10/12/13

שיעור שלמה 9

משפט הרישום:

1) אם $G \subseteq \mathbb{C}$, $f \in H(G)$ ו- $a \in G$ כך ש- $f^{(n)}(a) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אז $f \equiv 0$.

הגדרה:

G תחום ו- $f \in H(G)$ ו- $f \not\equiv 0$. תהי $a \in G$ ו- $f(a) = 0$, אז המספר של a אל f: $m_f(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}$.

אם $f \not\equiv 0$ קיים נגזרת שאינה אפס, 0 אחת כלשהי הוא אפס ואז הוא יחיד אפס.

טענה: אם $m = m_f(a)$ ו- G תחום ו- $f \in H(G)$ ו- $a \in G$ ו- $f(a) = 0$ אז $f(z) = (z-a)^m g(z)$ כאשר $g \in H(G)$ ו- $g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$.

הוכחה:

בסביבת a מתקיים $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$; נגדיר

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m} & z \neq a \\ \frac{f^{(m)}}{m!} & z = a \end{cases}$$

מתקיים ש- g אנליטית ב- $G \setminus \{a\}$ וגם אנליטית בסביבה של a בכוח טיילור. לכן g אנליטית ב- G.

מסקנה:

תהי $f \in H(U_a)$ ו- a שורש של f מסדר m, אז לסביבה U_a קיים פונקציה אנליטית $f^{1/m}(z)$.

משפט ב:

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ו- $f \in H(G)$ וקיים $\{z_n\} \subseteq G$ ו- $z_n \to a$ ($a \in G$) ו- $f(z_n) = 0$ אז $f \equiv 0$.

הוכחה: נניח $f(z_n) = 0$ ו- $z_n \to a$ לכן $f(a) = 0$. נניח בשלילה ש- $f \not\equiv 0$. מתקיים $f(z) = (z-a)^m g(z)$ כאשר m המספר של a ביחס ל- f. ו- g הולומורפית ו- $g(a) \neq 0$. לכן g שונה מאפס בסביבה של a ולכן f שונה מאפס בסביבה של a בסתירה...

הערה: הנה כמה דוגמות פונקציות $f \in H(|z|<1)$ כך ש- (א) $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$ (ב) $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n^2}$

10/12/13

הרצאה שנייה

תרגילים קשים:

1) אם G תחום שאינו שווה ל $\{|z|<1\}$ אז $\{1\}$! יש $f\in H(G)$ וגם
כך שהפונקציה המפה הוא טור טיילור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$! $0\le a_n\in\mathbb{R}$ לכל n
אם רשום הרחבנו המאמר שקל מאוד מ1.

2) אם $f\in C^\infty[0,1]$ כך ש $C^n\cdot n! \ge \max_{[0,1]}|f^{(n)}|$ אזי קיים
תחום $G\supseteq[0,1]$ כך שניתן להרחיב לפונ' אנליטית מעל G.

3) נתון $f\in C^\infty[0,1]$! $f^{(n)}\ge 0$ ב $[0,1]$ אם f הלוגריתמית ב פונק
המקבל, קומר את f אפשר להרחיב לפונ' הלוגריתמית.

משפט וויירשטראס:

יהי G תחום, ! $f_n\in H(G)$ כך ש $f_n\to f$ במ"ש מקומית על G,
אזי f הלוגריתמית ! לכל $j\ge 0$ יש הנגזרת $f_n^{(j)}\to f^{(j)}$ במ"ש מקומית
ב G.

הוכחה: $f\in Hol(G)$ לפי מבחן מורה. morera. f רציפה כגבול במ"ש
של רציפות. מנאי morera מתקיים כי

$$0=\int_{\partial T} f_n \xrightarrow{\text{גבול ואינטגרל}} \int_{\partial T} f$$

משפט קושי

במ"ש מקומית טוב
במ"ש על כל הומוטופים
בתחום.

! משפט מורה מתקיים ! f
הלוגריתמית.

לכן $f\in H(G)$! $f\in C^\infty$.

יהי $z\in G$, אזי קיים $\delta>0$ כך ש $f_n\to f$ במ"ש בכדור δ סביב
z, כלומר $\max_{|\xi-z|<\delta}|f_n(\xi)-f(\xi)|\to 0$! משפט קושי לכל

$|w-z|<\delta/2$ מתקיים:

$$\underbrace{|f_n^{(j)}(w)-f^{(j)}(w)|}_{\text{פונ' הנגזרת הלוגריתמית}} \overset{\text{נוסחת קושי}}{\le} \frac{j!}{(\delta/2)^j}\max_{|\xi-z|=\delta/2}|f_n(\xi)-f(\xi)| \le \frac{j!}{(\delta/2)^j}\max_{|\xi-z|<\delta}|f_n(\xi)-f(\xi)| \to 0$$

! יש התכנסות במ"ש בעיגול $\delta/2$. ∎

10/12/13

המשך שיעור 9

נקודות סינגולריות:

נקודת סינגולריות מבודדת: $a\in\mathbb{C}$ נקרא נקודת סינגולריות מבודדת אם f הולומורפית בסביבה מנוקבת של a U_a^*. [$U_a^* \cup \{a\}$ is מעגל סביבה של a]

f לא מוגדרת ב a.

דוגמא: $f(z)=\frac{1}{z}$! $a=0$.

סיווג של נקודות סינגולריות:

1) נקודה סליקה: קיים וסופי $\lim_{z\to a} f(z)$

2) קוטב: $\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$

3) נקודה סינגולרית עיקרית: כל שאר המקרים. למשל $f(z)=e^{1/z}$

פונקציה Laurent

פונקציות:

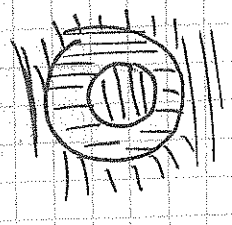
1) $f(z)=\frac{1}{z-a}$ כאשר $0\neq a\in\mathbb{C}$; אפשר נקודה בה הנ"ל הולומורפית לכן ניתן לפתח לטור לורן לכן:

$$f(z)=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\overset{\text{הנדסי}}{=}-\sum\frac{z^n}{a^{n+1}}\ ;\ |z|<|a|$$

בנוסף:

$$f(z)=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-a/z}=\sum\frac{a^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n-1}z^n\longrightarrow(|z|>|a|)$$

לכן אפשר לחשוב הפוך גם מצד הטבעת בחוץ, אבל בת מגה לא אידיאלי.



2) $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

לכן בתוך הדיסקה 1 נקבל מסדרה הנדסית בפיסוק שזה מכל את המעגל 1, מדיסקה 2:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n \overset{\text{אידיאלי}}{=}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n z^n\ :\ \begin{cases}-1/2^{n+1} & n\geq 0\\ 1 & n<0\end{cases}$$

המקדמים

כאשר $1<|z|<2$

ובמקרה: כאשר $|z|>2$ נקבל שוב מסדרה הנדסית.

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{-1}(2^{-n-1}-1)z^n$$

10/12/13

הרצאה שיעור 9

הגדרה: טור Laurent סביב נקודה z_0 נקרא טור מהצורה

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\sum_+} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{\sum_-}$$

(*) נניח כי $z_0 = 0$

אז $R_- = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_{-n}|^{1/n}$ ← הגבול העליון ויש התכנסות! $\sum_-$ $|z|>|R_-|$

$\frac{1}{R_+} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}$ ← הגבול העליון ויש התכנסות! $\sum_+$ $|z|<|R_+|$

כי הטור השלילי בה פשוט שווה $\frac{1}{z}$,

לכן הטור כולו מתכנס ב $R_- < |z| < R_+$, ובתוכה הוא יש התכנסות במ"ש ובתוכה מתקיים כי כל גזרה מהגבול בנפרד מתכנס בתוכה ובמ"ש מקומית.

לכן מתקבל ווירשטרס ונקבל כי אם נסמן $f(z)$ לגבול הטור, אז הצגת הלורן בטבעת.

טענה: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi$ לכל $R_- < \rho < R_+$.

