

אופרטור אקסטרנלי עם מיליטל 0/31

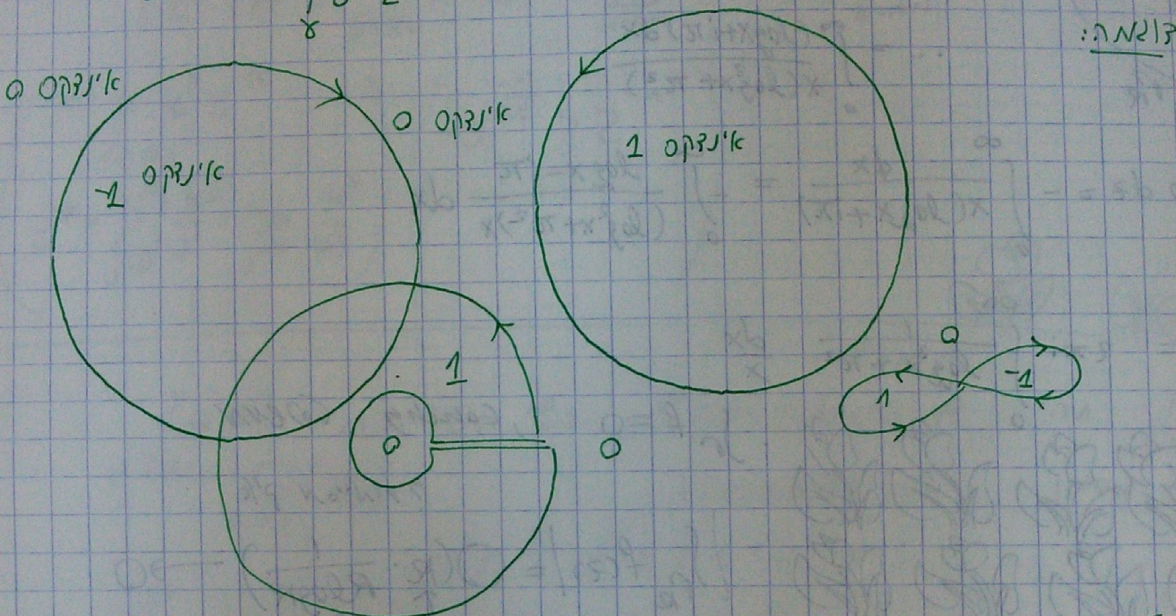
Winding number = מספר הסיבובים מסלול סגור סביב נקודה.

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ מסלול סגור. נבחרת נקודה z ואינן $\gamma(I)$.

$\gamma(a) = \gamma(b)$ $I = [a, b]$ $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$

$ind_z(\gamma) = ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(z - \gamma)$ (הגדרה)

$ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{dz} \frac{z}{z - \gamma}$ אם γ חסר (C¹ נגזרת) סל



Right to Left +1
Left to Right -1

"חוק"

תכונה

$z \mapsto ind_\gamma(z)$ (1)

$\mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ רציפה

$\lim_{z \rightarrow \infty} ind_\gamma(z) = 0$ (2)

כיוון-מימין $\log(z - \gamma)$ רציפה (יש טיפוס).

$\mathbb{C} \setminus \gamma = \bigcup_j \Omega_j$ (3)

$\{ \Omega_j \}_{j=1}^\infty$ רכיבי הקשירות (תחומים).

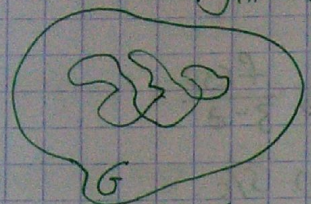
$ind_\gamma|_{\Omega_j} \equiv \text{const}$ כלומר $ind_\gamma(z_1) = ind_\gamma(z_2) \iff z_1, z_2 \in \Omega_j$

אם כיוון שאם פונקציה היא קבוע מקומי נמוך, היא קבוע (יש הבהרה).

$ind_\gamma|_{\Omega(\infty)} \equiv 0$ ∞ כל רכיב הקשירות ∞ נמוך.

יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום, $I: \delta \rightarrow G$ מסלול סגור.
 הנגזרת: $\delta \sim 0$ (קרי: הומוטופיה) $\rightarrow$ אם (G, δ) אז

נאמר כי המסלול חסום. $ind_\delta |_{\mathbb{C} \setminus G} \equiv 0$



הערה: אם δ סגור, $Path(G)$

$\delta \sim 0$ כל $\int_\delta f(z) dz = 0$ (*)

אם G פשוט הקטן
 אז כל מסלול δ ב- G
 הומוטופי ל-0.

