

סיכום במרוכבות

הגדרות מבוא:

מספרים מרוכבים: הינם שדה הרחבה של שדה הממשיים על ידי ההוספה של השורש של הפולינום $x^2 + 1 = 0$ שיקרא i . כול מספר בשדה הזה הוא זוג של מספרים ממשיים שמייצגים החלק הממשי והחלק המדומה של המספר.

נסמן את הזוג $z = (x, y)$ על ידי $x + iy$, ונסמן $Re(z) = x, Im(z) = y$ החלק הממשי והחלק המדומה.

המישור המרוכב: ניתן להתייחס למספרים מרוכבים כוקטורים ב R^2 , ולכן למספר מרוכב ניתן לדבר על האורך של הוקטור המייצג אותו שיהיה $\sqrt{x^2 + y^2}$ ונסמן אותו $|z|$ ואת הזווית שלו במישור שנסמן $arg(z)$. לכן כול מספר מרוכב z מקיים $z = |z|(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z)))$. נשים לב שהזווית נקבעת עד כדי כפולה שלמה של שני פאי. את הזווית הראשית נסמן $Arg(z) \in [-\pi, \pi]$.

צמוד מרוכב: עבור מספר מרוכב $z = x + iy$ נגדיר את הצמוד המרוכב להיות $\bar{z} = x - iy$ וזה למעשה שיקוף סביב ציר ה x של הוקטור המייצג במישור המרוכב. נשים לב כי $arg(\bar{z}) = -arg(z)$ כי זה פשוט שיקוף סביב ציר ה x (או שאפשר לראות את זה ממעברים אלגבריים...)

פונקציית הארגומנט הראשי: הפונקציה שלכול מספר מרוכב מחזירה את הארגומנט הראשי שלו, כלומר זווית ב $[-\pi, \pi]$ היא פונקציה רציפה, למעט בישר הממשי השלילי, שם יש קפיצה של 2π , אבל כן יש רציפות חד צדדית, כלומר אם מתקרבים מהרביע השלישי הזווית תהיה π והמרביע הרביעי היא תהיה π .

פונקציית הארגומנט היא חיבורית לכפל, כלומר היא כמו לוג, ואכן $arg(ab) = arg(a) + arg(b)$. זה בבירור נובע מהעובדה ש $z = |z|e^{i*arg(z)}$.

באופן כלל פונקציית הארגומנט הלא ראשי היא פונקציה רב ערכית שערכייה נבדלים ב 2π .

טופולוגיה מרוכבת: מרחק בין שני מספרים מרוכבים זה הנורמה של ההפרש ביניהם, ונאמר שסדרה של מספרים מרוכבים מתכנסת למספר מרוכב אם ורק אם סדרת הפרשי הנורמות מתכנסת לסדרה ממשית.

- כדור פתוח: $B(a, r) = \{z: |z - a| < r\}$
- כדור סגור: $\bar{B}(a, r) = \{z: |z - a| \leq r\}$
- פנים: עבור $A \subseteq C$ נגדיר את $Int(A)$ להיות אוסף כול הנקודות x כך ש $x \in A$ וגם קיים r כך ש $B(x, r) \subseteq A$. לנקודות ב $Int(A)$ נקרא נקודות פנים.
- חוץ: עבור $A \subseteq C$ נגדיר נקודות חוץ להיות נקודות פנים של המשלים של A .
- שפה: כול הנקודות שאינן בפנים ואינן בחוץ של A כלומר $\partial A = \overline{Int(A) \cup ext(A)}$. באופן שקול לכול נקודה בשפה אפשר לשאוף גם מבפנים וגם מבחוץ.
- קבוצה פתוחה: קבוצה ששווה לפנים שלה, כלומר כול נקודת בה היא נקודת פנים.
- קבוצה סגורה: קבוצה שהמשלים שלה קבוצה פתוחה.
- סגור: הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את הקבוצה, או באופן שקול זה כול הנקודות שאפשר לשאוף אליהן עם סדרה מהקבוצה.
- קבוצה חסומה: אם קיים חסם גלובלי על הנורמה של כול איברה הקבוצה. או באופן שקול היא מוכלת בכדור פתוח כלשהו.

- **קבוצה קומפקטית:** קבוצה תקרא קומפקטית ב C אם לכל כיסוי פתוח שלה יש תת כיסוי סופי, וזה אמ"מ לכל סדרה של איברים בה יש תת סדרה מתכנסת לאיבר בתוך הקבוצה וזה אמ"מ היא סגורה וחסומה. (הגדרה פלוס היינה בורל)
 - **קבוצה קשירה:** עבור קבוצה פתוחה $A \subseteq C$ נאמר שהיא קשירה אם לכל פירוק שלה $A = B \cup C$ כך ש $B \cap C = \emptyset$ ושתייהן פתוחות אז אחת מהן ריקה. כלומר לא ניתן לבצע פירוק כזה שאינו טריוויאלי. נשים לב שקבוצה פתוחה וקשירה היא גם בהכרח קשירה פוליגונית, כלומר בין כול שתי נקודות יש קו פוליגוני שמחבר ביניהן שמוכל כולו בקבוצה. כמו כן בקבוצה פתוחה כול פונקציה קבועה מקומית (כלומר על כול כדור קטן) היא קבועה גלובלית. נשים לב ששלושת התנאים האלה שקולים, כלומר קבוצה פתוחה היא קשירה אם ורק אם אחד משלושת התנאים הללו מתקיים.
- עבור קבוצה לא פתוחה נגדיר קשירות להיות שלא ניתן לפרק אותה באופן לא טריוויאלי לקבוצות שפתוחות בה.
- **תחום:** קבוצה פתוחה וקשירה תקרא תחום. כמו כן כול קבוצה פתוחה אפשר לפרק לתחומים, כלומר לפרק לרכיבי קשירות, והפירוק הזה יחיד.

הטלה סטראוגרפית:

העתקה מכדור היחידה ב R^3 פחות נקודה, למישור R^2 או באופן שקול ל C . בוחרים נקודה כלשהי על הספירה, בדרך כלל את הקוטב הצפוני, כלומר את $(0,0,1)$, וקעת לכל נקודה x על הספירה נתאים נקודה על המישור באופן הבא: נעביר את הישר שעובר בין הקוטב הצפוני לבין x ונראה את הנקודה שבה הוא חותך את המישור, זו הנקודה שנתאים ל x . באופן שקול לכל נקודה על המישור המרוכב אפשר להתאים נקודה על הספירה על ידי העברת הישר לקוטב הצפוני והתאמת נקודה חיתוך עם הספירה.

עבור הנקודה $z = x + iy$ על המישור המרוכב, הישר שעובר דרכה ודרך הקוטב הצפוני הוא $\{(tx, ty, 1-t) | t \in [0,1]\}$, בנקודת החיתוך עם הספירה יתקיים $(tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 = 1$ ולכן נקבל $t = \frac{2}{x^2+y^2+1} = \frac{2}{|z|^2+1}$ ולכן $z \rightarrow \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$ היא ההטלה מהמישור לספירה. ההטלה בכיוון ההפוך, כלומר מהספירה למישור היא $(x, y, z) \rightarrow \frac{x+iy}{1-z}$

נשים לב שלכאורה הקוטב הצפוני מותאם לנקודה ∞ במישור. ולכן ישרים ב C מותאמים למעגלים על הספירה שעוברים בקוטב הצפוני, ומעגלים במישור מותאמים למעגלים בספירה שלא עוברים בקוטב הצפוני. מעגלים בספירה זה למעשה חיתוך של מישור עם הספירה.

גזירות מרוכבת:

נגזרת: עבור פונקציה $f: U \rightarrow C$ כאשר $U \subseteq C$ סביבה של הנקודה z אז נאמר כי f גזירה במובן המרוכב בנקודה z אם $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ קיים. אם הגבול הקיים הנגזרת היא הערך של הגבול. נשים לב שלמעשה h הוא וקטור ב R^2 , אבל משום שמדובר במספרים מרוכבים יש משמעות לכפל, ולכן גם לחילוק ב h . אם הפונקציה f גזירה בכול U נאמר שהיא הולומורפית/אנליטית ב U .

באופן שקול f גזירה בנקודה z_0 אם מתקיים $f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h \in o(h)$ כאשר h מספר מרוכב וגם $f'(z_0)$ הינו מספר מרוכב שהוא הנגזרת בנקודה. מה ההבדל מגזירות ממשי? שהדפרנציאל הוא העתקה לינארית מעל המרוכבים, ולא רק מעל הממשיים, ולכן בהכרח ההעתקה הלינארית שהיא הדפרנציאל היא למעשה כפל בקבוע מרוכב, שהוא הנגזרת בנקודה. לכן בפרט פונקציה גזירה במרוכבים היא גזירה בממשיים.

- נשים לב כי פולינומים הן פונקציות גזירות, כמו כן גם פונקציות קבועות. חשוב לשים לב כי פונקציית הצמוד המרוכב אינה גזירה בשום נקודה, לכן גם פונקציית הערך המוחלט אינה גזירה באף נקודה.
- גזירות גורר רציפות: באופן ברור אם פונקציה גזירה בנקודה היא גם רציפה בה.
- לינאריות/כפליות: אם שתי פונקציות גזירות גם הסכום/מכפלה/הפרש (בתנאי שמוגדר) שלהם היא פונקציה גזירה. וכול כללי הגזירה תקפים. (הוכחה על ידי גבולות פשוטים). לכן פונקציות רציונליות גזירות בכול מקום שהן מוגדרות.
- כלל השרשרת: אם f גזירה ב z וגם g גזירה ב $f(z)$ אז ההרכבה גזירה ב z ומתקיים $(f(g))' = f'(g)g'$. הוכחה פשוטה מכפליות של גבולות.
- העתקות לינאריות מעל המרוכבים: העתקה לינארית מעל הממשיים $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שאינה העתקת האפס, היא לינארית מעל המרוכבים, כלומר היא כפל בקבוע מרוכב, אם ורק אם היא משמרת זוויות במישור. ברור שאם היא כפל בקבוע היא משמרת זוויות מתת כפליות הארגומנט. אם היא לינארית מעל הממשיים אז היא כפל במטריצה כלשהי, נשים לב שממעברים אלגבריים מקבלים כי $L(z) = az + b\bar{z}$ עבור a, b כלשהם. ואם היא משמרת זוויות אז מקבלים שכול הזוויות על מעגל סביב a ברדיוס b הן אותו הדבר, אבל זה לא אפשרי, לכן $b = 0$ כנדרש.