הוכחה:

$$\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \xi^{k-n-1}$$

(יש התכנסות במ"ש בטבעת לכן אפשר לחלף אבל לא נוכיח)

$$\int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \xi^{k-n-1} a_k = a_n \cdot 2\pi i$$

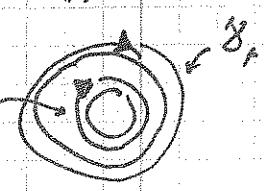
משפט Laurent

תהי $f \in H(R_1<|z|<R_2)$ אז $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$! $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi$

הוכחה:

נתון $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$ ונגדיר $G = \{\rho_1 < |z| < \rho_2\}$, לפי נוסחת קושי

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\Big(\underbrace{\int_{\gamma_+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}_{f_+(z)} - \underbrace{\int_{\gamma_-} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}_{f_-(z)}\Big) =$$



כאן התכנס!

$$f_+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{|\xi|=\rho_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi\Big) z^n$$

כמו כן:

10/12/13 המשך שיעור 9

בנוסף מתקיים:

$$f_-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \int_{\gamma_-} f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n z^{-n-1}\,d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho_1} f(\xi)\xi^n\,d\xi\right)z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho_1}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi\right)z^n$$

לכן קיבלנו שהטורים הם אינטגרלים, אלא כל פעם על רדיוס אחר, אבל מאחר הוא אינו משנה לפרוס של האינטגרל כי האינטגרל על חלקה הוא אפס, לכן הם שווים.

10/12/13 תרגיל לבית 9

תרגיל: אם f שאינה $\operatorname{Re} f$ חסומה מלמעלה אז f קבועה.

פתרון: נתבונן ב $e^{f(z)} = e^{\operatorname{Re} f + i\operatorname{Im} f}$. ע"פ הנתון מתקיים $|e^f| = |e^{\operatorname{Re} f}|$ לכן ע"פ מאלי ליוביל e^f קבועה ומכאן f קבועה. [ב הרצאה ובשיעור...]

תרגיל: האם קיים פונ' f הולומורפית ב $D = \{z \mid |z|<1\}$ ורציפה ב $\bar{D}$ כך ש $f(z) = \bar{z}$ על ∂D.

פתרון: לא קיימת פונ' כזאת. נניח בשלילה שכן, אם $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ כי f הולומורפית. וגם בתוך D, ולכן $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi - 0)^{n+1}}\,d\xi$ מנוסחת קושי.

לכן $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar{\xi}}{\xi^{n+1}}\,d\xi$

לכן: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-it}}{e^{i(n+1)t}}\,ie^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}$ (פרמטריזציה)

לכן עבור $n=0$ נקבל אפס לכן $f(z)=0$ וגם לא מקיים הפונקציה.

תרגיל:

נתון $f \in H(D)\cap C(\bar{D})$ כך ש $|f| \le 3$ עבור $|z|=1$, $\operatorname{Re} z \le 0$

! $|f| \le 2$ עבור $|z|=1$! $\operatorname{Re} z < 0$.

הוכיחו כי $|f(0)| \le 2^{\frac{1}{2}}$. הוכיחו כי $|f(0)| \le \sqrt{6}$

פתרון: על פי אלמן קושי $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt \le \dots 2^{\frac{1}{2}}$

נגדיר פונ' חדשה $g(z) = f(z)\cdot f(-z)$; נשים לב כי $|g(0)| = |f(0)|^2$

לכן ע"פ עקרון המקסימום $|g(0)| \le \max_{|z|=1}|g(z)| \le \sqrt{6}$

כי אם בפ' ולפנים, אחרת שונה.

10/12/13

הרצאה 9

טענה: f שאינה ! f מוגדרת בקטע $(-\varepsilon,\varepsilon)$, הנמצא בתחום $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ z ובפרט f מוגדרת על $\mathbb{R}$.

הוכחה: נזכר שהראנו כי כל הנקודות של פונ' אנליטית f מקיים אפס הם מוגדרים, ושם לכל:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ונסמן $\alpha_n = Re(a_n)$

$\beta_n = Im(a_n)$.

נקבל כי $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$; $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ שאם (כי $|\alpha_n|\le|a_n|$) לכן הפיסי הנתונים לא קיים יש מאחר עבור $\{a_n\}$ ולא כך אינטלי..

מהנתון עבור $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

$$\mathbb{R}\ni f(x)=\sum a_n z^n = \sum \alpha_n z^n + i\sum \beta_n z^n \in \mathbb{R}$$

לכן לכל $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ מקיים $0=\sum\beta_n x^n$ לכן מאחר הרישום נקבל $\beta_n=0$ לכל n לכן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ לכן $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$

הגדרה: תחום פונ' f מתחום D כך ש $f^3, f^2\in H(D)$ הוכחנו כי $f\in H(D)$

הסבר: ושם לא נאמר f לא מאפס בשום מקום אלא $f=\frac{f^3}{f^2}$ הלוגריתם.

כמו כן בכל α כך ש $f(\alpha)=0$ נקבל ש f הלוגריתם ב α מונה של הלוגריתם ב α, בהגדרה.

אם $f(\alpha)=0 \longrightarrow f^2(\alpha)=0 \longrightarrow f^3(\alpha)=0$ לכן אם α אינו 0 מתנאים אלה מאחר הרישום $f^3=0=f^2=0$ לכן $f=0$ ובפרט הלוגריתם.

לכן נניח כי α אפס מתנאים. לחזור בהגדרה של α, f אינה מתאפסת.

ע"פ שלב: $f^2(z)=(z-\alpha)^k\cdot g(z)$ בהגדרה α נתון לרשום כאשר g לא הלוגריתם לא מאפס ב α ובהגדרה שלה.

באותה דרך $f^3(z)=(z-\alpha)^j g(z)$ בהגדרה של α.

עלינו לבדוק $j\ge k$ ובכך (סיים מנקודה)

נניח בשלילה ש $j<k$ אל בהגדרה α מקיים

$$\frac{(z-\alpha)^j g_2(z)}{(z-\alpha)^k g_1(z)}=f(z)$$

ואם $j<k$ נקבל כי עבור f הלוגריתם ∞ בהגדרה α, לכן עבור f^2 הלוגריתם ∞ בהגדרה α וזה סתירה.

10/12/13

המשך תרגיל 9

תרגיל: תהי $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$, ויהיה כי $f(e^{i\theta})=0$ עבור $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

הראו כי $f\equiv 0$.

פתרון: נגדיר $g(z)=f(z)\cdot f(-z)$. אז מתקיים על כל שתיים $g\equiv 0$.

אם עלה נקבל שתיים $g(z)\equiv 0$ על D.

אם לכל $z\in D$, $f(z)=0$ או $f(-z)=0$, אם 0 נק' הצטברות של אפסים

אזי $f\equiv 0$ קבוע.

12/12/13

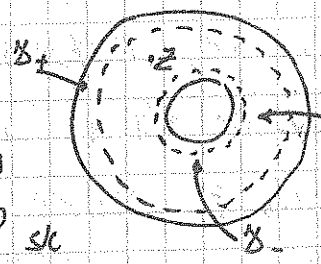
שיעור שני 9

הגדרה: משפט Laurent:

תהי $f\in Hol(R_1<|z|<R_2)$ אז $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n$ ושמתקיים $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi$

$\boxed{R_1<\rho<R_2}$

הוכחה:



$R_1<\rho_1<\rho_2<R_2$

ונבחר $\rho_1<|z|<\rho_2$

$G=\{z\mid \rho_1<|z|<\rho_2\}$

אז לפי נוסחת קושי $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$

לכן:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\Big(\underbrace{\int_{\gamma_+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi}_{f_+}-\underbrace{\int_{\gamma_-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi}_{f_-}\Big)$$

אינטגרל קושי לפי פונ' הלוואנרטית של z שאינו על המסלול ...

נחזור לדבר:

$f_+\in H(|z|<\rho_2)$

$f_-\in H(|z|>\rho_1)$

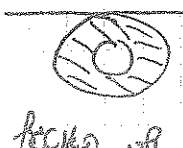
כל הפונקציות הלוואנרטיות ...

כאשר כן שמקיים:

$$f_+(z)\overset{\text{בהגדרה}}{=}\int_{|\xi|=\rho_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\overset{\text{הנחה}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho_2}f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\xi^{n+1}}d\xi\overset{\text{כי זו התכנסות}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho_2}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\Big)z^n$$

ההתכנסות הזו במ"ש כי f רציפה לכן חסומה ולכן טור M מבן $|z|<\rho_1$. לפי הטור הקבוע כי אותו מעל המעגל, לאחר

$$f_-(z)\overset{\text{לפי הגדרה}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{f(\xi)}{z-\xi}d\xi\overset{\text{הנחה}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n z^{-n-1}d\xi=$$



$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}f(\xi)\xi^n d\xi\Big)z^{-n-1}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi\Big)z^n$$

אבל בגלל שלוי ה ρ שרירותי, כי לכל ρ_1,ρ_2 אז f הלוואנרטית בטבעת לכן הטור מתכנס

12/12/13

המשך שיעור 9

מסקנה: אם $M \geq \max_{|\xi|=\rho} f(\xi)$ אזי $|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$

פונ' שסה"כ של f איקבל.

