Local Mapping Theorem

22.12.15

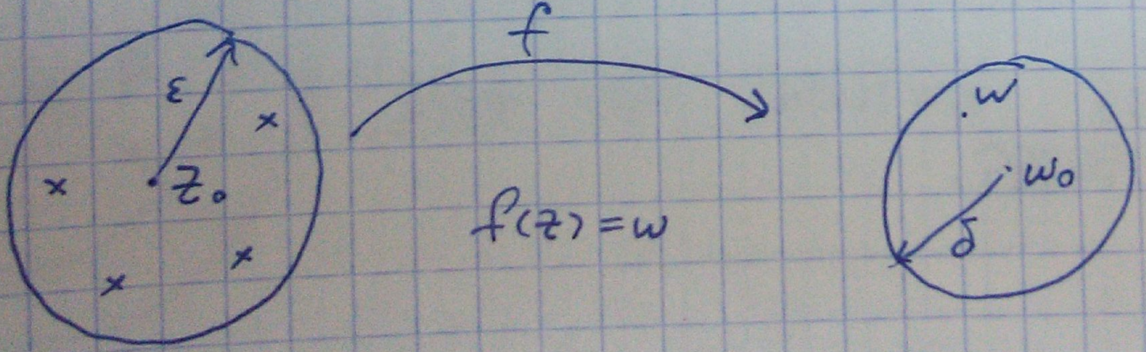
הגדרה: (ריבוי) אם $f(z_0)=w_0$ אפסית ב-z_0, אז $m=mult_{f-w_0}(z_0)$

$$f(z)=w_0+(z-z_0)^m g(z) \qquad g\in Hol, \quad g(z_0)\neq 0$$

משפט: $z_0\in G$, $f\in Hol(G)$ לא קבועה, $w_0=f(z_0)$. $m=mult_{f-w_0}(z_0)$

אז קיים $\varepsilon_0>0$ כך ש: $\forall \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ $\exists \delta>0$ $\forall w:$ $0<|w-w_0|<\delta$:

למשוואה $f(z)=w$ קיימים m פתרונות שונים ופשוטים ב-$0<|z-z_0|<\varepsilon$.



Proof of the Local Mapping Thm

22.12.15

יהי $\varepsilon_0>0$ המקיים: $f(z)\neq w_0$ $\forall\ 0<|z-z_0|\le\varepsilon_0$

$f'(z)\neq 0$ $0<|z-z_0|\le\varepsilon_0$

זאת כיוון שאין נקודות הצטברות של אפסים של f' ו- f לא קבועה.

יהי $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

$$\delta:=\min\{|f(z)-w_0| : |z-z_0|=\varepsilon\}$$

נפעיל את משפט Rouche על $\{|z-z_0|=\varepsilon\}$.

ל- $f(z)=w_0$ יש m פתרונות. האם גם ל- $f(z)=w$ יש m פתרונות?

$$\Big|\underbrace{(f(z)-w_0)-(f(z)-w)}_{-G}\Big| = |w-w_0| < \delta \le |f(z)-w_0| \qquad (|z-z_0|=\varepsilon)$$

$$\left(\begin{array}{l} F=f-w_0 \\ F+G=f-w \\ G=w_0-w \end{array}\right) \qquad m=N_{f-w_0} = N_{(f-w)} \Leftarrow \text{Rouche}$$

ולכן $m=N_{f-w}$.

$\square$

מקרה פרטי: $m=1$.

$f'(z_0)\neq 0$ $f(z_0)=w_0$.

במקרה זה, $f: U_{z_0}\xrightarrow[\text{ועל}]{1-1} U_{w_0}$.

ו- f^{-1} רציפה ב- U_{w_0}.

מסקנה: $f: U_{z_0}\xrightarrow[\text{ועל}]{1-1} U_{w_0} \Longrightarrow f^{-1}\in Hol(U_{w_0})$

$(f^{-1})'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}$. בנוסף, יש נוסחה מפורשת של f^{-1}?

$$f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{\zeta\cdot f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,d\zeta$$

ת.ב. לבדוק (משפט השארית)

$$|f^{-1}(f(z))| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{\zeta\cdot f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\,d\zeta\right|$$

Open Mapping Theorem

22.12.15

תהי $f \in Hol(G)$ לא קבועה. אז $f(G)$ פתוחה.