משוואת קושי רימאן: עבור פונקציה גזירה במובן המרוכב $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ מתקיים כי ניתן לפרק אותה לשתי פונקציות ממשיות $f(z) = u(z) + iv(z)$ כאשר $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$. נזכר כי כול מספר מרוכב הוא וקטור ב $\mathbb{R}^2$ ולכן ניתן להסתכל על נגזרות כיווניות של הפונקציה, כלומר הגבול כאשר מתקרבים מכיוון מסוים לנקודה. אם הפונקציה גזירה, אז הגבול קיים, ולכן לא משנה מאיזה כיוון נתקרב ערכו יהיה זהה תמיד. לכן נסתכל פעם אחת על הגבול כאשר מתקרבים מהכיוון המדומה, ופעם אחת כאשר מתקרבים מהכיוון הממשי, ויהיה שוויון בין השניים, לכן נקבל כי:

- קיום קושי רימאן גורר גזירות: אם קיימות ורציפות כול הנגזרות החלקיות בנקודה מסוימת, כלומר $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ כולם קיימים ורציפים, וגם מתקיימות משוואות קושי רימן אז הפונקציה אנליטית בנקודה. נובע מהעובדה שקיום ורציפות הנגזרות החלקיות גורר דפרנציאביליות ב $\mathbb{R}^2$ וקיום קושי רימאן גורר שהדיפרנציאלים יחד הם מספר מרוכב.
- אופרטור דיפרנציאלי: הוא אופרטור שמפעילים על פונקציות. נגדיר (זה סינטקטי לחלוטין!) $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. כלומר זה אופרטור שניתן להפעיל על פונקציה והוא יחזיר איזשהי קומבינציה של הנגזרות החלקיות שלה. נשים לב כי עבור פונקציה f מתקיים $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f) = 0$ אם ורק אם הפונקציה מקיימת את משוואות קושי רימאן.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial z} \quad \circ \\ \frac{\partial f g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z} \quad \circ \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= f' \quad \text{עבור } f \text{ הולומורפית מתקיים} \quad \circ \end{aligned}$$

נגזרת מתאפסת ופונקציה מקובעת: התנאים הבאים שקולים עבור פונקציה $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ב U תחום.

- $f' = 0$ בכול U .

- $f = \text{const}$ בכול U .
- $\text{Im}(f) = \text{const}$ OR $\text{Re}(f) = \text{const}$ בכול U .
- $|f| = \text{const}$
- $\arg(f) = \text{const}$

כלומר פונקציה שקבועה באיזשהו אופן, קבועה תמיד, והנגזרת מתאפסת. נשים לב שאם הנגזרת אפס תמיד אז נחבר כול שתי נקודות על ידי קו פוליגוני ונעשה בכול מקטע לגראנג' לחלק הממשי והמדומה בנפרד ונקבל פונקציה קבועה. אם הפונקציה קבועה אז הגבול תמיד יהיה אפס, ולכן גם הנגזרת. אם רק החלק הממשי או רק החלק המדומה קבועים, אז משום ש $f = u + iv$ אז הנגזרות החלקיות של u או של v יתאפסו, אבל קושי רימן מתקיים לכן כול הנגזרות החלקיות יתאפסו ולכן הפונקציה קבועה. אם המודול קבוע אז $u^2 + v^2$ קבוע, לכן נגזור לפי x ואז לפי y , נשתמש בקושי רימן ונקבל שכול אחד בנפרד מתאפס. אם הארגומנט מקובע אז יש קשר בין החלק הממשי של הפונקציה לחלק המדומה (כפל בקבוע), ולכן אם נסובב נקבל פונקציה שהחלק הממשי שלה מקובע ולכן קבועה.

עקומות:

עקומה ב C זו העתקה רציפה $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ כאשר $[a, b]$ קטע ממשי. אפשר להסתכל על שתי פונקציות ממשיות, אחת לחלק הממשי ואחת לחלק המדומה. נאמר שעקומה היא גזירה בנקודה אם גם החלק הממשי וגם החלק המדומה גזירים בנקודה. עקומה תקרא גזירה אם היא גזירה בכול התחום שלה, והיא תקרא רגולרית בנקודה אם היא גזירה בה והגרדיאנט לא מתאפס בנקודה.

זווית בין עקומות: עבור שתי עקומות γ_1, γ_2 אשר נחתכות בנקודה t ושתיהן רגולריות בנקודה הזו אז הזווית ביניהן בנקודה היא הזווית בין הגרדיאנטים שלהן. (כלומר הנגזרת של עקומה זה וקטור דו ממדי, או למעשה מספר מרוכב, ולכן אפשר לדבר על זווית שלו, ובפרט על הפרש זוויות) כלומר הזווית היא $\arg(\gamma_1(t)) - \arg(\gamma_2(t))$.

שמירה על זוויות: שמירה על זוויות שקול להיות פונקציה הולומורפית. ואכן עבור $G \subseteq C$ פתוחה ו $f: G \rightarrow C$ ונקודה $z_0 \in G$ כך ש f דיפרנציאבילית ב z_0 במובן הממשי, אז f משמרת זווית בין עקומות ב z_0 אם ורק אם f גזירה ב z_0 במובן המרוכב ו $f'(z_0) \neq 0$. ואכן נסמן L להיות הדפרנציאל של f בנקודה אז הדרישה ש f משמרת זוויות של עקומות בנקודה, שקולה לכך ש L העתקה הפיכה המשמרת זוויות (מכלל השרשרת). אבל L לינארית מעל הממשיים ולכן כפי שראינו נקבל כי L לינארית מעל המרוכבים ולכן f גזירה במובן המרוכב.

העתקה קונפורמית: עבור קבוצה פתוחה $G \subseteq C$ ופונקציה $f: G \rightarrow C$ גזירה במובן הממשי, היא תקרא קונפורמית ב G אם היא משמרת זוויות בין עקומות בכול G . ולכן קיבלנו כי פונקציה היא קונפורמית אם ורק אם היא גזירה במובן המרוכב והנגזרת לא מתאפסת בשום נקודה.

העתקה ביהולומורפית: העתקה אנליטית חד חד ערכית, שגם ההופכית שלה אנליטית. נשים לב שאם הנגזרת לא מתאפסת נקבל ממשפט ההעתקה הפתוחה שגם ההופכית גזירה במובן הממשי, אבל לא בהכרח אנליטית!

אורך של עקומה: עבור עקומה $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ חלקה למקוטעין נגדיר את האורך שלה ונסמן $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. נזכר כי γ' זה וקטור דו ממדי. אינטואיטיבית זה המרחק שהעקומה עברה כי זה ה"זמן" שזה אורך הקטע, כפול ה"מהירות" שזה הנגזרת.

פונקציות הרמוניות:

לפליסיאן: נגדיר את הפליסיאן של פונקציה להיות $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ כלומר סכום הנגזרות השניות.

נשים לב שמתקיים $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}$ פשוט מההגדרה.

לפליסיאן פולרי $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$. נובע מהחלפת משתנים.

פונקציה הרמונית: עבור $h: G \rightarrow \mathbb{C}$ נאמר שהיא הרמונית ב G כאשר G פתוחה אם היא גזירה ברציפות פעמיים במובן הממשי (כלומר החלק הממשי והחלק המדומה שלה גזירים ברציפות פעמיים), ומתקיים $\Delta h = 0$ בכול G . נסמן $Harm_{\mathbb{C}}(G)$ את כול הפונקציות ההרמוניות מ $G \rightarrow \mathbb{C}$ ונסמן $Harm_{\mathbb{R}}(G)$ את כול הפונקציות ההרמוניות $G \rightarrow \mathbb{R}$.

הולומורפיות נגד הרמוניות: עבור f הולומורפית ב G (וגם $f \in C^2(G)$, אבל זה דרישה מיותרת כי נראה שכול פונקציה הולומורפית גזירה ברציפות אינסוף פעמים) אז $f \in Harm_{\mathbb{C}}(G)$, ובפרט החלק הממשי והחלק המדומה שלה שתיהן פונקציות הרמוניות ממשיות, כי $\Delta f = \Delta u + i \Delta v = 0$. ואכן קל מאוד לראות כי $\Delta f = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ אבל f הולומורפית ולכן $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 0$ כי מתקיים קושי רימן, ולכן $\Delta f = 0$ כנדרש. כמו כן אם u הרמונית אז $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ היא הולומורפית כי מתקיים קושי רימן מאותה הסיבה כמו לעיל.

צמודה הרמונית: עבור $u, v \in Harm_{\mathbb{R}}(G)$, נאמר כי v צמודה ל u אם מתקיים $u + iv$ פונקציה הולומורפית ב G . כול שתי צמודות לאותה הפונקציה נבדלות בקבוע, כי זה מתקבל למעשה על ידי אינטגרציה.

העתקות מוביוס:

הגדרה: פונקציה h שמקיימת $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים והפונקציה אינה קבועה וכמו כן $(c, d) \neq (0, 0)$ תקרא העתקה מוביוס. נשים לב שהפונקציה אינה קבועה אם ורק אם $ad - bc \neq 0$ כי אחרת הוקטורים (a, b) ו (c, d) תלויים לינארית, ולכן נוכל להוציא קבוע ולצמצם את h ולקבל פונקציה קבועה.

נשים לב שהרכבה של העתקות מוביוס היא גם מוביוס, ולמעשה אוסף ההעתקות המוביוס הוא חבורה תחת פעולת ההרכבה כאשר איבר היחידה הוא העתקה הזהות, ולכול העתקה יש הופכית. למעשה הרכבה של העתקות מוביוס שקולה להכפלת המטריצות המייצגות שלהן. נרצה להוכיח את זה ולכן נגדיר:

מרחב פרויקטיבי מרוכב:

נתבונן ב $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ללא וקטור האפס. נגדיר יחס שקילות כך ששני וקטורים שקולים אם הם תלויים לינארית, כלומר מכפלה אחד של השני. כול מחלקת שקילות כזו היא למעשה ישר במרחב הוקטורי $\mathbb{C}^2$ ונסמן $[z_1, z_2]$ כאשר $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ נציג כלשהו מהמחלקה. את אוסף מחלקות השקילות הללו נגדיר להיות CP^1 , המרחב הפרויקטיבי המרוכב החד ממדי.

אם $[z_1, z_2] \in CP^1$ אז אם $z_2 \neq 0$ נקבל כי $[z_1, z_2] = \left[\frac{z_1}{z_2}, 1 \right]$ כלומר זה אותה המחלקה, כי הם נבדלים בכפל במספר מרוכב. ואם $z_2 = 0$ נקבל כי $[z_1, z_2] = [z_1, 0] = [1, 0]$. לכן יש התאמה חד ערכית ועל מ $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ל CP^1 כך ש $z \rightarrow [z, 1]$ וכמו כן $[1, 0] \rightarrow \infty$. כמו כן קיימת העתקה π מ $CP^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ שהיא פשוט ההטלה הקנונית, $(z_1, z_2) \rightarrow [z_1, z_2]$ (שהיא ממש לא חד חד ערכית).