נניח $z \in \mathbb{C} \setminus G$ נבחר

$f(z) = \frac{1}{3-z}$ f אנליטית ב- G

$0 \stackrel{(*)}{=} \int_\delta \frac{dz}{3-z} = 2\pi i \cdot ind_\delta(z)$ ~~Newton-Leib~~

Cauchy-homological form: COEN

נניח $\delta \sim 0$ כל δ סגור: $Path(G)$

$\int_\delta f(z) dz = 0$

הוכחה: (A. Beardon)

יהי G תחום חסום. נבחר $\delta \in \frac{1}{4} dist(\delta, \partial G)$

Q ריבוע סגור, שגודלו δ

$P_\delta := \sum_{Q_i \subset G} a_i Q_i$ - (סכום של מסלולים) (כאשר a_i הן מספרים שלמים)

$\forall z \in P_\delta: ind_\delta(z) = 0$ טענה:

הוכחה: $z \in P_\delta \iff z \in \mathbb{C} \setminus G \cap Q$ קיים

$z \cap Q = \emptyset, z \in \partial Q$

הערה: δ גודל הריבוע.

קיים $z' \in Q$ כך $ind_\delta(z') = 0$

כי $\delta \sim 0$

$(ind \text{ על } \mathbb{C} \setminus G) \quad ind_\delta|_Q \equiv const \iff Q \cap \delta = \emptyset$

$\square$ אם $ind_\delta(z) = 0$ לכל z אז $ind_\delta|_Q \equiv 0$

COEN הוכחה על פניו

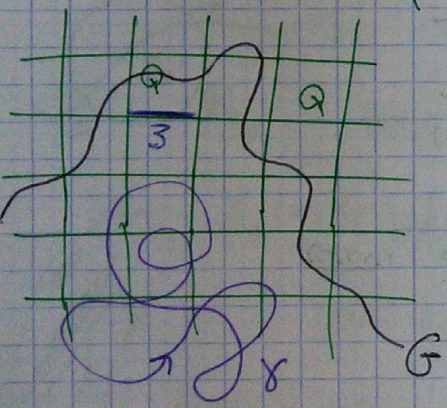
$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(z)}{3-z} dz = \begin{cases} f(z) & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \leftarrow \text{Cauchy}$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{Q_j \subset G} \int_{\partial Q_j} \frac{f(z)}{3-z} dz = \dots$

$\sum_{j: Q_j \subset G}$

$z \in \bigcup_{Q_j \subset G} int(Q_j)$
 נבחר z נקודה ב- G , z נקודה ב- G

סאונד: מה זה "הומוטופיה"?
 "15 מילים".
 "Q ריבוע סגור" (כולל).



קיימת נוסחה

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\gamma} \frac{f(z)}{z-z} dz$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\int_{\Gamma_\gamma} \frac{f(z)}{z-z} dz \right] dz$$

$(z, z) \mapsto \frac{f(z)}{z-z}$ נכנסה ג- $\Gamma_\gamma \times \gamma$! $\Gamma_\gamma \times \gamma$ קומפלקס
 S/c היא נכנסה במישור ולכן אפשר להחליף את סדר האינטגרלים.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_\gamma} f(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z} \right] dz = \dots$$

$$\dots = \int_{\Gamma_\gamma} f(z) \cdot \underbrace{(-\text{ind}_\gamma(z))}_{=0} dz = 0$$

□

$$\Gamma_\gamma = \partial \left[\bigcup_{Q_j \in G} Q_j \right] \quad \text{הערה:}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z} dz = \text{ind}_\gamma(z) f(z) \longleftarrow \text{fct Hol}(G) \quad \text{הערה:}$$

$$\gamma \sim 0 \quad \text{כאשר} \quad z \in G \setminus \gamma \quad \text{כאשר}$$

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z) - f(z)}{z-z} \quad z \in G \setminus \gamma \quad \text{הוכחה:}$$

g אנליטית. (ג- γ)

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z} dz - f(z) \underbrace{\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z}}_{= 2\pi i \cdot \text{ind}_\gamma(z)}$$

הערה: כל S היא עקומה G חסומה.