<u>הוכחה:</u> תהי $w_0 \in f(G)$. אז יש $z_0 \in G$ כך ש- $f(z_0)=w_0$

Local Mapping Thm $\Longrightarrow$ $\exists U_{w_0} \subset f(G)$ כלומר לכל $w \in U_{w_0}$

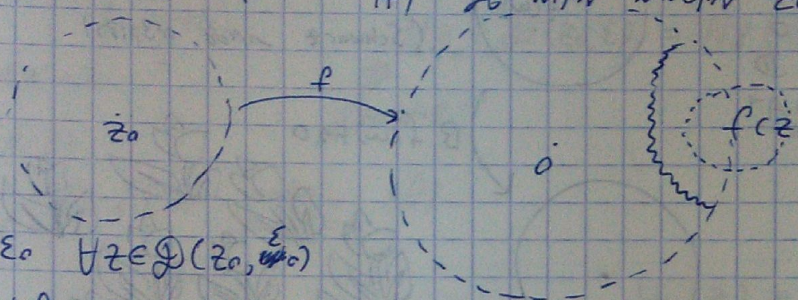
קיים z כך ש- $f(z)=w$. $\square$

<u>הערה:</u> G תחום $\Longrightarrow$ $f(G)$ תחום.

Maximum Principle - 2nd proof

$f \in Hol(G)$, $z_0 \in G$ מקסימום מקומי של $|f|$ $\Longrightarrow$ $f \equiv const$.

<u>הוכחה:</u>



$\exists \varepsilon_0 \ \forall z \in D(z_0, \varepsilon_0)$

$|f(z)| \le |f(z_0)| \longrightarrow f(D(z_0,\varepsilon_0)) \subset D(0, |f(z_0)|)$

אבל זוהי סתירה למשפט הפונקציה הפתוחה. $\square$

למת Schwarz

$f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$

$\mathbb{D} := \{|z|<1\}$. תהי $f \in Hol(\mathbb{D})$. $f(0)=0$.

אז:
1. $|f(z)| \le |z|$ ב- $\mathbb{D}$.
2. $|f'(0)| \le 1$
3. אם ב-1 או 2 יש שוויון ממש אז $\exists c: f(z)=cz$ (ואז כמובן $|c|=1$).

<u>הוכחה:</u>

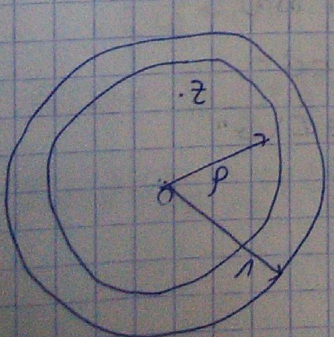
$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \ne 0 \\ f'(z) & z=0 \end{cases}$$

אז $h \in Hol(\mathbb{D})$.

יהי $\rho < 1$. $|z|=\rho$ $|h(z)| \le \frac{1}{\rho}$.

$|h| \le \frac{1}{\rho}$ ב- $|z| \le \rho$ לפי עקרון המקסימום.

$\rho \to 1$ $\Longrightarrow$ בכל $\mathbb{D}$, $|h(z)| \le 1$.



אם $|f'(0)|=1$ אז $|h(0)|=1$ ולפי עקרון המקסימום h קבועה.

ת.מ. - למת Pick

22.12.15

תהי $f: \mathbb{D} \circlearrowleft$ אנליטית אז

$$\forall z,w\in\mathbb{D} \quad \left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right| \le \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|$$

ובמיוחד $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \dfrac{1}{1-|z|^2} \quad \forall z\in\mathbb{D}$.