לכול העתקה לינארית $A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (שזה למעשה מטריצה 2×2 על $\mathbb{C}$) שהיא הפיכה ניתן להתאים העתקה מושרת $[A]: CP^1 \rightarrow CP^1$ כך שלכול $p \in CP^1$ מתקיים $[A](p) = \pi(A(z))$ עבור z נציג

כלשהו של המחלקה p . תחילה קל לראות שאין חשיבות לבחירת הנציג כי אם $z = \lambda w$ שני נציגים לאותה המחלקה אז $Az = \lambda Aw$ יהיו גם כן באותה המחלקה.

נשים לב כי $\left[\left(\frac{az+b}{cz+d}, 1\right)\right] = [(az+b, cz+d)] = [A(z, 1)] = [A]([z, 1])$ ולכן פעולת $[A]$ במרחב הפרויקטיבי שקולה לפעולת h_A , העתקת המוביוס ש A היא המטריצה שלה, במרחב C לאחר הפעלת ההעתקה החד חד ערכית ועל בין C לבין CP^1 . כמו כן $\left[\frac{a}{c}, 1\right] = [a, c] = [A]([1, 0])$ אם $c \neq 0$ שזה ואם $c = 0$ אז זה שווה $[1, 0]$. כלומר אינסוף עובר ליחס המקדמים של z או לאינסוף אם אין מקדם ל z במכנה.

לכן פעולת מוביוס ב C שקולה לפעולה של מטריצות ב CP^1 לכן הרבה של מוביוס שקולה להפעלת שתי העתקות לינאריות אחת אחרי השנייה, או במילים אחרות כפל מטריצות. לכן $h_A \circ h_B = h_{AB}$

נגזרת של מוביוס:

$h'_A = \frac{\det A}{(cz+d)^2}$ ובפרט שונה מאפס בכול נקודה, כי דרשנו ש A הפיכה. לכן העתקות מוביוס הן קונפורמיות, כלומר הן משמרות זוויות בין עקומות.

נקודות שבת של מוביוס: להעתקת מוביוס יש לפחות נקודת שבת אחת, ולא יותר משתיים אלא אם היא הזהות. זה נובע פשוט מבדיקת כול האפשרויות להתאפסות המקדמים a, b, c, d .

יחידות של מוביוס על פני 3 נקודות:

עבור $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ כך שמתקיים $z_i \neq z_j, w_i \neq w_j$ אז קיימת יחידה העתקת מוביוס h שמקיימת $h(z_i) = w_i$. היחידות נובעת בקלות מהעובדה שאם היו שתיים היינו מרכיבים את האחת על ההופכית של השנייה ומקבלים מוביוס עם שלוש נקודות שבת ולכן הזהות. את הקיום מראים על ידי בניית מוביוס ששולחת z_1, z_2, z_3 אל $0, 1, \infty$ כך ש $h(z) = \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_1)(z_2-z_3)}$ (במקרה שאף אחד מהם הוא לא אינסוף, אחרת פשוט בונים את זה בכוח שזה יסתדר). ואז כדי לשלוח את z_1, z_2, z_3 אל w_1, w_2, w_3 בונים את ההעתקות ששולחות כול סט כזה אל $0, 1, \infty$ ואז מרכיבים האחת על ההופכית של השנייה ומקבלים הנדרש.

Cross ratio:

עבור 4 נקודות z_1, z_2, z_3, z_4 נגדיר $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$. באופן שקול זה כמו להציב את z_4 בהעתקת מוביוס φ שמקיימת $\varphi(z_1) = \infty, \varphi(z_2) = 0, \varphi(z_3) = 1$.

לכול העתקה מוביוס ψ מתקיים $(\psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3), \psi(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ כלומר העתקות מוביוס משמרות את היחס הזה. כי אכן נתבונן ב φ שמעבירה את z_1, z_2, z_3 ל $0, 1, \infty$ אז מתקיים כי $(\psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3), \psi(z_4)) = (\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(z_4)) = \varphi(z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ והשוויון הראשון מתקיים כי הן שוות על שלוש נקודות.

סוגי העתקות מוביוס: (היוצרים של חבורת ההעתקות המוביוס)

- $z \mapsto kz$ עבור k ממשי חיובי (מתיחה)
- $z \mapsto \lambda z$ עבור $|\lambda| = 1$ (סיבוב)
- $z \mapsto z + b$ עבור $b \in C$ (הזזה)
- $z \mapsto \frac{1}{z}$ (היפוך)

ואכן כול העתקה $\frac{az+b}{cz+d}$ שווה ל $\frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$ שזה הרכבה של לעיל. ולכן קל מאוד לראות כעת כי מעגלים מוכללים עוברים למעגלים מוכללים תחת העתקות מוביוס. (מעגל מוכלל זה מעגל או ישר) כי זה ברור עבור השלוש הראשונות, ועבור $\frac{1}{z}$ זה גם מתקיים, כי משוואה של מעגל מוכלל היא $\alpha|z|^2 + \beta Re(z) + \gamma Im(z) + \delta = 0$ ותחת $\frac{1}{z}$ היא גם עוברת למשוואת מעגל, אבל אחרת.

סימטריה: נאמר ששתי נקודות הן סימטריות ביחס לישר הממשי אם הן צמודות אחת לשנייה. עבור מעגל מוכלל C כלשהו, נאמר כי z_1, z_2 סימטריים ביחס למעגל C אם $z_1 = \varphi(z), z_2 = \varphi(\bar{z})$ עבור z כלשהו, ו φ מעתיקה את הישר הממשי למעגל C מוביוס. נשים לב שאין חשיבות לבחירת המוביוס. ביחס למעגל היחידה מתקיים $z, \frac{1}{\bar{z}}$ סימטריים. באופן כללי שתי נקודות הן סימטריות ביחס למעגל אם הן על קרן ממרכז המעגל, ומכפלת מרחקיהן למרכז היא הרדיוס של המעגל בריבוע.

העתקות מפורסמות:

- ק"ל: מעתיקה את חצי המישור העליון לכדור היחידה.

פונקציות אלמנטריות:

אקספוננט: נגדיר $e^z = e^{Re(z)} (\cos(Im(z)) + i \sin(Im(z)))$. קל לראות שזו פונקציה הולומורפית על ידי בדיקת קושי רימאן. כמו כן לפי הגדרה מתקיים $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ ובבירור $e^{z+2\pi k} = e^z$.

פונקציות טריגונומטריות: נגדיר את הפונקציות הבאות בעזרת האקספוננט:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

נשים לב שסינוס מתאפסת ב πn ובפרט מתאפסת רק בממשיים.

לוגריתם: עבור $a \in \mathbb{C}$ נגדיר את הלוגריתם שלו להיות $b \in \mathbb{C}$ כך ש $e^b = a$. אם נכתוב $a = re^{i\varphi}$ אז מתקיים כי $b = x + iy$ ולכן $e^b = e^x e^{iy}$ ולכן $e^x = r$ ולכן $x = \ln(r)$ וכמו כן $y = \varphi + 2\pi k$ עבור k שלם כלשהו. לכן לכול מספר מרוכב שונה מאפס יש לוגריתם, אבל הוא אינו יחיד. לכן לכול $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$ כאשר $\arg(z)$ הינה פונקציה רב ערכית!

ענף של ארגומנט: נגדיר פונקציה $a(z)$ להיות ענף של ארגומנט בתחום G שלא מכיל את אפס אם לכול $z \in G$ מתקיים $a(z) \in \arg(z)$ וגם a רציפה. נשים לב שלא בכול תחום קיים ענף לפונקציית הארגומנט, למשל בכול המישור אין ענף, ובפרט לא בכול תחום יש ענף ללוגריתם.

ענף של לוגריתם: עבור G תחום שלא מכיל את אפס אז $l(z)$ הינו ענף של לוגריתם אם $l(z)$ רציפה בתחום ומתקיים $l(z) \in \log(z)$ לכול $z \in G$. (נזכר כי ארגומנט ולוגריתם שתיהן פונקציות רב ערכיות, לכן יש משמעות ללהיות שייך לתמונה של איבר ספציפי)

נשים לב כי אם $a(z)$ ענף של ארגומנט אז $\ln(|z|) + ia(z)$ ענף של לוג. ולהפך, עבור ענף של לוג החלק המדומה שלו הוא ענף לארגומנט. כמו כן אם $a(z)$ ענף של ארגומנט אז $a(z) + 2\pi n$ לכול n טבעי הוא גם ענף של ארגומנט. כמו כן אם נקח שני ענפים שונים אז ההפרש ביניהם הוא כפולות שלמות של 2π פאי, ולכן מהיות רציף הוא חייב להיות קבוע. לכן כול שני ענפים נבדלים בכפולה שלמה קבועה של שני פאי.

הולומורפיות של ענף:

אם $l(z)$ ענף של לוגריתם בתחום G אז הוא הולומורפי בתחום ומקיים $l'(z) = \frac{1}{z}$. זה נובע מנגזרת של אקספוננט, ושימוש באחד חלקי וברציות של הענף. באופן כללי אם g ענף של f^{-1} עבור f הולומורפית כלשהי ובנוסף $f' \neq 0$ בכל התחום אז g הולומורפית ומתקיים $g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$

לוגריתם של פונקציה: יהיה G תחום, ו f פונקציה הולומורפית בו שלא מתאפסת בכל התחום אז $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ תקרא ענף של $\log f$ אם g רציפה ומקיימת $f = e^g$ בכל התחום. נשים לב כי אם התמונה של f מוכלת בתחום שבו יש ענף ללוגריתם אז ההרכבה של הענף על f תתן ענף של לוגריתם f .

אם g ענף של $\log f$ אז g הולומורפית בתחום ומתקיים $g' = \frac{f'}{f}$. זה נובע מהעובדה שבכול כדור קטן אפשר לקחת ענף ללוג כי הוא לא מקיף את אפס, ולכן הענף הזה של לוג מורכב על f והענף של $\log f$ נבדלים בקבוע של שני פאי, ולכן הנגזרות שלהם שוות ולכן מכלל השרשרת נקבל הנדרש.

ענפים של חזקה: יהי $a \in \mathbb{C}$ בתחום $G \subseteq \mathbb{C}$. אם יש ענף $l(z)$ ללוגריתם ב G אז נגדיר $z^a = e^{al(z)}$. עבור הענף הסטנדרטי נקבל $z^a = e^{a(\ln(|z|) + i\text{Arg}(z))}$

למשל עבור $\alpha = \frac{1}{2}$ זה למעשה שורש. אזי הענף הסטנדרטי של שורש מוגדר ב $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ כי הוא מוגדר לפי הענף הראשי ללוגריתם. למעשה ענף של שורש מכווץ את כול המישור פרט לישר הממשי השלילי, לחצי המישור החיובי. הענף הזה הוא למעשה השורש החיובי. באופן כללי לכול α כך ש $|\alpha| \leq 1$ העתקת החזקה יוצאת חד חד ערכית, כי היא מכווצת ואין חפיפות.