משפט Rieman:

אם U_a^* סביבה מנוקבת של a ! $f \in H(U_a^*)$ כך ש f חסומה בפסוק מנוקב סביב a, אז a נק' סליקה ! אם נשים את f לתוך מוגדרת על $U_a = U_a^* \cup \{a\}$ אזי נקבל פונ' הולומורפית ב U_a.

הוכחה:

אפשר לשים את f לטור Laurent בתוך פסוק מנוקב כלשהו סביב a, כך שלפסוק זה f חסומה ע"י M:

אז מתחסם לכל $n \geq 1$ $|a_{-n}| \leq M\rho^n$ ובפרט לכל ρ

כלשהו, לכן כל המקדמים השלילים מאפסים. לכן הטור Laurent הוא פונ' טור טיילור, לכן אם נגדיר את f בנקודה a להיות הגבול של הטור טיילור אז הוא הולומורפי ב U_a כטור טיילור, כי f שווה בדיוק לטור טיילור בכל הפסוק.

מסקנה: מספיק לדרוש $\lim_{r\to 0} r\max_{|\xi|=r}|f(\xi)|=0$

הוכחה: נניח כי $f \in H(U_a^*)$! a קוטב של f

אז a נק' סליקה של $\frac{1}{f}$!, "$\frac{1}{f}(a)=0$"

ולכן $\frac{1}{f}$ ניתן להציג הולומורפית ב U_a לכן $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m g(z)$ כאשר $g(a) \neq 0$!

לכן $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$ כאשר $h(z) = \frac{1}{g(z)}$! $h(a) \neq 0, \infty$.

ומשמר m לפי הדרגה של הקוטב של a ב f.

מסקנה: a נק' סליקה $\longleftrightarrow$ בפיתוח לורן של f סביב a אין חזקות שליליות.

a קוטב של f $\longleftrightarrow$ בפיתוח לורן של f סביב a יש מספר סופי של מקדמים שונים מאפס לחזקות שליליות

a נק' סינגולרית עקרתית $\longleftrightarrow$ יש אינסוף מקדמים שונים מאפס, בפיתוח לורן, לחזקות השליליות.

17/10/13

משפט Casorati-Wierstrass: אם a נק' סינגולרית עיקרית של f אז לכל $w\in\mathbb{C}$ קיימת סדרת z_n בתחום התכנסות של f כך $a=\lim z_n$! $f(z_n)\to w$

הוכחה:

נניח בשלילה, אז קיים $w\in\mathbb{C}$! $\delta>0$ כך ש $|f(z)-w|$ מוגבל בסביבה z ! a. נגדיר $g(z)=\frac{1}{f(z)-w}$! לכן g מוגדרת בסביבה a והיא הולומורפית.

לכן לפי הנתון a נקודה סינגולרית של g, ואז $f(z)=w+\frac{1}{g(z)}$

שני מקרים:

$g(a)\neq 0 \longleftarrow$ a סינגולרית עבור f בהכרח.

$g(a)=0 \longleftarrow$ a קוטב של f בהכרח.

לכן ההנחה בשלילה הינה שגויה.

אבחנה חשובה: [משפט פיקרד] $f(B_\varepsilon(a))=\mathbb{C}$ או $\mathbb{C}\setminus\{w_0\}$ $\longleftarrow$ $\boxed{\text{בהמשך של ההפרה הסביבה מצב לשלמה סביב } a}$

מקרה שלישי $z_0=\infty$:

תהי $f(z)\in H(|z|>R)$ כלומר מוגדרת לשלמה [סביבה של אינסוף]

נגדיר $F(\xi)=f(\frac{1}{\xi})$ $\longrightarrow$ [חלפה מעניינת]

ונקבל כי F הולומורפית ב $0<|\xi|<\frac{1}{R}$

הגדרה: ∞ נקרא סינגולרית של f (לא אינטגרלי ב ∞) אם F אינטגרלי באפס, כלומר יש סינגולרית באפס.

∞ קוטב של f אם 0 הינו נק' קוטב של F

∞ הינו נק' סינגולרית עיקרית של f אם ∞ הינו נק' סינגולרית עיקרית של F.

מסקנה:

1) אם $f\in Hol(\hat{\mathbb{C}})$ אז $f=const$ [מסקנה ממשפט קיובץ'] (כלומר אינטגרלי ונקודה סינגולרית שלה...)

2) אם $f\in Hol(a)$! ∞ הינו קוטב של f אז f הינו פולינום.

נגדיר $F(\xi)=f(\frac{1}{\xi})$, אינטגרלי בכל המישור חוץ מאפס ! אפס הינו קוטב שלה.

לכן $F(\xi)=\sum_{n=-m}^{\infty}a_n\xi^n$ $\longrightarrow$ לכן ! לכן $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m}a_nz^n$ מצד שני

f הולומורפית ב $\mathbb{C}$ לכן ניתן לכתוב לאור טיילור, $\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n$, לכן לפי **הכרחת מנים**

17/13/12

המשך שיעור 10

לכן הטור הוא $\sum_{n=0}^{m} d_n z^n$ לכן סופי!

$f\in Hol(\hat{G}\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$! $a_1,\dots,a_n$ קבועים $\longleftrightarrow$ f רציונלית.

הגדרה: שארית.

תהי f הולומורפית ב U_a^* כאשר U_a^* סביבה מנוקבת של a אז נגדיר $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,dz$ ובה לאמצעות המקדם ב $(z-a)^{-1}$ בטור לורן של f סביב a.

(2.0 ✓) משפט קושי: יהי $G\subseteq\mathbb{C}$ תחום חסום כך ש $G=\Gamma_1\cup\dots\cup\Gamma_k$ יקיים הן מקומות ברור, ועל Γ_j מקומות סגורה ותהי G' ורשלה לתחסין. יהיו $a_1,\dots,a_N\in G$ נק' שונות ותהיינה $f\in Hol(G\setminus\{a_1,\dots,a_N\})$! רציפה פה הנלפה לתוך $f\in C(\overline{G}\setminus\{a_1,\dots,a_N\})$ אז

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N}\operatorname{res}_{a_j} f$$

הוכחה: נצא מ G עיגולים סגורים קטנים מספיק סביב הנקודות הבעייתיות. משפט קושי כמו האינטגרל על המחוץ פחות הפנים יהיה אפס כי f הולומורפית. לכן האינטגרל המאחד הוא אפס ומזה האינטגרלים על שני הפנים שמוסיפים שבה הטענה...

תזכורת שארית:

1) קוטב פשוט: תהי $f=\frac{\varphi}{\psi}$ כאשר φ,ψ הולומורפיות בסביבת a. נניח כי a שורש של ψ מרובה 1, כלומר $\psi'(a)\neq 0$ (כמו קודם $\varphi(a)\neq 0$)

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

אז: $\boxed{\text{השארית בקוטב נתן ע"י המנה מחוצה של הנגזרת המכנה שבה הנקודה ה-1- של הטור לורן}}$

כי טור לורן של f מתחיל מחזקה 1-, ומכן גוזר נותן שלילי.

כי $\psi(z)=(z-a)h(z)$! $h(a)\neq 0$ לכן $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{(z-a)}\cdot\frac{\varphi(z)}{h(z)}$ הולומורפי

לכן הטור לורן יהיה חזקה 1- לא יותר

17/12/13

הרצאה שיעור 10

הרצאה חישוב שאריות:

2) תהא מספר m לומר $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$! φ הלומורפי בסביבת a.

אז $$res_a f=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

דוגמאות:

⊖ $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ אז $$res_1 f=\left.\frac{z}{(z-2)^2}\right|_{z=1}=1$$

$$res_2 f=\left.\left(1+\frac{1}{z-1}\right)'\right|_{z=2}=-1$$

⊖ $f(z)=\tan z$,

השורשים של $\tan$ הם כ $\frac{\pi}{2}+\pi k$ אז

$$res_{\frac{\pi}{2}+\pi k} f=\left.\left[\frac{\sin z}{\cos' z}\right]\right|_{z=\frac{\pi}{2}+\pi k}=-1$$

טענה: אם g הלומורפי בסביבת a אז $res_a \frac{g'}{g}=m_a(g)$

הוכחה: אם $m=m_a(g)$ אז $g(z)=h(z)\cdot(z-a)^m$ כאשר $h(a)\neq 0$ אז

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{m}{(z-a)}+\frac{h'(z)}{h(z)}$$

הלומורפי בסביבת a

זו הנחה, כי זה בפירוש יהיה הקטב של z^{-1} בטור לורן.

$$\boxed{\frac{(fg)'}{fg}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}}$$

לפי פיו f,g גזירים

טענה: אם $g\in H(\mathbb{C})$! $f(z)=\frac{g(z)}{1+z^n}$! אז $w^n=-1$

$$res_w f=\frac{g(w)}{nw^{n-1}}=-\frac{w}{n}g(w)$$

[הערה: כי בנוסף אינטגרל על השפה של אינפי, ולכן על המסלול הלומורפי בתוך...]

