שיעור 1 22/04/2012 הרצאה

נגדיר אורך של מסילה:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

- נאמר: γ מסילה סגורה, אם $\gamma(a)=\gamma(b)$.

משפט:

תהי γ סגורה, $\gamma \subset G$ (כלומר $\operatorname{Im}\gamma \subseteq G$)

תהי $f \in C(G)$.

נניח: כי ב-G קיימת קדומה ל-f, F.

כלומר: $f(z) = F'(z)$ $\forall z \in G$

אזי מתקיים:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

כי

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma F'(z)\, dz = \underbrace{F(\gamma(b))}_{F(z_0)} - \underbrace{F(\gamma(a))}_{F(z_0)} = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$$

$$\gamma(t) = e^{it}$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$I = \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

$$f(e^{it}) = \frac{1}{e^{it}}\left(e^{it} + \frac{1}{e^{it}}\right)^{2n} = \frac{2^{2n}(\cos t)^{2n}}{e^{it}}$$

$$\gamma'(t) = ie^{it}$$

$$I = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot ie^{it}\, dt = i \cdot 2^{2n} \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\, dt$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2k-2n-1}$$

$$II = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{\gamma} z^{2k-2n-1}\, dz \quad (*)$$

$$II = \binom{2n}{n} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = \binom{2n}{n} \int_0^{2\pi} i\frac{e^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i \cdot \binom{2n}{n}$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^a}\, dz = 0 \qquad \int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \quad (*)$$

ולכן, נקבל: $\mathrm{I} = \mathrm{II}$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\,dt = \frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

שינוי פרמטרים:

$$\varphi : [c,d] \to [a,b]$$

$$\varphi \in C^1[c,d], \quad \varphi \nearrow$$

$$\varphi(c) = a \qquad \varphi(d) = b$$

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

$$\gamma_1 = \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Im} \gamma_1$$

γ_1 - עובר כמו γ, רק "יותר מהר".

טענה: $L(\gamma_1) = L(\gamma)$

טענה: $f \in C(G)$, $\gamma \subset G$. אז:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

הוכחה:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_c^d f(\gamma\circ\varphi(s))(\gamma\circ\varphi)'(s)\,ds$$

נציב $\varphi(s) = t$, $(\gamma\circ\varphi)'(s) = \gamma'(t)\varphi'(s)$

$$\int_c^d f(\gamma(t))\gamma'(t)\varphi'(s)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$$