פונקציית ג'אוקובסקי: $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. לכול תחום D שבו מתקיים כי אם $z \in D$ אז $\frac{1}{z} \notin D$ אז הפונקציה הנ"ל חד חד ערכית עליו. נשים לב שמעגל היחידה עובר תחת ג'אוקובסקי לישר $[-1, 1]$ כי $\frac{1}{z} = \bar{z}$ על עיגול היחידה. עבור הפונקציה ההופכית ל f על $\mathbb{C} \setminus S^1$ כלומר המרוכבים פרט לעיגול היחידה, נקבל שיש ענף אנליטי ב $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ והוא $w + w\sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}$ כאשר מדובר בענף הראשי של שורש שמוגדר ב $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$. הענף השני לפונקציה ההופכית יהיה אותו הדבר אבל במינוס. לכן התמונה של f על $\mathbb{C} \setminus S^1$ היא $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. נשים לב כי ביחד שני הענפים הם על כול המישור המרוכב פרט למעגל היחידה. מרציפות מקבלים שהתמונה של כול אחד מהענפים היא קשירה, ולכן אחד חייב להיות מוכל כולו בתוך מעגל היחידה, והשני מוכל כולו במישור מחוץ למעגל היחידה, ושניהם על הטווח שלהם.

טורים:

התכנסות: עבור $z_1, z_2, \dots \in \mathbb{C}$ נאמר כי $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ מתכנס אם הגבול $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N z_n$ קיים.

קריטריון קושי: הטור $\sum c_n$ מתכנס אם"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכול $m, n > N$ מתקיים $|\sum_{i=m}^n c_i| < \varepsilon$ כלומר הזנב של הטור שואף לאפס, או באופן שקול סדרת הסכומים החלקיים היא סדרת קושי.

התכנסות בהחלט: נאמר שטור מתכנס בהחלט אם $\sum |c_n|$ מתכנס. התכנסות בהחלט גוררת התכנסות מאי שוויון המשולש על קריטריון קושי. אם טור מתכנס בהחלט אז לכול שינוי של סדר הסכימה הוא יתכנס לאותו הערך, נובע מהפעלת משפט רימן מחדוא 2 על החלק הממשי והמדומה בנפרד.

מכפלת קושי: אם שני טורים $\sum a_k$ ו- $\sum b_k$ מתכנסים בהחלט אז $(\sum a_k)(\sum b_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} a_k b_l$ כאשר $\sum_{k+l=n; k, l \geq 0} a_k b_l$ נקרא טור מכפלת קושי. זה נובע מכך שטור המכפלות מתכנס בהחלט כי הוא קטן בערכו ממכפלת הטורים בערכים מוחלטים. לכן ניתן לשנות את סדר הסכימה של טור המכפלות ולקבל אותה התוצאה. כאשר סוכמים על אלכסונים מקבלים את מכפלת קושי, כאשר סוגרים ריבועים שלמים מקבלים את מכפלת הטורים, לכן יש שוויון.

התכנסות במידה שווה: תהי $g_0, g_1, \dots$ סדרת פונקציות על תחום G מרוכב. נאמר כי הסדרה g_n מתכנסת במידה שווה ל- $g: G \rightarrow C$ אם $\sup_{z \in G} |g_n(z) - g(z)| \rightarrow 0$, כלומר ההפרש המקסימלי בין הפונקציות הולך לאפס.

התכנסות במידה שווה מקומית: נאמר שסדרת פונקציות מתכנסת במידה שווה מקומית לפונקציה מסוימת אם לכל נקודה z_0 בתחום יש כדור פתוח סביבה, שבה הסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה הגבולית.

באופן שקול אפשר להגדיר התכנסות במש ובמש מקומית לטורי פונקציות, וזה אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת במש/במש מקומית.

התכנסות בהחלט ובמ"ש מקומית: הטור $\sum f_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש מקומית אם $\sum |f_n|$ מתכנס במ"ש מקומית.

בוחן של וירשטראס: עבור תחום $G \subseteq C$ ופונקציות $G \rightarrow C: f_1, f_2, \dots$ ומתקיים $|f_i| < M_i$ בכול G עבור סדרת מספרים ממשיים וגם $\sum M_i < \infty$ אז $\sum f_n(z)$ מתכנס במ"ש ב- G . נובע מקריטריון קושי.

טורי חזקות: טור מהצורה $\sum c_n(z - z_0)^n$ הינו טור חזקות סביב הנקודה z_0 כאשר $c_n \in C$. נסמן $\frac{1}{R} = \limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}$, ל- R נקרא רדיוס ההתכנסות.

משפט קושי-הדמרד: עבור טור חזקות $\sum c_n(z - z_0)^n$ ורדיוס התכנסות R מתקיים כי הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה מקומית בדיסק ברדיוס R סביב z_0 . מחוץ לסגור של הדיסק הטור לא מתכנס, ו- $f(z) = \sum c_n(z - z_0)^n$ פונקציה הולומורפית בדיסק הפתוח וניתן לגזור איבר איבר.

את ההתכנסות בתוך הדיסק מקבלים בקלות על ידי הבוחן של וירשטראס והשוואה לטור הגאומטרי עם רדיוס שהוא קצת יותר קטן מרדיוס ההתכנסות. את חוסר ההתכנסות מחוץ לדיסק מקבלים מהעובדה שמחוץ לדיסק הגבול העליון גדול מ-1 ובפרט האיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס.

את ההולומורפיות של הפונקציה והנגזרת הרצויה מראים בכוח על ידי הגדרת הגבול ואנליזה בכול נקודה שבתוך הדיסק הפתוח. מהיכולת לגזור איבר איבר מקבלים שגם הנגזרת היא טור חזקות, ולכן גם היא הולומורפית, ולכן טור חזקות הוא הולומורפי אינסוף פעמים ברדיוס ההתכנסות. כמו כן

מתקיים $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ כאשר a_n זה האיבר ה- n בטור.

טורים חשובים:

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (נשים לב שהטור הזה מקיים שהוא הנגזרת של עצמו, וראינו שכול פונקציה שמקיימת את זה היא קבוע כפול פונקציית האקספוננט, אבל באפס היא שווה 1 ולכן הטור הזה מזדהה עם פונקציית האקספוננט כמו שרצינו!) והטור מתכנס בכול המישור המרוכב.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ו- $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ כמו כן. כאשר שני הטורים מתכנסים בכול המישור המרוכב.

- $\text{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$. רדיוס ההתכנסות הוא 1. את השוויון ללוג אפשר לקבל על ידי גזירה פעם אחת וקבלת טור גיאומטרי השווה ל $\frac{1}{1+z}$ שזו הנגזרת של $\log(1+z)$ ולכן הן נבדלות בקבוע, אבל הן מזדהות בנקודה.
- עבור $\sigma \in \mathbb{C}$ מתקיים $(1+z)^\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\dots(\sigma-(n-1))}{n!} z^n$ כול עוד $\sigma \notin \mathbb{N}$, אחרת זה סכום סופי מהבינום של ניוטון. ואכן קל לראות שהמקדמים הם אכן הנגזרות.
- $\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$. קל לוודא על ידי הרכבה עם טאנגנס

אינטגרציה:

- אינטגרל ממשי: עבור פונקציה $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ נגדיר את האינטגרל על הקטע הממשי להיות
- $$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \text{Re}(\varphi(t)) dt + i \int_a^b \text{Im}(\varphi(t)) dt$$
- האינטגרל קיים אם כול אחד מהאינטגרליים קיימים באופן נפרד, בפרט אם נניח φ רציפה למקוטעין אז גם החלק הממשי וגם החלק המדומה שלה רציפים למקוטעין ולכן אינטגרבייליים.
- לינאריות: $\int_a^b c\varphi_1 + b\varphi_2 = c \int_a^b \varphi_1 + b \int_a^b \varphi_2$ נובע מידיית מלינאריות של אינטגרל ממשי.
 - ניוטון לייבניץ: עבור φ גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים $\int_a^b \varphi' = \varphi(b) - \varphi(a)$. כאשר פונקציה גזירה ברציפות למקוטעין אם היא רציפה ויש חלוקה של הקטע למספור סופי של קטעים שעל כול אחד מהם היא גזירה ברציפות.
 - אי שוויון המשולש: $\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt$ וזה נובע מסיבוב האינטגרל כך שהוא יהיה ממשי ואז שימוש בא"ש המשולש לאינטגרלים הממשי. הסיבוב נעשה על ידי כפל בנורמה של האינטגרל חלקי עצמו.
 - חסם עליון: עבור עקומה $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מתקיים $|\int_\gamma f(z) dz| \leq (\max_\gamma |f|) L(\gamma)$ כלומר הערך של האנטגרל קטן מהמקסימום על המסילה כפול האורך שלה. זה נובע מידיית מחסם טריוויאלי על אינטגרל ממשי.
 - התכנסות במ"ש: במקרה של התכנסות במ"ש של פונקציות אינטגרליות לפונקציה אינטגרלית ניתן להחליף גבול ואינטגרל על פני מסילה, וזה נובע מידיית מהחסם שלעיל על ההפרש בינהן.

אינטגרל מדומה / אינטגרל לאורך מסילה:

עבור מסילה $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ופונקציה f המוגדרת היטב על התמונה של γ נגדיר $\int_\gamma f(z) dz$ האינטגרל המסילתי להיות

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

נשים לב שאינטגרל מסילתי גם כן מקיים לינאריות, וגם אדיטיביות לחיבור מסילות. כמו אותו האינטגרל עבור מסילה בכיוון ההפוך יהיה מינוס האינטגרל בכיוון המקורי, וזה נובע מכך שמסילה בכיוון ההפוך זה להרכיב עם מינוס.

המשפט היסודי של החדוא: עבור $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ופונקציה הולומורפית f בתחום ומסילה חלקה למקוטעין $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ (ונניח כי הנגזרת של f רציפה, למרות שזה הנחה מיותרת כי נראה שכול פונקציה הולומורפית היא גזירה ברציפות אינסוף פעמים) אז מתקיים

$\int_\gamma f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. ובפרט עבור מסילה סגורה האינטגרל הוא אפס. זה נובע מידיית מניוטון לייבניץ ממשי אחרי פרמטריזציה של האינטגרל המסילתי לאינטגרל קווי, ומכלל השרשרת (כי כופלים בנגזרת הפנימית!)

לכן לכול פונקציה שיש לה קדומה בתחום, האינטגרל על מסילה סגורה יהיה אפס, בפרט עבור פונקציה שהיא גבול של טור חזקות, כי קל מאוד למצוא את הקדומה שלה, על ידי אינטגרציה איבר איבר.