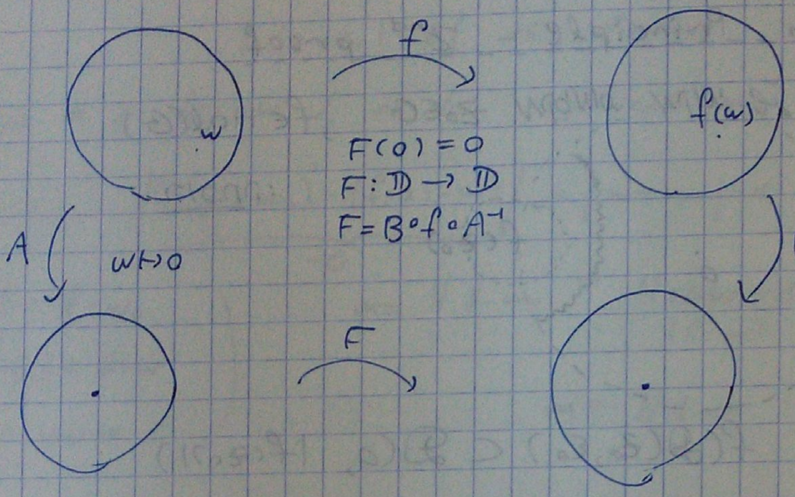
אם מתקיים שוויון אז $f\in Aut(\mathbb{D})$ כלומר $f\in Möb(\mathbb{C})$

ומתקיים $f(z)=c\cdot\dfrac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$, $|c|=1$.

הדרכה:

$A,B\in Möb(\mathbb{C})$

(תוצאה מלמת Schwarz).



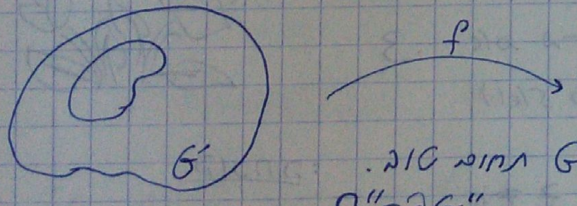
Conservation of Boundaries

טענה: תהי $f\in Hol(G)$ תח"ע.

G' תחום טוב, $\overline{G'}\subset G$. $\Gamma' := \partial G'$

$G'' := f(G')$, $\Gamma'' := \partial G''$

$\Longleftarrow$ $f(\Gamma')=\Gamma''$, $f|_{\Gamma'}$ הפכה.

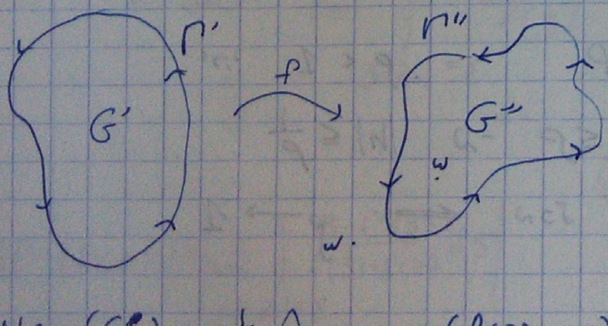


טענה הפוכה: $f\in Hol(G')\cap C(\overline{G'})$

G' תחום טוב. $\Gamma' := \partial G'$

נניח ש: $f: \Gamma' \xrightarrow[\text{על}]{1-1} \Gamma''$. G'' תחום טוב. $\Gamma''=\partial G''$.

$\Longleftarrow$ $f: G' \xrightarrow[\text{על}]{1-1} G''$.



הוכחה: תהי $w\in\mathbb{C}\setminus\Gamma''$.

נרצה להוכיח:

$$N_{f-w}(G') = \begin{cases} 1 & w\in G'' \\ 0 & w\in\mathbb{C}\setminus\overline{G''} \end{cases}$$

$$N_{f-w}(G') = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\zeta\in\Gamma'} \arg(f(\zeta)-w) = \dots$$ (החלפת משתנה $\lambda=f(\zeta)$)

$$\dots = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\lambda\in\Gamma''} \arg(\lambda-w) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{d\lambda}{\lambda-w} \underset{\text{משפט השארית של Cauchy}}{=} \mathbb{1}_{w\in G''}$$

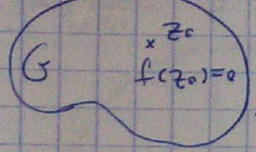
$\log\equiv\arg$ -ו Newton-Leibniz

כי החלק הממשי מתאפס כי $r=0$

משפט Hurwitz 22.12.15

תהינה $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset Hol(G)$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in G\ f_n(G) \neq 0$

$f_n \longrightarrow f$ במ"ש מקומית. אזי: אם $0 \in Im(f)$ אז $Im f = \{0\}$.



