partial T_2}\right| + \left|\int_{\partial T_3}\right| + \left|\int_{\partial T_4}\right|$$

- אזי, בהכרח קיים $T^* \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ כך ש:

$$\left|\int_{\partial T^*} f(z)\,dz\right| \ge A/4$$

$$L(\partial T^*) = \frac{1}{2} L(\partial T)$$

- נמשיך כך אינדוקטיבית ונקבל:

$$T \supset T' \supset T'' \supset \dots \supset T^n \supset \dots$$

$$\left|\int_{\partial T^n} f(z)\,dz\right| \ge A/4^n, \quad L(\partial T^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial T)$$

שקיים:

$$\bigcap^{\infty} T^n = \{z_0\}$$

נסמן:

$$R(z) := f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$$

$$\frac{|R(z)|}{|z - z_0|} \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

$$f(z) = R(z) + f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

- $$(z)' = 1$$

$$\int_{\partial T^n} 1 \, dz = 0 \Rightarrow \int_{\partial T^n} f(z_0) \, dz = 0$$

כי יש לה קדומה. משולש סגורה -

$$\int_{\partial T^n} f'(z_0)(z - z_0) \, dz = 0$$

- $$\int_{\partial T^n} f(z) \, dz = \int_{\partial T^n} R(z) \, dz + \int_{\partial T^n} f(z_0) \, dz + \int_{\partial T^n} f'(z_0)(z - z_0) =$$

$$= \int_{\partial T^n} R(z) \, dz$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial T^n} f(z) \, dz \right| \leq L(\partial T^n) \max_{z \in \partial T^n} |R(z)|$$

$$A \le 4^n \left| \int_{\partial T^n} f(z)\,dz \right| \le 4^n \cdot \frac{1}{2^n} L(\partial T) \cdot \max_{z\in\partial T^n} |R(z)|$$

משקים:

$$\max_{z\in\partial T^n}|R(z)| = \max \frac{|R(z)|}{|z-z_0|}|z-z_0| \le \max_{z\in T^n} \frac{|R(z)|}{|z-z_0|} \underbrace{\max_{z\in T^n}|z-z_0|}_{} \le$$

המרחק בין נקודות במשולש קטן מהיקף המשולש

$$\le \frac{1}{2^n} L(\partial T) \cdot \max_{z\in T^n} \frac{|R(z)|}{|z-z_0|}$$

לכן:

$$0 \le A \le L(\partial T)^n \cdot \max \frac{|R(z)|}{|z-z_0|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן $\boxed{A=0}$.

מש"ל

__מסקנה__

יהי G __תחום קמור__, $f\in A(G)$.

אז:

קיימת פונק' קדומה $F\in A(G)$

כלומר, שקיים $f=F'$.

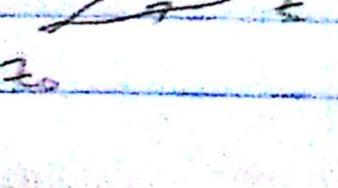
__הוכחה:__

יהי $z_0\in G$, נגדיר:

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

נסתכל על $F(z+h)-F(z)$

במשולש:



עפ״י משפט גורסה מתקיים:

$$\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z+h,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

$$F(z) + \int_{[z,z+h]} f(z)\,dz - F(z+h) = 0$$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta$$

- נשים לב:

$$\int_{[z,z+h]} 1\,d\zeta = h$$

ולכן:

$$hf(z) = \int_{[z,z+h]} f(z)\,d\zeta$$

$$F(z+h) - F(z) - f(z)h = \int_{[z,z+h]} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta$$

ולכן:

$$|F(z+h) - F(z) - f(z)h| \le \underbrace{L([z,z+h])}_{h} \cdot \underbrace{\max_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta) - f(z)|}_{o(h)} \to 0$$

כי f רציפה

משפט קושי:

G תחום קמור, $f\in A(G)$

אז, לכל γ סגורה

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

(נובע מהמשפט הקודם, כי יש לה קדומה)

נוסחת קושי: $f\in A(G)$, G קמורה, C מעגל

$C\cup \mathrm{Int}\,C\subseteq G$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \begin{cases} f(w) & w\in \mathrm{Int}\,C \\ 0 & w\in \mathrm{Ext}\,C \end{cases}$$

C מעגל