רה-פרמטריזציה: עבור מסילה $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ נגדיר מסילה חדשה $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow C$ להיות רה-פרמטריזציה של המסילה γ אם $\gamma_1 = \gamma \circ \beta$ עבור β עולה וחלקה למקוטעין. נשים לב שרה-פרמטריזציה של מסילה לא משפיעה על האינטגרל לאורכה, וזה נובע משינוי משתנה לאינטגרל ממשי.

סכומי רימן: ניתן להגדיר אינטגרל מסילתי גם על ידי סכומי רימן. נחלק את הקטע שהוא המקור של המסילה, ונבחר נקודות מדגם בכול מקטע. סכום הרימן יהיה הערך בנקודת המדגם כפול ההפרש בין הנקודות שדגמנו (בתמונה של המסילה, לא במקור!) סכום הרימן שואף לאינטגרל כאשר העדינות הולכת לאפס.

משפט Goursat:

יהי $G \subseteq C$ תחום ופונקציה f הולומורפית בתחום. יהיה $T \subseteq G$ משולש סגור אז $\square_{\partial T} f = 0$ כלומר האינטגרל על שפת כול משולש הוא אפס. זה נובע מחלוקת המשולש כול פעם לארבע משולשים קטנים יותר, כך שהאינטגרל על השפה שווה לסכום האינטגרלים על שפות המשולשים הקטנים, ולכן כול פעם קטן פי 4, בעוד שההיקף של המשולשים קטן פי שניים כול פעם. נמשיך בתהליך ונקבל סדרה של קבוצות קומפקטיות מקוננות ולכן יש נקודה בחיתוך. בנקודה הזו הפונקציה גזירה ולכן שווה למשהו לינארי שהאינטגרל עליו מתאפס כי יש לו קדומה ועוד שארית שואפת מהר לאפס, וקל לחסום את האינטגרל של השארית מלמעלה ולקבל סתירה לכך שהאינטגרל המקורי לא היה אפס.

משפט קושי לתחומים קמורים:

עבור תחום קמור $G \subseteq C$ מתקיים כי לכול פונקציה הולומורפית בתחום האינטגרל על פני כול מסילה סגורה הוא אפס. נובע מבחירת נקודה כלשהי בתחום z_0 ולכול נקודה אחרת z נגדיר פונקציה $g(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi$. אזי נראה כי g היא קדומה ל f ולכן f תהיה קדומה בתחום ולכן האינטגרל על כול מסילה סגורה יהיה אפס. ואכן ניתן לראות מהגדרת הנגזרת כי g קדומה ל f על ידי שימוש בעובדה שאינטגרל על משולש סגור הוא אפס. כלומר: $g(z) - g(z_1) = \int_{[z_1, z]} f(\xi) d\xi$, כלומר אין צורך לעבור דרך הנקודה שבחרנו, כי האינטגרל על כול המשולש הוא אפס. ואז מראים שהמרחק בין ההפרש שלעיל חלקי $z - z_1$ לבין f הוא שואף לאפס.

באופן שקול ניתן לראות כי הוכחנו שעבור תחום קמור ופונקציה f רציפה שמקיימת שעל פני כול משולש סגור האינטגרל שלמה מתאפס, אז יש לה קדומה הולומורפית בתחום.

משפט קושי:

יהיה $G \subseteq C$ תחום חסום כך ש $\partial G = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p$ כלומר השפה שלו היא איחוד סופי של מסילות כך שכול המסילות הללו זרות, וכול אחת מהן סגורה, פשוטה וחלקה C^1 ורגולרית למקוטעין (כלומר הנגזרת מתאפסת כמות סופית של פעמים) אזי לכול פונקציה $f \in H(G) \cap C(\bar{G})$ כלומר פונקציה הולומורפית ורציפה עד השפה, מתקיים $\square_{\partial G} f = 0$ כלומר האינטגרל על השפה של התחום הוא אפס. (הכיוון שלאורכו הולכים במסילות הוא תמיד כך שהתחום נמצא משמאל). ההוכחה נובעת מחלוקה ל δ רשת וחסומת הערכים על פני ריבועים קטנים.

נוסחת קושי:

יהיה $G \subseteq C$ תחום חסום כך ש $\partial G = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p$ כך שכול המסילות הללו זרות, וכול אחת מהן סגורה, פשוטה וחלקה C^1 ורגולרית למקוטעין. תהי $f \in H(G) \cap C(\bar{G})$ אז מתקיים עבור $z \in G$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z)$$

ועבור $z \in C \setminus G$ האינטגרל הוא אפס. זה נובע מלקחת עיגול קטן סביב הנקודה $z \in G$ ברגע שהוצאנו את הנקודה הזו מתוך התחום שלנו האינטגרל על השפה יהיה אפס ממשפט קושי כי הפונקציה הולומורפית. שנגדול העיגול שואף לאפס האינטגרל על השפה עליו שואף לערך בנקודה כפול $2\pi i$ ולכן קיבלנו הנדרש, כי האינטגרל על השפה החיצונית ועוד האינטגרל על העיגול הקטן ביחס זה אפס, לכן האינטגרל על השפה החיצונית שווה לאינטגרל על העיגול הקטן (עד כדי מינוס, אבל זה מטופל בבחירת כיוון) ולכן שווה לערך הדרוש.

עקרון הערך הממוצע:

עבור G תחום ו $f \in Hol(G)$ ונקודה $z \in G$ ואיזשהו רדיוס $\rho > 0$ כך שהכדור הסגור מרדיוס ρ סביב z כולו נמצא ב G , אז מתקיים $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta$. כלומר הערך בנקודה הוא ממוצע על פני עיגול סביבה שמוכל כולו בתחום. זה נובע מיידית מנוסחת קושי כי מתקיים:

$f(z)$

עקרון המקסימום:

יהיה G תחום חסום כך ש $f \in Hol(G) \cap C(\bar{G})$ אז המקסימום של הערך המוחלט של הפונקציה מתקבל על השפה, ואם הוא מתקבל בפנים של התחום אז הפונקציה קבועה. אינטואיטיבית זה ברור, כי כול נקודה היא ממוצע של הנקודות סביבה, ולכן בכול נקודה בפנים לא יתכן שהיא מקסימלית, כי היא ממוצע! מניחים בשלילה שיש מקסימום בנקודה z_0 כלשהי ואז מסתכלים על קבוצת כול הנקודות שמקבלות את אותו הערך. הקבוצה המשלימה פתוחה, אבל מעקרון הערך הממוצע גם הקבוצה הזו פתוחה, ולכן משום שהתחום קשיר אחת מהן ריקה. אז או שאין מקסימום בפנים, או שהפונקציה קבועה.

אינטגרל קושי:

עבור עקומה $\gamma: [a, b] \rightarrow C$ חלקה למקוטעין ופונקציה φ רציפה על התמונה של γ נגדיר את אינטגרל קושי של φ על המסילה להיות $F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$ לכל $z \notin \gamma$. (ברור שהפונקציה בתוך האינטגרל אינטגרלית כי היא רציפה על המסילה).

נשים לב כי $F(z)$ הולומורפית ב $C \setminus \gamma$, וגזירה במובן המרוכב אינסוף פעמים! ומתקיים שהנגזרת היא $F^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$

זה נובע מהעובדה שאפשר לבטא את הפונקציה הזו כטור חזקות. ואכן יהיה $z_0 \in C \setminus \gamma$ כלומר נקודה שבה אנו מצפים שהפונקציה תהיה גזירה אינסוף פעמים, ואכן קיים מרחק גדול ממש מאפס בין z_0 לבין המסילה. (תמונה של מסילה היא קומפקט). לכול z כך שהמרחק שלו מ z_0 קטן מהמרחק של z_0 למסילה (כלומר זה הולך להיות רדיוס ההתכנסות) וכל $\xi \in \gamma$ מתקיים $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \frac{1}{\xi - z_0}$ ולכן

מפיתוח לטור גאומטרי מתקיים $\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ ולכן $\frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \varphi(\xi)$ כעת נשים

לב שיש התכנסות במ"ש ב ξ כי φ רציפה ולכן חסומה, והטור מקיים שהוא גאומטרי מתכנס, כי בכוונה בחרו את z כך שהמרחק שלו מ z_0 יהיה פחות מהמרחק של ξ ל z_0 כי על המסילה. לכן יש

התכנסות במ"ש וניתן להחליף גבול ואינטגרל, לכן $F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi-z} d\xi = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} \varphi(\xi) d\xi$ ומהחלפת סכום ואינטגרל נקבל $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$ ולכן זה טור חזקות סביב z_0 והמקדמים הם בדיוק האינטגרל שרצינו, ואנחנו יודעים שהמקדמים הם הנגזרות. כלומר קיבלנו שאפשר לפתח אותה לטור טיילור בכול נקודה במשלים של המסילה, והרדיוס יהיה הגדול ביותר האפשרי שלא חותך את המסילה.

מכאן נקבל שכול פונקציות הולומורפית גזירה אינסוף פעמים במובן המרוכב כי ראינו שעבור תחום G ופונקציה $f \in \text{Hol}(G)$ מתקיים כי $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$ ובפרט אם ניקח מעגל C קטן מספיק כך שכולו מוכל בתחום G אז יתקיים $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$, אבל בתוך המעגל הזה שמוכל כולו בתחום הפונקציה $H(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$ היא גזירה ברציפות אינסוף פעמים כפי שראינו לעיל, ולכן בכול נקודה הפונקציה $f(z)$ שווה לפונקציה גזירה ברציפות אינסוף פעמים, ובנוסף מתקיים כי הנגזרות הן $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$. בפרט כול פונקציה הולומורפית אפשר לפתח לטור חזקות בכול נקודה, ברדיוס הגדול ביותר שלא חותך את השפה של התחום.

משפט Morera:

עבור פונקציה רציפה f על תחום G שלכול משולש סגור בתחום האינטגרל שלה על המשולש מתאפס אז היא הולומורפית. ראינו בעבר שזה אומר שיש לה קדומה הולומורפית בתחום, אבל אם הקדומה שלה הולומורפית אז היא בפרט גזירה אינסוף פעמים, ולכן גם הפונקציה הולומורפית כי היא הנגזרת...

אי שוויון קושי:

אם פונקציה הולומורפית בכדור מרדיוס r סביב z_0 אז מתקיים $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f|$ וזה נובע מיידית מחסם פשוט על האינטגרל המסילתי (מקסימום כפול אורך הקטע)

משפט ליוביל:

עבור פונקציה שלמה (הולומורפית בכול המישור) אם היא חסומה אז היא קבועה. נובע מיידית מאי שוויון קושי. תהי נקודה כלשהי z_0 אז $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ כאשר M הוא החסם של הפונקציה, r רדיוס מעגל כלשהו סביב הנקודה. אבל זה נכון לכול מעגל, כי היא שלמה. לכן $f'(z_0) = 0$ לכול z_0 ולכן הפונקציה קבועה.