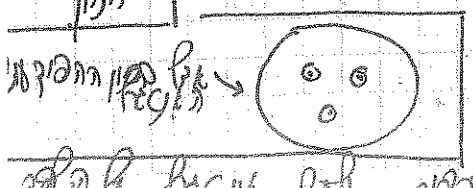
הגדרה: נתון $f\in Hol(|z|>R)$ אז $res_\infty f=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} f(z)dz$; $res_\infty f=C_{-1}(f)$ ולכל $\rho>R$.

נגדיר $F(\xi)=f(1/\xi)$ אז $res_\infty f=-res_0\left(\frac{F(\xi)}{\xi^2}\right)$

[נעבור מאור לאור נבדוק $\frac{1}{\xi}$, ולכן בדקתי כפי לקחתי חוק הנגזרת]

משפט:

נתון $f\in Hol(\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_N\})$ אז $\sum_{j=1}^{N} res_{a_j} f+res_\infty=0$.



הערה: יש כאן סיפור של נקודה לא אנליטית. ולכן בפירוש לוקחים אינטגרל על השפה

17/12/13 פתרון שלוש 10

קיי מאוד:

1) $a_1,\dots,a_N\in\mathbb{C}$; $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}$! $R>\max(|a_j|,|b_j|)$

לשים בינתיים

$$\int_{|z|=R}\frac{(z-a_1)\dots(z-a_n)}{(z-b_1)\dots(z-b_n)}dz=\int_{|\xi|=\frac{1}{R}}\frac{(1-a_1\xi)\dots(1-a_N\xi)}{(1-b_1\xi)\dots(1-b_n\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi^2}$$

הפוך בגלל הכיוון שהוא הפוך

שאת הנגזרת

נשים לב:

$$(1-a_1\xi)\cdot\dots\cdot(1-a_n\xi)\cdot(1-b_1\xi)^{-1}\cdot\dots\cdot(1-b_n\xi)^{-1}=(1-a_1\xi)\dots(1-a_n\xi)\cdot(1+b_1\xi+(b_1\xi)^2+\dots)\dots(1+b_n\xi+\dots)$$

לכן המקדם של ξ בביטוי הוא

$$\underbrace{-a_1-a_2\dots-a_n+b_1+b_1\dots+b_n}_{=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{j=1}^{n}a_j}$$

והשאר לכן תרום המקדם הכי לכן האינטגרל הוא המקדם (כפל זה)

חישוב שלנו אחרון

$$\int_{|z|=R}\frac{(z-a_1)\dots(z-a_n)}{(z-b_1)\dots(z-b_n)}dz=2\pi i\left(\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{j=1}^{n}a_j\right)$$

2) $f(z)=\tan\left(\frac{\pi}{2}z\right)$. כל הקוטבים ב $2\mathbb{Z}+1$ לאור אי-זוגיות, לכן רשום המקדם מגיע אם הוא 1 [בנוסף כן 1, -1, ...]

לכן:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$$

[לכן כל אי-זוגיים מקדמים אי-זוגיים]

מרוכז ב 1.

רעיון: $\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{4}{\pi}$

הוכחה:

$$\operatorname{res}_{-1}f=\operatorname{res}_1 f=-\frac{2}{\pi}$$

לאור 1, -1 הם הקטבים פשוטים.

$$f(z)=-\frac{4}{\pi}\frac{z}{1-z^2}=f(z)+\frac{2}{\pi(z-1)}+\frac{2}{\pi(z+1)}=\varphi(z)$$

(שיפור)

! φ הולומורפית בעיגול ברדיוס 3. לכן:

$$f(z)=\frac{4}{\pi}\frac{z}{1-z^2}+\varphi(z)$$

כלומר

סביב סביבה של $z=1$ נקבל

$$f(z)=-\frac{z}{\pi(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n\longrightarrow\underbrace{f(z)+\frac{z}{\pi(z-1)}}_{\text{הולומורפית בסביבת 1 וכולל סביב סביבה -1 !}}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$$

שוב לפי הולומורפי לכן הולומורפי

$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ ברדיוס 3. לכן:

כי הוא הולומורפי ברדיוס 3.

קיי מאוד:
מה לגבי כפול
הקבב ב 1, -1
ונקבל תוצאה
בסוף שלנו
ושם לקבל
הולומורפי

17/12/13

המשך שיעור 10

דוגמא: $f(z)=\frac{4}{\pi}\frac{z}{1-z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$

ובמקדמים של $b_n \to 0$ כי רציפה בהתבוננות הנ"ל, לכן $\sqrt[n]{b_n}\to\frac{1}{3}$. לכן סכום המקדמים שלה $\frac{4}{\pi}$ כפרש.

17/12/13

תרגול שבוע 10

תרגיל: תהי f הולומורפית ב $G\setminus\{0\}$. ותהי $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$! ולכל $r>0$ מתקיים $r^{\alpha}\le\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|d\varphi$. צריך להוכיח כי $f\equiv 0$ ב $G\setminus\{0\}$.

פתרון:

מהנתון $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n$ טור לורן מצומצם. בנוסף לכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים

נוסחת קושי

לכל $r>0$ מתקיים $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw$! לכן נקבל כי

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=r}\left|\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right|dw\underset{\text{פרמטריזציה}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(re^{i\varphi})}{r^{n+1}}\cdot r\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{r^n}f(e^{i\varphi})\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi r^n}\cdot r^{\alpha}=\frac{1}{2\pi}r^{\alpha-n}\longleftarrow$$

לכל r...
אם $\alpha-n>0$ נשאף לאפס...
אם $\alpha-n<0$ נשאף לאינסוף...
$\alpha\neq n \leftarrow \alpha\in\mathbb{Z}$

לכן $a_n=0$ לכל $n\in\mathbb{Z}$! לכן $f\equiv 0$ כנדרש.

תרגיל: נתונה $f(z)=\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right)^{\frac{1}{2}}$; הוכח כי לא ניתן לשכן את f לטור לורן ב $0<|z|<1$ ומצאו פונקציה הולומורפית בטבעת $1<|z|<2$ כך ש $\operatorname{Im} f(\frac{3}{2})>0$ (הכוונה את הענף)

פתרון: ⊗ נניח בשלילה שיש פונקציה הולומורפית כנדרש. עבור $1<|z|$ מתקיים $|f(z)|=\left(\frac{|z^{\frac{1}{2}}|}{|z-1|^{\frac{1}{2}}|z-2|^{\frac{1}{2}}}\right)\le\frac{|z|^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}}$ לכן f חסומה בסביבת אפס ! לכן אפס נקודה סליקה, לכן ניתן את f לשרוך הולומורפית באפס, לכן מתקיים $f(0)=0$. נקבל שקיים לכן הפונקציה טיילור, לכן f הולומורפית!

נרשום $g(z)=f^2(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$, וכך נכון בסביבת אפס אבל $g'(0)=\frac{1}{2}$ ומצד שני $(f^2)'(0)=2f(0)f'(0)=0$ בסתירה.

הערה: ⊙ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{(0-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}=f(z)=\left(\frac{1}{(z-2)(1-\frac{1}{z})}\right)^{\frac{1}{2}}$

17/12/13

המשך הרצאה 10

המשך הסבר:

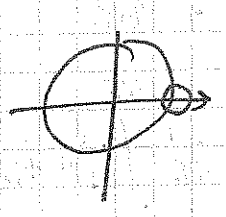
$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{1}{z}\right)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{z}{2}\right)^k$$

משתמשים את $(1+\omega)^\alpha$
! $1<\lvert z\rvert<2$
טורי $\lvert\frac{1}{z}\rvert<1$

כדאי גם לציין רק-עתי, אבל בגלל לאור את $\sqrt{2}$ כפי לתפקיד את בלתי-עתי. הקלנו לטענה $\operatorname{Im} f(\frac{3}{2})>0$ הקן נפרוש $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{i}{\sqrt{2}}$ כי כל השאר מאשר...