דוגמה: $f_n(z) = \frac{1}{n} \cdot z$, $G = \mathbb{D}$.

הוכחה: נניח ש- $f(z_0)=0$, $(z_0 \in G)$. נניח בשלילה $f \not\equiv 0$.

נבחר $\varepsilon > 0$ עבורו $f(z) \neq 0$ $\forall\ 0<|z-z_0| \le \varepsilon$.

בפרט $f(z) \neq 0$ $\forall\ |z-z_0| = \varepsilon$.

$$f_n = \underbrace{(f_n - f)}_{g} + f$$

נניח ש-n מספיק גדול כך ש-:

$$\max_{|z-z_0|=\varepsilon} |f_n - f| < \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f|$$

$$N_{f_n}(\mathbb{D}(z_0,\varepsilon)) \overset{\text{Rouche}}{=} N_f(\mathbb{D}(z_0,\varepsilon)) > 0$$

סתירה! $\square$

דוגמה:

1) $H_k(z) := e^{z^2} \cdot \frac{d^k}{dz^k}\left(e^{-z^2}\right)$

H_k פולינום, $\deg H_k = k$ (אפשר להוכיח באינדוקציה).

(אלו פולינום Hermite). **טענה:** כל האפסים של H_k ממשיים!

$$e^{-z^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n}\right)^n \Longrightarrow H_k(z) = e^{z^2} \lim_{n\to\infty} \frac{d^k}{dz^k}\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n$$

(בגלל התכנסות במ"ש מקומית + Weierstrass)

התכנסות במידה שווה מקומית בכל $\mathbb{C}$: $|z| \le R \Longrightarrow \left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n \rightrightarrows e^{-z^2}$ $(\forall R>0)$

(הוכחנו במש"ב עבור e^z שהוא מתכנס במ"ש מקומית.)

$\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n$ פולינום ממשי מדרגה $2n$ עם אפסים ב- $\pm\sqrt{n}$ מסדר n.

לכן כל האפסים של $\frac{d^k}{dz^k}\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n$ ממשיים. כעת לפי Hurwitz סיימנו. $\square$

2) $P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ כל האפסים של $P_n(z)$ בורחים ל-∞ כאשר $n \to \infty$, ממשפט Hurwitz

$P_n \longrightarrow e^z$. וכיוון ש-e^z לא מתאפסת.

טענה: כל האפסים של P_n הם בטבעת $\left\{\frac{n}{2e} \le |z| < 2n\right\}$

הוכחה: ⓐ אין אפסים ב- $\{|z| \ge 2n\}$

$$P_n(z) = \frac{z^n}{n!}\left(1 + \frac{n}{z} + \frac{n(n-1)}{z^2} + \dots + \frac{n!}{z^n}\right)$$

$$\left|\frac{n}{z} + \frac{n(n-1)}{z} + \dots + \frac{n!}{z^n}\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1$$

$$\Uparrow$$

$$\left(\left|\frac{n}{z}\right| \le \frac{1}{2}\right)$$

22.12.15

המשך- דוגמה:

ב) אין אפסים ב- $\{|z|<\frac{n}{2e}\}$. $f=e^z$.

$f+g=P_n \Leftarrow$ ~~$g=e^z+P_n$~~ $g=P_n-e^z$.

לפי משפט Hurwitz** מספיק להראות ש-: Rouche**

$|P_n(z)-e^z|<|e^z|$ ב- $|z|\le\frac{n}{2e}$.

$$|e^z|=e^{Re(z)}\ge e^{-\frac{n}{2e}}$$

$$|e^z-P_n|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{2e}\right)^k\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{e^k}{k^k}\cdot\frac{n^k}{(2e)^k}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{n}{2k}\right)^k<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

$\left(k!>k^ke^{-k}\right.$

למה?

$\left.e^k=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k^j}{j!}\underset{j=k}{>}\frac{k^k}{k!}\right)$

$\left(e^{-\frac{n}{2e}}>2^{-n}\right)$