המשפט היסודי של האלגברה:

כול פולינום בעל מקדמים מרוכבים מתפרק לגורמים לינאריים (בפרט יש לו n שורשים כולל ריבוי). מספיק שגראה שלכול פולינום יש לפחות שורש אחד, ואז נוכל להמשיך באינדוקציה על המעלה. ואכן יהיה פולינום $p(z)$ כלשהו ונניח בשלילה שאין לו שורש, אז הפונקציה $\frac{1}{p}$ שלמה, כלומר הולומורפית בכול המישור. אבל נשים לב כי $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$ (נובע מהוצאת גורם משותף z^n) ולכן הגבול של $\frac{1}{p}$ באינסוף הוא אפס, אבל היא פונקציה רציפה, ולכן נקבל שהיא חסומה, ולכן ממשפט ליוביל היא קבועה, אבל p לא קבועה וזו סתירה. לכן p יש שורש כנדרש.

משפטי יחידות:

עבור פונקציה הולומורפית שכול הנגזרות שלה בנקודה z_0 מתאפסות היא פונקציית האפס בכול התחום. זה נובע מהעובדה שניתן לפתח אותה לטור טיילור בסביבה מספיק קטנה של הנקודה, ולכן שהטור הוא זהותית אפס, ולכן הפונקציה היא זהותית הטור, כלומר זהותית אפס בסביבה מספיק קטנה של הנקודה, ולכן כול הנגזרות שלה הן אפס בסביבה מספיק קטנה של הנקודה ולכן ניתן להרחיב את זה לכול התחום כי התחום קשיר. (קבוצת הנקודות שבהן כול הנגזרות הן אפס היא קבוצה פתוחה, וגם המשלים לה הוא קבוצה פתוחה).

בפרט אם לשתי פונקציות יש אותן הנגזרות בנקודה מסוימת אז הן זהות בכול התחום.

נקודות סינגולריות שאריות וטורי לורן:

סדר של נקודה:

עבור תחום G ופונקציה $f \in Hol(G)$ כך שהיא לא זהותית פונקציית האפס, ותהי נקודה $a \in G$ כך שא a שורש של f אז נגדיר את הסדר של a ב f להיות המספר של הנגזרת הראשונה שלא מתאפסת בנקודה a . בהכרח קיימת כזו כי אחרת f הייתה זהותית פונקציית האפס.

$$m_f(a) = \min\{n \in \mathbb{N} | f^{(n)}(a) \neq 0\}$$

"חלוקה באפס":

כמו כן מתקיים כי $f(z) = (z - a)^{m_f(a)} g(z)$ כאשר $g(z)$ לא מתאפסת בנקודה a והיא גם הולומורפית בכול G (בפרט $g(a) = \frac{f^{(m_f(a))}(a)}{m_f(a)!}$). זה נובע מיידית מפיתוח לטיילור של f בנקודה, וצמצום כול הנגזרות הראשונות שמתאפסות על ידי חלוקה. כלומר $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ בכול נקודה שאינה a ולכן ברור כי g הולומורפית בכול התחום, וכמו כן לא מתאפסת בנקודה a .

סדרה של אפסים:

יהי תחום G ופונקציה הולומורפית f בתחום כך שיש סדרה של נקודות $z_n \rightarrow a$ כך ש $f(z_n) = 0$ אז f זהותית אפס בכול התחום. בבירור מרציפות f מתאפסת בנקודה a . נראה שהסדר של הנקודה a הוא אינסוף, כלומר הנגזרות מתאפסות ולכן הפונקציה זהותית אפס. ואכן אם הסדר היה סופי אז $f(z) = (z - a)^n g(z)$ עבור g שלא מתאפסת בסביבה של הנקודה a , אבל לא קיימת סביבה כזו כי f מתאפסת בכול סביבה של הנקודה, לכן קיבלנו סתירה.

משפט וירשטראס:

עבור סדרת פונקציות הולומורפיות המתכנסות במ"ש מקומית לפונקציה כלשהי, אז הפונקציה הגבולית הולומורפית, וגם סדרת הנגזרות מתכנסות במ"ש מקומית לנגזרת, לכול נגזרת!

ההולומורפיות של הפונקציה הגבולית נובעת מייד ממשפט מוררה, והחלפת גבול ואינטגרל כי יש התכנסות במ"ש על כול קומפקט (משולש סגור), ולכול אחת מהפונקציות בדרך האינטגרל מתאפס ממשפט קושי. השאיפה של הנגזרות נובעת מחסם קושי על הנגזרת. הפונקציה $f_n^{(j)} - f^{(j)}$ גם כן הולומורפית כהפרש של הולומורפיות ולכן בעיגול קטן מספיק יש התכנסות במ"ש, ובעיגול עוד יותר קטן הנגזרת של הפונקציה הזו חסומה על ידי המקסימום של ההפרש, ששואף לאפס כי יש התכנסות במ"ש.

נקודות סינגולריות:

תחילה נדבר על נקודות סינגולריות מבודדות, שהן נקודות שבהן הפונקציה הולומורפית בסביבה מנוקבת של הנקודה. נגדיר שלושה סוגים

- סליקה: הגבול בנקודה קיים וסופי. $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.
- קוטב: הגבול בנקודה הוא אינסוף $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$
- סינגולריות עיקרית: כול השאר, או במילים אחרות הגבול לא קיים.

טור לורן:

הרעיון הוא לפתח לטור טיילור, אבל גם עם מקדמים שלילים, כלומר לא תמיד אפשר לפתח לטור טיילור, למשל אם הפונקציה לא הולומורפית בסביבה, אבל כן נרצה לפתח לטור שבו יהיה גם חזקות שליליות של z .

ואכן המשפט אומר כי עבור פונקציה $f \in \text{Hol}(R_1 < |z| < R_2)$ כלומר הולומורפית בטבעת אז מתקיים $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ כאשר המקדמים הם $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$ עבור ρ בין שני הרדיוסים החוסמים. זה נובע מלקיחת שני רדיוסים קטנים יותר, ולקבל תחום שבו הפונקציה הולומורפית. לכן ניתן להשתמש בנוסחת קושי, ולפרק את האינטגרל על הטבעת לשתי מסילות, האינטגרל על הטבעת החיצונית והאינטגרל על הטבעת הפנימית (במינוס). כול אחד מהם הוא אינטגרל קושי, ובעזרת טור הנדסי מקבלים את החלק עם החזקות החיוביות והשליליות בנפרד.

משפט רימאן:

תחילה נשים לב כי אם $M = \max_{|\xi|=\rho} |f|$ אז $|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$, כאשר מדובר במקדמים של טור הלורן וזה נובע מחסם פשוט על האינטגרל.

כעת המשפט אומר כי אם u_a^* סביבה מנוקבת של a ופונקציות הולומורפיות f בסביבה הזו, כמו כן f חסומה (למעשה מספיק לדרוש כי $\liminf_{r \rightarrow 0} r \max_{|z|=r} |f| = 0$) בדיסק מנוקב סביב a אז a נקודת סליקה של f ואפשר להשלים את f להיות מוגדרת גם בנקודה a ונקבל פונקציה הולומורפית בכול הסביבה. וזה נובע מיידית מפיתוח של הפונקציה לטור לורן בטבעת שלא מכילה את a . ניתן לפתח את הטור לכול רדיוס קטן כרצוננו, ונקבל מהחסם לעיל כי המקדמים השלילים חייבים להיות אפס, לכן זה למעשה טור טיילור ולכן הפונקציה הולומורפית בסביבה. אם נגדיר אותה להיות הערך של הטור בנקודה נקבל פונקציה הולומורפית בכול הסביבה.

סדר של קוטב:

תהי $f \in \text{Hol}(U_a^*)$ כך ש a קוטב של הפונקציה, אז a נקודת סליקה של $\frac{1}{f}$ כי הגבול יהיה אפס. לכן ניתן להרחיב את $\frac{1}{f}$ לפונקציה הולומורפית בכול הסביבה כולל בנקודה, ומשום שהיא מתאפסת בנקודה נקבל כי $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m g(z)$ כאשר g לא מתאפסת בסביבת של הנקודה. לכן מהעברת אגפים נקבל $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ כאשר $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ מוגדרת בסביבת a והולומורפית בה. נגדיר את m להיות הריבוי של הקוטב בנקודה a .

לכן באופן מיידי מקבלים כי אם a נקודת סליקה אז בפיתוח לורן אין חזקות שליליות, כי זה למעשה פיתוח טיילור כי הפונקציה למעשה הולומורפית. אם a קוטב אז יש מספר סופי של חזקות שליליות, כי זה למעשה טור טיילור שחלקנו בחזקה סופית של z , ואם זה סינגולריות עיקרית אז יש אינסוף מקדמים שליליים.

משפט קוזרטי-ויירשטראס:

תהי $a \in C$ נקודת סינגולריות עיקרית של פונקציה f אז לכל $w \in C$ קיימת סדרה z_n שמוכלת בתחום ההגדרה של f כך ש $z_n \rightarrow a$ ובנוסף $f(z_n) \rightarrow w$. כלומר התמונה סביב הנקודה צפופה במישור המרוכב. זה נובע מהנחה בשלילה שהתמונה לא צפופה, ואז יש כדור קטן שבו לא מתקבלים ערכים, נזיז את הכדור הזה לראשית ונקח אחד חלקי. הפונקציה החדשה מוגדרת והולומורפית בסביבת הנקודה וחסומה, ולכן יש לה נקודת סליקה בנקודה. לכן לפונקציה המקורית יש או נקודת סליקה או קוטב, בסתירה לכך שזו סינגולריות עיקרית.

סיגולריות באינסוף:

תהי $f \in Hol(|z| > R)$ כלומר בסביבה של אינסוף אז נגדיר $F(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ פונקציה חדשה, ונקבל F הולומורפית בעיגול ברדיוס $\frac{1}{R}$ סביב אפס. נגדיר סליקה ל f באינסוף אם ל F יש סליקה באפס, כנ"ל עבור קוטב ועבור סינגולריות עיקרית.