הרצל:

תהי $f\in Hol(G)$ כאשר G מוכל את הסיסקן המיחיד D והנקודה 1. כמו כן יהי $\sum a_n z^n$ הפיתוח טיילור של f בנקודה, ונניח $a_n\geq 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי לטור טיילור הזה רדיוס התכנסות גדול מאשר 1.



סימון: בכדור שהרדיוס הוא לפחות 1 כי זה הדיסקן מוכל.

פתרון א: מספיק להראות שיש נקודה כלשהי מחוץ לרדיוס 1 שבה הטור מתכנס.

פתרון ב: בדרך סתום אחת היא להראות שקיים ε כך שכל נקודה בלי הנגזרות בכדור ε וגם נקבל הנגזרות בכדור $\varepsilon+1$ סביב אפס וגם הפיתוח טיילור משקן עוד.

הוכחה: נתון כי f אנליטית בסביבת 1. נתבונן בפיתוח טיילור שלה ב-1: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-1)^n$ ונניח כי רדיוס ההתכנסות הוא $\varepsilon>0$. ניקח נקודה z' כך $|z'|=1$ וגם כך $z'\in B(1,\varepsilon)$ אז הפונ' f הולומורפית בסביבת z' ונתבונן בפיתוח טיילור שלה ב-z' $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z')}{n!}(z-z')^n$ ונראה כי רדיוס ההתכנסות שלו גדול מ-ε. לשם כך מספיק להראות ש $\left|\frac{f^{(n)}(z')}{n!}\right|\leq b_n$ [$b_n\geq 0$ לכל n] כי $b_n=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$

$$\lim\sum_{k=0}^{\infty}(a_k z^k)^{(n)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}\\ |x|<1}} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(1)$$

אזרח אזרח

לכן משום ש $a_n\geq 0$ לכן גם הנגזרת לכן $b_n\geq 0$ לכן

נשים לב:

$$\left|f^{(n)}(z')\right| = \lim_{\substack{z\to z'\\ |z|<1}}\left|f^{(n)}(z)\right| = \lim_{\substack{z\to z'\\ |z|<1}}\left|\sum_{k=n}^{\infty}(a_n z^k)^{(n)}\right| \leq$$

הנגזרת הולומורפית

$$\leq \lim_{\substack{z\to z'\\ |z|<1}}\sum_{k=n}^{\infty}\left|(a_n z^k)^{(n)}\right| \overset{\text{מאיפה}}{=} \lim_{\substack{z\to z'\\ |z|<1}}\sum_{k=n}^{\infty}(a_k x^k)^{(n)} = b_n$$

$z\in\mathbb{R}$

לכן הגבול מתכנס

19/12/13

שאר שאלות

אינטגרלים:

1) R-פונ' רציונלית כלשהי.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \leftarrow$$

אינטגרל של פונ' רציונלית לכן מעל רחב הנקודות לפי המשפט הבסיסי.

$\frac{1}{z} = \bar{z}$ כי מעגל.

$z = \cos\theta + i\sin\theta$

דוגמא: $(a>1)$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\, dz = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

באשר: $\alpha = -a+\sqrt{a^2-1}$; $\beta = -a-\sqrt{a^2-1}$ שורשים מרוכבים ! אחד לעצמו...

לכן:

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)} = 4\pi \frac{1}{\alpha-\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

לפי שאריות כי רק פול...

$$\left.\begin{array}{ll} 2\pi i \sum\limits_{\substack{a \text{ הנקודות} \\ R(z) \text{ של} \\ 0<\operatorname{Im} a}} \operatorname{res}_a\left[R(z)e^{i\lambda z}\right] & \lambda \geq 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\substack{a \text{ הנקודות} \\ R(z) \text{ של} \\ 0>\operatorname{Im}(a)}} \operatorname{res}_a\left[R(z)e^{i\lambda z}\right] & \lambda < 0 \end{array}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\lambda x}\, dx$$

לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ עבור R-פונ' רציונלית מוגדרת היטב על $\mathbb{R}$

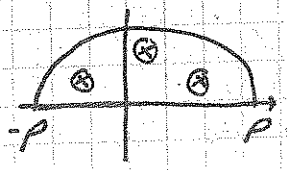
ומתקיים $R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ $z\to\infty$ או $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ $z\to\infty$ כש $\lambda = 0$

הוכחה:

לגבי $\lambda > 0$:

$$0 \xleftarrow{\rho\to\infty} \left|\int_{\substack{|z|=\rho \\ \operatorname{Im} z>0}} R(z)e^{i\lambda z}\, dz\right| \leftarrow$$

המשך הוכחה:



כלומר אינטגרל על חלקה הכי הרבה סכום השאריות כאלו הנמצאות מעל הציר הממשי לאינטגרל על הציר הממשי כי באינטגרל על חצי המעגל הוא גדל.

לגבי λ שלילי נהיה מצב משוגע...

19/12/13

המשך שיעור 10

פונ' זוגית [ניחוש]

דוגמא:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}\right)\frac{dx}{x^2+\beta^2}$$

נניח כי $\alpha>0$! $\beta\in\mathbb{R}$

ונשתמש בנוסחת שפוארז = [נפח לולר אינטגרלים]

$$\frac{1}{4}\cdot 2\pi i\left[\frac{e^{i\alpha(i\beta)}}{2i\beta}-\frac{e^{i\alpha(-i\beta)}}{-2i\beta}\right]=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\alpha\beta}$$

כי הנוסחה: $x^2+\beta^2=(x-i\beta)(x+i\beta)$

מסקנה:

$$\underbrace{e^{-|\alpha|}}_{\text{זה פונ' זוגית ב-}\alpha\ldots}=\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\,dx}_{\text{פונ' זוגית ב-}\alpha\ldots}$$

נמצאת שקרוב

כי הנגזרת זה מ"ל.

בגלל הבעיות נעלם מה היחידה שאפשר לשנות

בגלל שלא יהיה אינטגרלים בהשאלה כמה מישור לא ולא חבר מישור מיוחן.

דוגמא:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$$

כמו שזה באינטגרל אבל בגלל הבעיות מקום בהמשך...

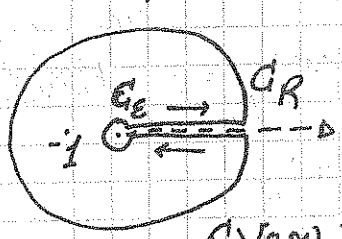
$$\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{1+x}\,dx=I(\alpha)\quad (3)$$

כאשר $\alpha\in\mathbb{C}$! $-1<\mathrm{Re}\,\alpha<0$

באינטגרל $x^{-\mathrm{Re}\,\alpha-1}$ כך כמו

ובמקום כמו $x^{\mathrm{Re}\,\alpha}$

לכן נוכל לשנות מקום...



נחתך בתחום.

נקח ענף של z^α כך שנמצא ב $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

לכן.

$$\int_{C_\varepsilon}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0\qquad\int_{C_R}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

[נמצא על עקרונות של פונ' אינטגרלית]

בגלל בעיות אין מעניין הפתרון

אותה הקבר שלא מאמן לא שם הקבר הנמצא הנמצא

בגלל האינטגרלים שעברו, לכן!

$$2\pi i e^{i\pi\alpha}=2\pi i\left[\mathrm{res}_{-1}\left[\frac{z^\alpha}{1+z}\right]\right]=I(\alpha)\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)$$

$$\mathrm{res}_{-1}\left[\frac{z^\alpha}{1+z}\right]=\left.\frac{e^{\alpha\ln z}}{1}\right|_{z=-1}=\frac{e^{\alpha\ln(-1)}}{1}=e^{\alpha i\pi}$$

הנגזרת של הנגזרת בנקודה -1 אבל הנגזרת של שני הנגזרות בכל אפס, לכן שם הנגזרת של הנגזר הנמצא בנקודה הנמצאת

הנגזרת בנקודה נמצאת ונמצאת לנגזר הנמצא שנמצא

$I(\alpha)-I(\alpha)e^{2\pi i\alpha}$

הנגזרת בנקודה הנמצא נמצאת הנמצא הנמצא

הנגזרת בנקודה הנמצא

לכן!

$$I(\alpha)=\frac{-\pi}{\sin\pi\alpha}$$

נמצאת.

