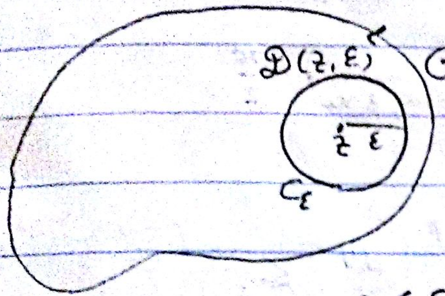
26.11.15

נוסחת Cauchy

משפט: $G\subset\mathbb{C}$ "תחום טוב" (חסום והשפה שלו היא איחוד סופי זר של מסילות רגולריות !-C^1 למקוטעין), $\Gamma=\partial G$, $f\in Hol(G)\cap C(\overline{G})$.

אז
$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}0 & z\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}\\ 2\pi i f(z) & z\in G\end{cases}$$



הוכחה: אם $z\in\mathbb{C}\setminus G$

$$\zeta\mapsto\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\in Hol(G)\cap C(\overline{G})$$

מכי משפט cauchy, $\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0$.

אחרת, $z\in G$. יהי $0<\varepsilon<d(z,\partial G)$.

$G_\varepsilon:=G\setminus\overline{\mathcal{D}}(z,\varepsilon)$ $\qquad \Gamma_\varepsilon:=\partial G_\varepsilon=\Gamma-C_\varepsilon$ $\qquad C_\varepsilon=\partial\mathcal{D}(z,\varepsilon)$

$$\zeta\mapsto\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\in Hol(G_\varepsilon)\cap C(\overline{G_\varepsilon})$$

$$0\overset{\text{משפט Cauchy}}{=}\int\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\left(\int_\Gamma-\int_{C_\varepsilon}\right)\cdots$$

$$\Longleftarrow$$

$$\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{C_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\ldots \qquad \forall\varepsilon<d(z,\partial G).$$

מרציפות,

$$\ldots=\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)+f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=\ldots$$

$$\ldots=f(z)\underbrace{\int_{C_\varepsilon}\frac{d\zeta}{\zeta-z}}_{\substack{=2\pi i\\(\varepsilon\to0)}}+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=2\pi i f(z)+o(1)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}2\pi i f(z)$$

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\underset{\text{מרציפות}}{\le}\frac{\max\{|f(\zeta)-f(z)|\ \zeta\in C_\varepsilon\}}{\varepsilon}\cdot2\pi\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0$$

$\square$

בניסוח אחר,

$$z\in G,\ \Gamma=\partial G \qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

מסקנות 26.11.15

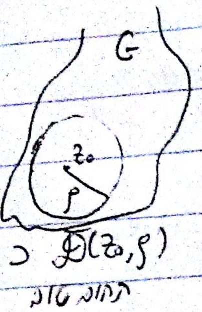
1. Mean-Value Property

יהי $f\in Hol(G)$, G תחום (לאו דווקא חסום), $z_0\in G$. אז

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta \quad , \quad \rho<d(z_0,\partial G)$$

הוכחה:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta \underset{\substack{\zeta=z_0+\rho e^{i\theta}\\ -\pi<\theta<\pi}}{\Uparrow}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\cdot i\rho e^{i\theta}\,d\theta = \dots$$



$$\dots=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

$\square$

2. עקרון המקסימום

יהי G תחום חסום. $f\in Hol(G)\cap C(\overline{G})$.

נניח שקיימת $z_0\in G$ כך ש- $|f(z_0)|=\max_{\overline{G}}|f|$

אז $f\equiv const$.

מגדיר $\forall z\in G \quad |f(z)| \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{אם f לא קבועה}}}{<} \max_{z\in \overline{G}}|f(z)|=\max_{\partial G}|f|$

הוכחה: $M:=f(z_0)$.

$$X_M=\{z\in G \mid |f(z)|=M\}$$

X_M קבוצה פתוחה! זו תוצאה של מסקנת Mean-Value-Property:

$|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z+\rho e^{i\theta})|\,d\theta$, $z\in X_M$, ρ מספיק קטן.

$\Longleftarrow$ $|f(z+\rho e^{i\theta})|=M$ מרציפות של f.

נתבונן ב- $G\setminus X_M =: \{z\in G \mid |f(z)|<M\}$ גם קבוצה פתוחה!

(מרציפות f).