- פונקציה $f \in Hol(\hat{C})$ כלומר שאינסוף הוא סליקה שלה, היא פונקציה קבועה! כי זה אומר שהפונקציה $f\left(\frac{1}{z}\right)$ בעלת סליקה באפס ולכן הולומורפית בסביבה של אפס ולכן חסומה, ומחוץ לסביבה הזו ברור שהיא חסומה כי זה ערכים של הפונקציה f בתוך כדור סגור. לכן $f\left(\frac{1}{z}\right)$ חסומה ושלמה ולכן קבועה, לכן גם f קבועה.
- פונקציה $f \in Hol(C)$ כך שאינסוף קוטב שלה אז היא פולינום. כי נקבל של $f\left(\frac{1}{z}\right)$ יש קוטב באפס ולכן יש לה טור לורן עם מספר סופי של מקדמים שליליים $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n$ סביב אפס, ורדיוס ההתכנסות של הטור הוא כול המישור לכן $f(z) = \sum_{n=-\infty}^m a_n z^n$ בכול המישור פרט לאפס. מצד שני f הולומורפית בסביבת אפס ולכן יש לה טור טיילור בסביבת אפס, ולכן הוא חייב להזדהות עם הטור לורן ולכן זה טור טיילור עם מספר סופי של מקדמים, ולכן הפונקציה היא פולינום.

שאריות:

עבור $f \in Hol(U_a^*)$ נגדיר השארית בנקודה a להיות אינטגרל בסביבה קטנה של הנקודה, או למעשה זה המקדם של $\frac{1}{z}$ בפיתוח לורן סביב הנקודה. $res_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz$.

ממשפט קושי נובע מיידית כי G תחום כך שהשפה שלו יפה מספיק, ופונקציה שהיא הולומורפית בתחום פרט למספר סופי של נקודות $a_1, \dots, a_N$ אז $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{n=1}^N res_{a_n}(f)$ וזה פשוט על ידי לקיחת תחום חלקי לתחום שלנו, שמקיף כול נקודה בעייתית במעגל קטן וכך מוציא אותה מהתחום, ואז מקבלים פונקציה הולומורפית ולכן האינטגרל יתאפס על השפה, ולכן יהיה שווה לאינטגרליים על העיגולים הקטנים סביב הנקודות שזה בדיוק השאריות.

חישוב שאריות:

- עבור $f = \frac{\varphi}{\psi}$ כך ששתייהן הולומורפיות בסביבת נקודה a , וכמו כן a שורש של ψ מסדר 1 אז מתקיים $res_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)$ כי לפונקציה f יש טור לורן סביב a שבו יש מקדם

יחיד שאינו אפס לחזק שלילית, לכן לאחר הכפלה ב $(z - a)$ זה יהיה המקדם של החופשי, ולכן כאשר כול שאר הטור יתאפס זה מה שנקבל. ולכן נקבל $res_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$ זה פשוט ערך הגבול שיוצא, מרציפות והגדרת הנגזרת (הנגזרת לא מתאפסת בנקודה כי הסדר הוא 1).

- עבור קוטב מסדר גבוה יותר, כלומר $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$ מתקיים כי השארית בנקודה a היא $res_a f = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$ כי אנחנו רוצים לקבל את המקדם של $\frac{1}{z}$ בטור לורן, וזה המקדם של z^{m-1} בטור טיילור של φ כי כשנחלק ב $\frac{1}{z^m}$ נקבל $\frac{1}{z}$.
- עבור פונקציה הולומורפית g בסביבת הנקודה a כך ש a שורש שלה, נסמן ב m את הריבוי של השורש, אז $res_a \frac{g'}{g} = m$ כי מתקיים $g(z) = (z-a)^m h(z)$ ולכן מכללי גזירה נקבל $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$ ולכן הטור לורן יכול חזקה שלילית יחידה, והיא של $\frac{1}{z}$ והמקדם שלה הוא m ולכן זו השארית, כי $h'(z)/h(z)$ הולומורפית.

שארית באינסוף:

עבור פונקציה הולומורפית בסביבה של אינסוף, כלומר $f \in Hol(|z| > R)$ אז נגדיר את השארית באינסוף להיות $res_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f(z) dz$ כאשר $\rho > R$. ההיגיון הוא שלוקחים מעגל שמקיף את אינסוף, כמו שלקחנו מעגל שמקיף נקודות בעייתיות אחרות. הסימן הוא מינוס כי עושים את האינטגרל הפוך, כלומר הוא מקיף את אינסוף, ולא מקיף את התחום שבתוכו.

נשים לב שאם נסמן $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ אז $res_\infty f = res_0 \left(\frac{f(z)}{z^2}\right)$ כי נציב בטור לורן של f את $\frac{1}{z}$ ונקבל שהמקדם של $\frac{1}{z}$ הפך למקדם של z ולכן אם נחלק ב z^2 נקבל הנדרש.

כמו כן מתקיים עבור פונקציה f הולומורפית בכול המישור פרט לכמות סופית של נקודות אז $\sum_{n=0}^N res_{a_n} f + res_\infty f = 0$. זה נובע מיידית מכך שכמות הנקודות הרעות היא סופית לכן אפשר לתחום אותן בכדור גדול מספיק, ואז האטנגרל על הכדור הגדול בכיוון אחד זה סכום השאריות בפנים לפי משפט קושי, והאינטגרל על הכדור בכיוון ההפוך זה השארית באינסוף לפי הגדרה.

עקרון הארגומנט ולוגריתם מקומי:

פונקציה מרומורפית: פונקציה f תקרא מרומורפית בתחום G אם f הולומורפית פרט לקטבים, כלומר לכול נקודה בתחום קיימת סביבה שלה שבה f הולומורפית בה, או סביבה מנוקבת שבה f הולומורפית והנקודה היא קוטב.

עקרון הארגומנט: עבור G תחום ותת תחום $G_1 \subseteq G$ כך שהסגור של G_1 מוכל גם ב G כך שהשפה של G_1 טובה במובן של משפט קושי ותהי $f \in Mer(G)$ שלא מתאפסת ומוגדרת תמיד על פני השפה של G_1 אז מתקיים $N_f(G_1) - P_f(G_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ כאשר $N_f(G_1)$ זה מספר האפסים של הפונקציה בתחום G_1 וכמו כן $P_f(G_1)$ זה מספר הקטבים בתחום (כולל ריבוי). זה נובע ממשפט השאריות והעובדה שראינו ששארית של $\frac{f'}{f}$ בנקודה היא הסדר של האפס עבור f בנקודה. לכן האינטגרל שלעיל יהיה שווה לסכום השאריות בנקודות סינגולריות של הפונקציה $\frac{f'}{f}$. עבור אפס של f נקבל קוטב של $\frac{f'}{f}$ והשארית תהיה הסדר של האפס. עבור קוטב של f מתקיים כי $f = (z-b)^{-m} h$ כאשר b זו נקודת הקוטב ו h הולומורפית. אז נקבל כי השארית בנקודה היא $-m$ כלומר מינוס הסדר. לכן נקבל הנוסחא הנדרשת.

נגזרת לוגריתמית ושינוי בארגומנט:

אינטואיטיבית מתקיים $\frac{f'}{f}$ זו בעצם הנגזרת של $\text{Log}(f)$ אם היה קיים ענף ללוגריתם בתמונה של המסילה. ולכן אם היה ענף ללוג היה מתקיים כי $\int_{\gamma} \frac{f'}{f}(z) dz = 0$ על פני מסילה סגורה, כי קיימת קדומה הולומורפית. לכן מטרתנו כרגע תהיה למצוא לוגריתם לאורך γ , $f \circ \gamma$, כלומר נרצה פונקציה חלקה למקוטעין $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש $\varphi \circ \gamma(t) = e^{\varphi(t)}$. אם נמצא φ כזו נקבל כי יתקיים שהאינטגרל של הנגזרת הלוגריתמית יהיה:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f}(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \varphi'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} [\varphi(b) - \varphi(a)]$$

כך שאת $[\varphi(b) - \varphi(a)]$ נסמן כשינוי של הארגומנט לאורך המסילה. נזכר כי אם היה ענף רציף ללוגריתם בכול התמונה של $f(\gamma)$ אז השינוי בארגומנט היה אפס, כלומר הארגומנט בתחילה המסילה זהה לארגומנט בסופה. נשים לב אולם כי החלק הממשי של הלוגריתם המסילתי חייב להיות שווה, השינוי היחיד מתחילתה לסופה יכול להיות בכפול שלמות של $2\pi i$ תוספת לארגומנט. כול סיבוב סביב הראשית יוסיף עוד כפולה.

קיום לוגריתם רציף מקומית:

יהיה קטע $I = [a, b]$ ופונקציה רציפה $h \in C(I)$ כך ש $h \in C(I) \setminus \{0\}$. אזי קיימת פונקציה $\varphi \in C(I)$ כך שהיא מהווה לוגריתם מקומי, כלומר $h = e^{\varphi}$. ואם יש שניים כאלה הן נבדלות בתוספת של כפולה שלמה של $2\pi i$.

ואכן משום ש h רציפה אז על פני I היא רציפה במידה שווה. לכן אפשר לבחור δ מספיק קטן כך ש שכול סביבת דלתא יתקיים כי $\text{Re} \left(\frac{h(t_1)}{h(t_2)} \right) > 0$ כי היחס הזה שואף לאחד מרציפות. כעת ניתן להניח כי δ הוא איזשהו שבר מהאורך הכולל של הקטע. לכן נבנה את הפונקציה הלוגריתמית על פני כול קטע באורך δ בנפרד, ואז נחבר ונקבל פונקציה רציפה אחת לכול הקטע. את הנקודה הראשונית נבחר להיות איזשהי נקודה מהלוגריתם של התמונה של h , ובכול מקטע באורך דלתא מתקיים כי יש ענף ראשי ללוג של $\frac{h(t_1)}{h(t_2)}$ כי החלק הממשי לא מתאפס. לכן נוכל להרחיב את הפונקציה גם לקטע הנ"ל, וכך לאט לאט נרחיב את הפונקציה לכול הקטע. נגדיר $\varphi(t) = \varphi(a) + \text{Log} \left(\frac{h(t)}{h(a)} \right)$ עבור הקטע $[a, a + \delta]$ וכך נעשה לכול מקטע באורך דלתא. לכן הוכחנו קיום, היחידות נובעת מכך שהפרש בין שניים כאלה נבדל בכפולה שלמה של $2\pi i$, אבל גם ההפרש רציף, לכן הוא קבוע.

משפט Rouché:

יהי G תחום ויהי $G_1 \subseteq G$ כך שהסגור מוכל גם כן והשפה של G_1 טובה. יהיו $f, g \in \text{Hol}(G_1)$ כך שאחת שולטת על השנייה על פני השפה, כלומר $|g| < |f|$ על ∂G_1 אז מתקיים שמספר האפסים של סכומן הוא כמו של השולטת. $N_{f+g}(G_1) = N_f(G_1)$

כדי להוכיח את זה נשתמש בעקרון הארגומנט, אבל בגלל ששתי הפונקציות ולכן גם הסכום הולומורפיים אז אין קטבים, לכן רק אפסים. לכן N_{f+g} זה למעשה האינטגרל של הנגזרת הלוגריתמית, שזה למעשה סכום השנויים בארגומנט על פני המסילות השונות שמרכיבות את השפה של התחום לפונקציה $f + g$. אבל מתקיים $f + g = f \left(1 + \frac{g}{f} \right)$ אבל משום ש $|g| < |f|$ מתקיים כי החלק הממשי של $1 + \frac{g}{f}$ תמיד חיובי ולכן השינוי בארגומנט מתאפס כי יש ענף ללוגריתם! לכן השינוי בארגומנט הוא פשוט השינוי בארגומנט של הפונקציה f , וזה מספר האפסים של f . (ושינוי בארגומנט הופך כפולות לחיבור, כי זה לוג).