(3) אפשר לשנות שאנחנו $x=e^{\xi}$ כאשר $-\infty<\xi<\infty$ ולקבל בדיוק בדיוק בדיוק בדיוק

24/12/13

נגזרות חלקיות

$3 \Leftarrow 2 \Leftarrow 1$

נתונים:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad (1)$$

$$\pi\cot \pi z = \lim_{m\to\infty} \sum_{|n|\le m} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2} \quad (2)$$

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad (3)$$

עכשיו:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2}\right] = \frac{\pi^2}{6}$$

עמוק מעל הלוגיקה של הקורס הנוכחי

כי:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{\pi^2}{\pi z + \pi^3 z^3/6 + \dots} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\pi^2 z^2}{6}+\dots} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{\pi^2 z^2}{6}+\dots\right)$$

$\frac{\pi^2}{3}+\dots$ $O(z^2)$

לכן את ונחר $\frac{1}{z^2}$ נקבל

בכיתה

בהתחלה מ"ל בסביבה של אפס

בכיתה: מצא את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

יפה מאוד $\sum\frac{1}{n^k}$ לכל k אילו מאוד ואילו מאוד מאוד לא יפה לגום...

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ פונ' רימן. הלא רימן.

בחזרה אל 1:

נגדיר:

$$g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$$

בנקודה שלם $k\in\mathbb{Z}$ זו נקודה סלוקה.

$$\lim_{z\to k}\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{(z-k)^2} =$$

כל עוד אין לנקודה כזו כל שאר הגורמים בעלי מקסימום בסביבת k.

$$= \lim_{z\to k}\left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^2 - \frac{1}{w^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

קיים כאילו לפי.

$w=z-k$

לכן כל הנקודות סינגולריות הן סלוקה לכן יש השאלה לגבי הלוגריתמיות בכל $\mathbb{C}$.

כי יש הרבה מ"ל מקומיות בנקודות k אבל הן לא רציפות לגמרי לכל הנקודות הללו

לכי סדר שאינו מסוים שאינו πk

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y \xrightarrow{|y|\to\infty} \infty$$

כמו כן:

כאשר $z=x+iy$

בכיתה:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2} \xrightarrow{|y|\to\infty} 0$$

מ"ל מקומית.

לכן $g(z)\xrightarrow{|y|\to\infty} 0$; בגלל בסביבה של אפסים...

אבל $g(z+1)=g(z)$ לכן g חסומה, ולכן בהכרח $\equiv 0$.

כי g חסומה! כי היא חסומה מחוץ לשלוש נקודות ומאחר הנה חסומה בתוך בכדור של הנקודות, אבל בחוץ

24/12/13

הרצאה שנתית 11

עקרון המקסימום:

הגדרה: יהי G תחום. f תקרא מרומורפית ($f\in Mer(G)$) אם f אנליטי בכל G פרט לקבוצה: לכל $a\in G$ קיימת סביבה U_a כך ש- $f\in Hol(U_a)$ או $f\in Hol(U_a^*)$ ו- a קוטב של f.

טענה:

$Mer(G)$ גוף שדה. תהי $f_1,f_2\in Mer(G)$ אזי $f_1+f_2,\ f_1\cdot f_2,\ f_1/f_2\in Mer(G)$ כאשר $f_2\neq 0$.

שאלה: לכל $f\in Mer(G)$ קיימות $f_1,f_2\in Hol(G)$ כך ש- $f=\frac{f_1}{f_2}$ לא נמצא בקודם.

עקרון הארגומנט:

יהי G תחום ויהי $G_1\subsetneq G$ (תהא $\overline{G_1}\subset G$) ו- G_1 תחום חסום בעל שפה "טובה" תהא ∂G_1 גזרה אינטגרבילית שמורכבת מעקומות סגורות פיקוחיות חלקות ופשוטות.

תהי $f\in Mer(G)$ כך ש- $f\neq 0,\infty$ על ∂G_1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_1}\frac{f'}{f}=N_f(G_1)-P_f(G_1)$$

$N_f(G_1)$ = מספר האפסים של f ב- G_1

$P_f(G_1)$ = מספר הקטבים של f ב- G_1

כולל הכפלות

הוכחה: מספיק לבדוק כי $Res_a\frac{f'}{f}=m$ לכל a וקבוע ואפסים של $\frac{f'}{f}$ הם בדיוק אפסים ואפסים של f.

יהי a קוטב $f(z)=(z-a)^m h(z)$ אז $Res_a\frac{f'}{f}=m$ ...

נניח: תהי γ עקומה סגורה סגורה פיקוחית חלקה למקטעין $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$f|_\gamma=0$ ← (נניח) כי: f הולומורפית סביב γ שמכיל את γ.

בעזרת: $\frac{d}{dt}\log(f(\gamma(t)))=\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\cdot\gamma'(t)$ "כלל הפונ..." ← כדי נוכל להשתמש בלוג ונקבל...

24/12/13

המשך שיעור 11:

לא תמיד אפשר לחשב פונ' log בסביבה של המעגל של f על $\gamma[a,b]$.

אם היינו כבר מוכיחים שזה נותן

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{d}{dt}\log(f(\gamma(t)))\,dt = \frac{1}{2\pi i}\left[\log(f(\gamma(b)))-\log(f(\gamma(a)))\right]=0$$

אם המעגל סגור.

אנחנו צריכים לחשב את log לאורך המעגל $f\circ\gamma$. לומר

משהו כזה תלוי לא בקיום $\psi:[a,b]\to\mathbb{C}$ כך ש $f\circ\gamma(t)=e^{\psi(t)}$

לכל $t\in[a,b]$. אז נקבל:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\cdot\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \psi'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\left[\psi(b)-\psi(a)\right]}_{\Delta_\gamma \arg f} =$$

$$:= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f$$

[גאון המפרה של $\Delta_\gamma \arg f$, הגדרה של ארגומנט f לאורך γ]

בפ"ר הגדרנו רק הבדלים של הפונקציה, לא שלם! כי אמת היה לנו אמור לעבור בקבה

$$\log(f(\gamma(t))) = \log|f(\gamma(t))| + i\arg f(\gamma(t))$$

(נכון כי

לכן אם $\gamma(a)=\gamma(b)$ אז החלק הראשי שווה בקבוע, לכן

השינוי בקבוע הוא כך השינוי בארגומנט, ומסומן!

כל סיבוב שלם מכניס אפס מפלס 2π לחשבון הארגומנט.

לסכום אין כלום אבל יש לעשות לפונקציה, לכן נרצה לבנות מי יש לעשות לפונקציה!

(נכון שלא לא יכולים לא אפשר מאשר $f\circ\gamma$ כך יכולה)

למה (אופלוגיה)

יהי $I=[a,b]$! $h\in C(I)$ כך ש $h:I\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. אזי קיים

$\psi\in C(I)$ כך ש $h=e^{\psi}$! אם $\psi_1,\psi_2\in C(I)$! $e^{\psi_1}=e^{\psi_2}$

אז $\psi_1-\psi_2=(2\pi i)n$ עבור $n\in\mathbb{Z}$.

הוכחה: מכיוון ש h רציפה על קטע סגור $\delta>0$ כך שלכל $t,t'\in I$ כך ש

$|t-t'|\le\delta$ אז $\operatorname{Re}\frac{h(t')}{h(t)}>0$. [רציפה במ"ש: $h(t')\to h(t)$ אם $\frac{h(t')}{h(t)}\to 1$]

אפשר לתן $\delta=\frac{b-a}{k}$ עבור $k\in\mathbb{N}$, מספיק גדול.

(נשתמש אם ψ בנוסף אזור בנוסף, קופצת כל נגזר הגרף $\psi(a)$ לפונ אזור כלשהי ב $\log(h(a))$ ובקטע $[a,a+\delta]$ ב $\psi(t)=\psi(a)+\log\frac{h(t)}{h(a)}$ (נשתמש

24/12/13

המשך שיעור 11

$h \neq 0$ בכל מקום

נמשיך הפעם ש סקלר כלשהו לאלפא כי החלק הראשון לא מעניין!

נגדיר את ψ ל $[a,a+2\delta]$, ע"פ $z\in[a+\delta,a+2\delta]$ נגדיר

$$\psi(z) = \psi(a+\delta) + \operatorname{Log}\frac{h(z)}{h(a+\delta)} \quad ;$$

נגדיר אותה להמשיך את ψ שוב הגדרה הראשית

ב $[a,c+\delta]$ אם הגדרנו כבר קיים כי חלק מהשלם לא אפס.