לכן מהגדרה $X_M\in\{\emptyset,G\}$, כלומר:

אז ש- $X_M=\emptyset \Longleftrightarrow |f(G)|<M$

אז ש- $X_M=G \Longleftrightarrow |f|=M \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{(כי f אנליטית)}}}{\Longleftrightarrow} f\equiv const$. $\square$

נשים ♡ שהמשפט נכון כשהתחום חסום:

אם $G=\mathbb{C}_+=\{Im(z)>0\}$.

$$f(z)=e^{-iz}$$

$$|f(z)|=e^{-Re(iz)}=e^{+Im(z)}$$

$$f:G\to\mathbb{C}$$

$|f(\mathbb{R})|=1$ אבל f לא חסומה.

(יכולנו גם לקחת e^z ב- $\{Re(z)>0\}$.

Scanned by CamScanner

__משפט:__ 26.11.15

$f\in Hol(\mathbb{C}_+)\cap C(\overline{\mathbb{C}_+})$ חסומה. נניח ש־ $|f|\big|_{\mathbb{R}}\le M$

($\overline{\mathbb{C}_+}:=\mathbb{C}_+\cup\mathbb{R}$) אז $|f|\le M$ בכל $\mathbb{C}_+$.

__הוכחה:__ נגדיר $f_\varepsilon(z)=\frac{f(z)}{(z+i)^\varepsilon}$ $z\in\overline{\mathbb{C}_+}$.

נבחר ענף ב־ $\{Im(z)>-1\}$ $\longleftarrow$ $(z+i)^\varepsilon:=e^{\varepsilon \operatorname{Log}_2(z+i)}$

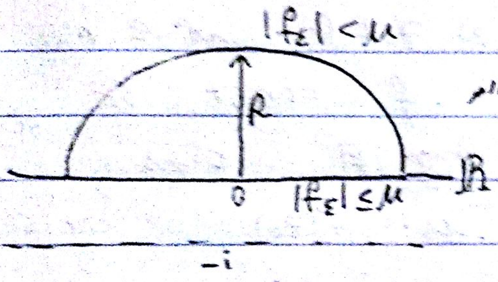
אזי $(z+i)^\varepsilon$ מוגדרת טוב ב־ $\overline{\mathbb{C}_+}$. $|(z+i)^\varepsilon|=|z+i|^\varepsilon\ge 1$

כי המרחק מ־$(-i)$ לפחות 1.

$$|f_\varepsilon(z)|\le\frac{|f(z)|}{|z+i|^\varepsilon}\le M$$

לכל $z\in\mathbb{R}$

בנוסף $|f_\varepsilon(z)|\xrightarrow[z\to\infty]{}0$ (אפילו במ"ש ב־ $\theta\in[0,\pi]$).



ניקח $z_0\in\mathbb{C}_+$. נבחר R המקיים

$|f_\varepsilon(z)|<M\ \ \forall z=Re^{i\theta}$ $0\le\theta\le\pi$

($R>|z_0|$).

לפי עקרון המקסימום $|f_\varepsilon(z_0)|\le M$.

$|f(z_0)|\le M|z_0+i|^\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}M$ לכן $|f(z_0)|\le M$ $\square$

השראה מעקרון Phragmén-Lindelöf.

__הוכחת E. Landau לעקרון המקסימום__

$f\in Hol(G)\cap C(\overline{G})$ כש־ G תחום "טוב". $\Gamma=\partial G$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

$$|f(z)|\le\cancel{\frac{M}{2\pi i}\max_\Gamma|f|\cdot L(\Gamma)}\ \frac{1}{2\pi}\frac{L(\Gamma)}{d(z,\Gamma)}\max_\Gamma|f|$$

ניקח $N\in\mathbb{N}$ גדול. $f^N\in Hol(G)\cap C(\overline{G})$.

$$|f^N(z)|\le\frac{1}{2\pi}\frac{L(\Gamma)}{d(z,\Gamma)}\left(\max_\Gamma|f|\right)^N$$

$$|f(z)|\le\left(\frac{1}{2\pi}\frac{L(\Gamma)}{d(z,\Gamma)}\right)^{1/N}\max_\Gamma|f|\xrightarrow[N\to\infty]{}\max_\Gamma|f|$$

__ת.ב.__ * G תחום (לא חסום), $f\in Hol(G)$, $f\in C(\overline{G})$, חסומה,

$|f|\le M$ בשפה ∂G. צ"ל $|f|\le M$ בכל G.