משפט ההעתקה הפתוחה:

עבור תחום G ופונקציה $f \in \text{Hol}(G)$ ונקודה $z_0 \in G$ נסמן $w_0 = f(z_0)$ וכמו כן נסמן את הריבוי של z_0 בפונקציה: $m = m_{z_0}(f - w_0)$, כלומר כמה נגזרות מתאפסות בנקודה, פלוס 1. אז לכל סביבה מספיק קטנה של התמונה w_0 יש סביבה מספיק קטנה של המקור z_0 כך שלכול איבר בסביבת התמונה (שהוא אינו w_0 עצמו) יש בדיוק m מקורות בסביבת המקור תחת הפונקציה f . נובע ממשפט רושה.

בפרט קיבלנו כי פונקציה הולומורפית שאינה קבועה היא העתקה פתוחה. וזה מוכיח באופן מיידי את עקרון המקסימום שכבר ראינו בעבר, כי לא יכול להיות מקסימום בפנים של התחום כי תמיד נוכל לזוז לכול כיוון ובפרט לכיוון שבו הערך המוחלט גדל.

בנוסף קיבלנו שבסביבת נקודה שבה הנגזרת לא מתאפסת (רוב הנקודות הן כאלה אם הפונקציה לא קבועה) אז קיימת סביבה שבה הפונקציה חד חד ערכית ועל. (גם עבור הערך במרכז לא יהיו הרבה מקורות כי המקורות שלו לא צפופים, כי אחרת הפונקציה הייתה קבועה)

למת Schwartz:

פונקציה הולומורפית f ממעגל היחידה לעצמו, כלומר מ $\Delta = \{|z| < 1\}$ לעצמו כך ש $f(0) = 0$ אז בהכרח מתקיים $|f(z)| \leq |z|$ וגם $|f'(0)| \leq 1$ ואם קיים $z_0 \neq 0$ עבורו $|f(z_0)| = |z_0|$ אז $f(z) = \lambda z$ כלומר f היא סיבוב $|\lambda| = 1$. לחילופין אם $|f'(0)| = 1$ נקבל אותה המסקנה.

זה נובע מעקרון המקסימום על הפונקציה $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ בעיגול.

הומולוגיה, הומוטופיה ותחומים פשוטי קשר:

מספר סיבובים: עבור מסילה $\gamma: I \rightarrow C$ סגורה, ונקודה $z \in C \setminus \gamma$ כלומר שאינה בתמונה של המסילה, אז נגדיר את מספר הסיבובים של המסילה סביב הנקודה z להיות $ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma(\arg(\xi - z))$ כלומר השינוי בארגומנט של הפונקציה $\xi - z$ על פני המסילה. אם המסילה גזירה ברציפות זה למעשה שווה ל $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$, שזה למעשה הפרש הלוגריתם בהתחלת המסילה ובסופה. ולכן הפונקציה שלכול z תתאים את $ind_\gamma(z)$ היא רציפה, אבל בדידה, ולכן קבועה על תחומים קשירים. כמו כן בגבול באינסוף המספר הזה הוא אפס, ולכן בתחום הקשירות החיצוני מספר הסיבובים סביב כול נקודה הוא אפס.

נגדיר $int(\gamma) = \{z \mid ind_\gamma(z) \neq 0\}$ כלומר הנקודות שהמסילה סובבת סביבן. באופן שקול נגדיר $ext(\gamma) = \{z \mid ind_\gamma(z) = 0\}$

לכן אם נשלב זאת עם עקרון הארגומנט נקבל כי מספר האפסים של פונקציה בתוך מסילה זה מספר הפעמים שההרכבה עם הפונקציה הסתובבה סביב אפס:

$$Ind_{f \circ \gamma}(0) = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{\xi} d\xi = \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = N_f(G) + P_f(G)$$

ציקלוס: סכום פורמלי סופי של עקומות. $\gamma = \sum n_j \gamma_j$ כאשר $n_j \in Z$ וכול העקומות בסכום סגורות ובקורס הזה נוסיף גם גזירות ברציפות למקוטעין. נגדיר כי אינטגרל לפי הציקלוס זה סכום האינטגרלים לפי המסילות כפול המקדמים המתאימים. כמו כן נגדיר כי $ind_\gamma = \sum n_j ind_{\gamma_j}$.

משפט קושי בגרסה הומוטופית:

יהי G תחום ותהי $f \in \text{Hol}(G)$. כמו כן יהיה $\gamma \subseteq G$ ציקלוס, כך ש $\text{ind}_\gamma(z) = 0$ לכל $z \in G \setminus C$ אז $\int_\gamma f(z) dz = 0$. (נשים לב שזה דומה למשפט קושי הרגיל, כי זה למעשה איחוד של עקומות שכולם מקיפות אך ורק דברים מתוך התחום ולמעשה אפשר לחשוב עליהן כעל שפה של תת תחום). ההוכחה כמו במשפט המקורי על ידי חלוקה לדלתא רשת.

הומוטופיה:

יהי תחום G , נאמר ששתי עקומות סגורות $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \rightarrow G$ הן הומוטופיות אם קיימת העתקה רציפה $\gamma: [0,1] \times [0,1] \rightarrow G$ כך שמתקיים $\gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$ וגם $\gamma(s, 1) = \gamma_1(s)$ כלומר זה פונקציה רציפה שמשנה את המסילה הראשונה להיות המסילה השנייה עם הזמן, כך שכול המסילות בדרך הן סגורות, כלומר לכל t מתקיים $\gamma(0, t) = \gamma(1, t)$.

נשים לב שרה-פרמטריזציה של העקומות לא משנה את היותן הומוטופיות.

עקומה כוויציה: עקומה תקרא כוויציה אם היא הומוטופית לעקומה הקבועה, כלומר לנקודה. נשים לב שאין חשיבות לאיזה נקודה נבחר כי כול שתי נקודות הן הומוטופיות אחת לשנייה כי התחום קשיר. נשים לב שאין בהכרח קשר בין האינדקס של העקומה סביב נקודות שלא בתחום לבין היותה כוויציה, כי קיימת עקומה לא כוויציה שהאינדקס שלה אפס סביב כול נקודה מחוץ לתחום.

שיטות לחישוב אינטגרלים:

פונקציה רציונלית עם סינוס וקוסינוס:

נניח נרצה לחשב את $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ אז נוכל לחילופין לחשב את האינטגרל המסילתי על פני מעגל היחידה $\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz$ ואת האינטגרל הזה לחשב בעזרת שאריות ומשפטי קושי.

פונקציה רציונלית כפול אקספוננט מרוכב:

נניח נרצה לחשב את $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx$ כאשר $\lambda \in R$ וכמו כן $R \in O\left(\frac{1}{z}\right)$ בסביבת אינסוף. אז מתקיים כי האינטגרל על פני חצי קשת ברדיוס שואף לאינסוף הולך לאפס (למת ג'ורדן) ולכן האינטגרל על פני הישר הממשי שווה לשאריות בחצי המישור העליון, או חצי המישור התחתון, תלוי בסימן של λ .

הוכחת למת ג'ורדן נובעת מהגדרת אינטגרל מסילתי. ואכן נסמן C_R להיות הקונטור החיצוני של חצי המעגל ונקבל $\int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{i\lambda Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$ ולכן נקבל $\int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = R \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{\lambda R(-\sin(\theta) + i\cos(\theta))} d\theta$ ולכן מא"ש המשולש לאינטגרלים מרוכבים נקבל $\left| \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq R \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-\lambda R \sin(\theta)} d\theta$ האחרון על ידי הערך המקסימלי שהפונקציה f מקבלת על פני הקונטור, שזה הולך לאפס, ואת מה שנשאר זה אינטגרל של פונקציה פשוטה שאפשר לחסום על ידי מספר סופי (ה R נכנס פנימה לשמש כנגזרת פנימית באינטגרל).

אינטגרל של קוסינוס על פני קטע סימטרי:

במקום לחשב אינטגרל של קוסינוס על פני הקטע הסימטרי אפשר לחשב אינטגרל של $e^{i\theta}$ ולהסתכל רק על החלק הממשי, או לחילופין הסינוס יצטמצם כי הוא אי זוגי והקטע סימטרי.

אינטגרל של פונקציה אי-זוגית על פני $[0, \infty]$:

מה שהיינו רוצים לעשות זה את מסילה הפאקמן ולקבל שהקשת החיצונית והפנימית מתבטלות ונקבל פעמיים את האינטגרל על הקטע הממשי החיובי, אבל הכיוונים המנוגדים מתבטלים ולמעשה אנחנו מקבלים אפס, שזה רע. לכן נוסיף $\log$ לפונקציה כדי שכאשר מגיעים מהכיוונים ההפוכים האינטגרלים לא שווים בדיוק ולכן לא מבטלים אחד את השני.

למשל זה שימושי כאשר רוצים לחשב את $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx$

פתרונות לשאלות נבחרות:

- פונקציה חד חד ערכית ושלמה היא אפינית. ואכן נשים לב שמחד חד ערכיות נקבל שהנגזרת לא מתאפסת בשום נקודה, כי אחרת ממשפט ההעתקה הפתוחה נקבל שני מקורות שונים לאותו הערך. לכן אם הפונקציה היא פולינום, אז גם הנגזרת שלה פולינום, אבל לא מתאפס ולכן קבוע, לכן הפונקציה אפינית. אם הפונקציה שלנו מכילה כמות אינסופית של מקדמים בטור הטיילור שלה אז לפונקציה $f\left(\frac{1}{z}\right)$ יש סינגולריות עיקרית באפס, כי בטור לורן יש אינסוף מקדמים ולכן התמונה שלה צפופה במישור בסביבת אפס. לכן התמונה של f צפופה במישור, כאשר המקורות מחוץ למעגל היחידה, אבל התמונה בתוך מעגל היחידה היא קבוצה פתוחה ממשפט העתקה הפתוחה, ולכן בהכרח יש חיתוך בין הקבוצה הצפופה לקבוצה הפתוחה, ולכן התמונה בתוך מעגל היחידה נחתכת עם התמונה מחוץ למעגל היחידה וזו סתירה לחד חד ערכיות, לכן היא בהכרח פולינום, בהכרח אפינית.