על $[a,c]$ נניח $z\in[c,c+\delta]$ לכל

$$\psi(z) = \psi(c) + \operatorname{Log}\frac{h(z)}{h(c)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{נשים לב כי}\\ &e^{\psi(z)} = e^{\psi(c)+\operatorname{Log}\frac{h(z)}{h(c)}} = h(c)\cdot\frac{h(z)}{h(c)} = h(z)\end{aligned}}$$

בעיקרון ← לאחר k צעדים נקבל את ψ מעגל על כל $[a,b]$

כמו כן מתקיים בדיוק כי בנקודות מיוחדות נקבל Log של 1

וכך אלפא...

תרגיל לבית 11

<u>משפט הלשארי:</u> G תחום חסום עם ∂G חלקה למקטעין

נתון לכל מספר סופי פעמים פונקציה רציונלית!

$$f\in C(\overline{G}) \quad ! \quad f\in Hol(G\setminus\{a_i\}_{i=1}^{N}) \quad ; \quad \{a_i\}_{i=1}^{N}\subseteq G$$

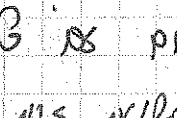
$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}_{a_j} f$$

<u>כלים שימושיים:</u>

(1) כלל לופיטל. (2) אם z_0 הקטב <u>פשוט</u> של f ! C_ε הינו המעגל

בגודל α הנתון

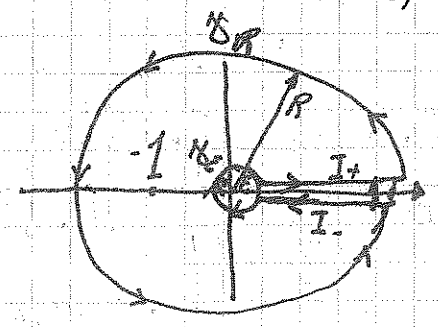
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \alpha i \operatorname{Res}_{z_0} f$$



כי שוב מתקיים פשוט נקבל לפחות הגדרה ופתח וכך מגיע שקלנו...

<u>תרגיל:</u>

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = I$$



(פיתוח מעגל)

$$\frac{\log z}{e^{\log z}(z+1)}$$

(עם הגדרה עבור כולם הענף של $\log z$ שמגדיר לנו כך שיהיה את $+\pi i$)

כלומר $\arg z \in [0,2\pi]$. כאשר $z \to x \in \mathbb{R}^+$ אבל המשוואה הפונקציה

$$\frac{\log z}{e^{2\log z}(z+1)} \longrightarrow \frac{\log x}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

מרוכבת.

כאשר $z \to x \in \mathbb{R}^+$ אבל המשוואה המתאימה מקיים

$$\frac{\log z}{e^{2\log z}(z+1)} \longmapsto \frac{\log x + 2\pi i}{-\sqrt{x}\,(x+1)}$$

לכן [נשים לב לכיוון המעגלים...]

$$\int_{I_+(\delta,\varepsilon)} \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(1+z)} + \int_{I_-(\delta,\varepsilon)} \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z+1)} \xrightarrow[R\to\infty]{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}} \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}\,(x+1)} + \int_0^\infty \frac{\log x + 2\pi i}{\sqrt{x}\,(x+1)} =$$

$$= 2I + \int_0^\infty \frac{2\pi i}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

כלומר נסמן $\Gamma = \gamma_\varepsilon + \gamma_R + \gamma_- + \gamma_+$

לכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overbrace{\frac{\log z}{\sqrt{z}\,(z+1)}}^{f(z)} \underset{\text{משפט השאריות}}{=} \operatorname{Res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot f(z) = \pi$$

נותר להראות כי:

$$\int_{\gamma_R} f(z) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

אז אין מקיים

$$|\log z|^2 \le \overbrace{\ln|z|^2 + 4\pi^2}^{\text{הנורמה המקסימלית}}$$

לכן

$$|f(z)| \le \frac{(\ln^2|z| + 4\pi^2)^{1/2}}{|z|^{1/2}(|z|-1)}$$

מרוכבת...

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le 2\pi\varepsilon\,\frac{(\ln^2|\varepsilon| + 4\pi^2)^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon}\,(1-\varepsilon)}$$

[באופן דומה לגבי γ_R]

לכן האינטגרל

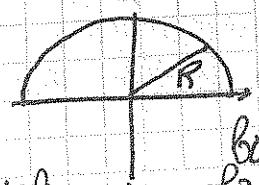
כי

$$2\pi i = \int f(z) \longrightarrow \underbrace{2I}_{\text{אמיתי}} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{2\pi i}{\sqrt{x}\,(x+1)}}_{\text{מדומה}} \longrightarrow I = 0$$

כי המשוואה הוא π...

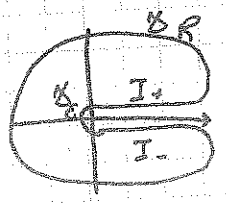
דוגמא: $I = \int_0^\infty \frac{\cos(\sqrt{2}x)}{1+x^4}$ זו פונ' זוגית לכן אפשר לקחת אינטגרל מינוס ∞ ל ∞.

נסתכל בפונ' $f(z) = \frac{e^{i\sqrt{2}z}}{1+z^4}$ ובמעגלה



ומשלבים האינטגרל על המשוואות בפנים... [מצטמצם ומשתמשים באינטגרל מינוס ∞ לאינטגרל הלא המדומה (לא!)]

דוגמא: $I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$ זו לא פונ' זוגית! בעיה...



נסתכל בפונ' $f(z) = \frac{\log z}{1+z^3}$ כאשר $\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$ ובמעגלה $[0,2\pi]$

נושא תשיעי

דוגמא: מראים $\int_{\gamma_R} f(z) \longrightarrow 0$; $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) \longrightarrow 0$ כאן אתקיים

$$\int_{I_+} f(z) \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^3}\,dx \qquad \int_{I_-} f(x) \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty \frac{\log(x)+2\pi i}{1+x^3}$$

[הסימן הזה מיוחס כאן בכוון ההפוך.]

לכן סכום האינטגרלים:

$$\int_{I_+} f(x) + \int_{I_-} f(x) \longrightarrow -2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$$

וגם שוות מנשלב הגבולות לסוף הגבולות וגם

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z) = \operatorname{Res}_{-1} f(z) + \operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi i}{3}}} + \operatorname{Res}_{e^{\frac{5\pi i}{3}}} = \dots$$

... קבועים פשוטים

הערה: אם הגבולות הם כמו שצריך וגם אין נקודות אינסוף אז עדיין שוות הגבולות

לדוגמא:

$$\operatorname{Res}_{-1} \frac{\log(z)}{1+z^3} = \frac{\log(-1)}{3(-1)^2} = \frac{\pi i}{3}$$

נוסחת הגבול

אם α הוא קוטב מסדר n אז

$$\operatorname{Res}_\alpha f(z) = \lim_{z\to\alpha}\left[(z-\alpha)^n f(z)\right]^{(n-1)}$$

אם $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ ו $h'(\alpha)\neq 0$! אז הגבול הזה הוא $\frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$

תרגיל: נתון $f\in Hol(D)$ בכל חוץ אפס ! f לא מקבלת מקסימום ב $(-\infty,0]$ הוכיח כי אפס נק' סינגולרית סליקה.

פתרון: נתבונן בפונ' $\sqrt{f}$. נראה פונ' הולומורפית כי f לא מקבלת ערכים ב $(-\infty,0]$. לכן $\sqrt{f}$ הולומורפית ב $\{0\}\cup D$. מספיק לראות שאפס סליקה של $\sqrt{f}$.

נמצא פיתוח לוראן של $\sqrt{f}$: $\sqrt{f(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$.

נשים לב כי המציאות של $\sqrt{f}$ מוגדרת מכך שיש הימנו, לכן אם אפס נק' סינגולרית עיקרית אזי מקסימום ווירשטרס המונה בפוטנציה ב a וגם לא כן, לכן גם לא סינגולרית עיקרית. אם 0 קוטב אז

$$\sqrt{f(z)} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$$

אזי אם נתה $z_0 = -\left(\frac{1}{a_{-N}}\right)^{-\frac{1}{N}}\cdot r_n$ כאשר $r_n\in\mathbb{R}_+$ $\longrightarrow 0$

נקבל כי $\sqrt{f(z_n)}=0$ מכך שיש שאלה אור n מספיק גדול

26/12/13

שיעור שלישי II

הגדרה: תהי γ עקומה חלקה לא־קבועה, f הולומורפית בתחום שמכיל את γ ונתונים ב $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}$ ואם $e^{\psi(t)} = f\circ\gamma(t)$ לכל $t\in[a,b]$

אז האינטגרל הוא

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\psi(b)-\psi(a)\right] = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f = \text{"מספר הסיבובים של } f\circ\gamma \text{"}$$

עושה סבב אחד

← השינוי בארגומנט

לעובה: אם $I=[a,b]$! $h: I\to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ רציפה אז קיים $\psi\in C(I)$ כך ש $h=e^{\psi}$ וגם מתמר של ψ כפי קבוע חיבורי $2\pi i k$. המשמעות מכך שהפרש בין שני $\psi_1-\psi_2$ אם ψ רציפה, ומקבלת ערכים פסקליים, כלומר $\psi_1-\psi_2\in 2\pi\mathbb{Z}$ כי $e^{\psi_1(t)}=e^{\psi_2(t)}$

הערה: אם γ מסלול חלקה לא־קבוע וסגורה $\Delta_\gamma \arg(f_1 f_2)=\Delta_\gamma \arg(f_1)+\Delta_\gamma \arg(f_2)$

מבט מייצג מסלולים ← סכום של לוגריתם

⊖ אם משהו $f(\gamma)\subseteq$ אז $\Delta_\gamma \arg f=0$ ואז אין מיתרים על ! Log ...

[אפשר אפילו יותר מכך, בכל תחום שקיים עליו ! Log...]

משפט: Rouche

יהי G תחום ויהי $G_1\subset G$ פתוח, $\overline{G_1}\subseteq G$! השפה של G_1 היא איחוד סופי של עקומות חלקות לא־קבועות פשוטות ובמה כן $f,g\in H(G_1)$ יהי $|g|<|f|$ על ∂G_1 אז $N_{f+g}(G_1)=N_f(G_1)$

הוכחה: מתקיים:

$$\boxed{f+g=f\left(1+\frac{g}{f}\right)}$$

$$N_{f+g}(G_1) = \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\left[\Delta_{\gamma_j}\operatorname{Arg}(f+g)\right] = \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_j}\arg(f) + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_j}\arg\left(1+\frac{g}{f}\right)$$

כי מספר הסיבובים של האינטגרל של הנגזרת הלוגרתמית...

והאינטגרל הזה שלקחנו הוא הנגזרת הלוגרתמית של הפונקציה...

אבל $|g|<|f|$ על השפה ! לכן $\operatorname{Re}\left(1+\frac{g}{f}\right)>0$ ולכן

גם בגזרה המישור ולכן ההשתנות הוא אפס! לכן

$$= \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_j}\arg(f) = N_f(G_1)$$

כי f הולומורפית ! לכן אין לה קטבים...

לכן אחרת:

$$N_{f+g}(G_1)-N_f(G_1) = N_{\frac{f+g}{f}}(G_1)-P_{\frac{f+g}{f}}(G_1) = \ldots = 0$$

משפט: (Gauss) יהי $P(z)=\sum_{i=0}^{n} a_n z^n$ כאשר $a_n \neq 0$

נסמן $f(z)=a_n z^n$

$g(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0$

ניפוש שמחוץ מספיק מלסה $|g(z)|<|f(z)|$

אזי כל האפסים נמצאים בפיסוק.

הוכחה: לפולינום $P(z)=a_n z^n+\dots+a_0$ יש n שורשים בפיסוק $\{|z|<R\}$

כאשר $R=\sqrt{1+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|^2}$ - מאוד קרוב לחסם ש המשפט נתן

מתקיים $|g(z)|<|f(z)|$ ולכן מספר

האפסים של $f+g$ שווה למספר של f, אבל

יש n אפסים [0 - מרובה n] אבל! P יש n אפסים בפיסוק הנ"ל!

דוגמא: כל האפסים של $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$ נמצאים בטבעת

$$\left\{\frac{n}{2e}<|z|<2n\right\}$$

הוכחה: ~~לפי~~ אין אפסים! P_n ב $|z|\geq 2n$.

כי:
$$P_n(z)=\frac{z^n}{n!}\left(1+\frac{n}{z}+\frac{n(n-1)}{z^2}+\dots+\frac{n!}{z^n}\right)$$

אבל מתקיים
$$\left|1+\frac{n}{2n}+\frac{n(n-1)}{4n^2}+\dots+\frac{n!}{(2n)^n}\right|<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots<1$$

לכן $\left(1+\frac{n}{z}+\dots+\frac{n!}{z^n}\right)\neq 0$

כי בגלל הטיילור המלא...

אין אפסים ב $|z|\leq \frac{n}{2e}$: $P_n(z)=e^z-R_n(z)$ אם $|z|=\frac{n}{2e}$ אז $|e^z|\geq e^{-\frac{n}{2e}}$

אז
$$R_n(z)\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{n}{2e}\right)^k\frac{1}{k!}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{n}{2e}\right)\left(\frac{e}{k}\right)^k$$

$\boxed{(k!>k^k e^{-k})}$ מנוסחת הבינום הקבוצות

וגם כי $k>n$

$$e^{-n/2e}>e^{-n\log 2}=2^{-n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-k}$$

לכן $|e^z|>|R_n(z)|$ בעל $\{|z|=\frac{n}{2e}\}$ ולכן מספר אפסים

של הסכום הוא המספר האפסים של e^z, אבל e^z אין אפסים! לכן $P_n(z)$ שגם

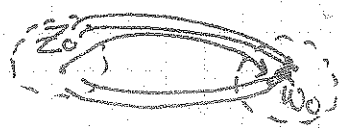
הסכום אין אפסים מאחר המעגל

משפט: יהי G תחום, $f\in Hol(G)$! $z_0\in G$. נסמן $w_0=f(z_0)$. נסמן $m=m_{z_0}(f-w_0)$

אזי $f(z)=w_0+(z-z_0)^m g(z)$ כאשר $g(z_0)\neq 0$! g הולומורפית.

אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|w-w_0|<\delta$ קיימים בדיוק m פתרונות

שימים פתרונות $w=f(z)$ בעיגול $\{|z-z_0|<\varepsilon\}$



לדוגמא אם יש נקודת מינימום m, אז אם נשים קטן

בסביבה, המתר מספיק ל m נקודות שונות.

30/12/13

הוכחה: נתון ε קטן מספיק כך ש $0<|z-z_0|<\varepsilon \leftarrow f(z)=w_0$, $f'(z)\neq 0$

[קיים ε כזה...]. נתון δ כלשהו כך ש $\varepsilon=|z-z_0| \to |f(z)-w_0|\geq\delta$

$\boxed{\text{כלומר בלי הגבלה}}$ $\boxed{\text{הגבלה זו תבוא בהמשך}}$

אז לכל w קטן מ w_0!

$$f(z)-w = (f(z)-w_0)-(w-w_0)$$

אז מתקיים לגבי $|z-z_0|=\varepsilon$ גם $|(f(z)-w)-(f(z)-w_0)| = |w-w_0|<\delta$

הגבלה לפי הנחת ש $\leq |f(z)-w_0|$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{משלב רושם לפנינו } f(z)-w \text{ יש אותו מס' אפסים כמו } f(z)-w_0\text{! לכן יש } m \text{ אפסים ולכל אפס מרובה } 1 \text{ קבלת לנו מ אפסים}}$

31/12/13

שיעור שמח לכולם

הצגה: Local mapping theorem

G תחום! $f\in Hol(G)$! $w_0=f(z_0)$. נסמן $m=m_{z_0}(f-w_0)$ לחומר הריבוי של האפס בפונ' אז לכל $\varepsilon>0$ מספיק קטן קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|w-w_0|<\delta$ קיימים בדיוק m פתרונות למשוואה $f(z)=w$ בעיגול ברדיוס ε סביב z_0. [נשים לב שגם לכל w כזה בדומה לפתרון פתרון לכל w יהיה מרובה]

מסקנות:

1) G תחום, $f\in Hol(G)$! $f\equiv const$! אז f מקבלת הגבוה פעמיים לקבוצה פתוחה [כי בגלל המסקנה פתרון, כי לכל אחד בתחום יש סביבה של לכל הסביבה יש מקרים לפי f] $\leftarrow$ כי הריבוי לפחות 1...

2) G תחום! $f\in Hol(G)$! $z_0\in G$! $f'(z_0)\neq 0$ [גם קרה בדיוק הקודם אם $f\equiv const$]

אז קיימת סביבה של z_0 עליה f חח"ע! אם $w_0=f(z_0)$

$f: U_{z_0}\xrightarrow{1-1} U_{w_0}$ [נשים לב שגם למשוואה משלב הראשון ההפוכה] $f(U_{z_0})=U_{w_0}$!

[גם קבלת מ"ש מהמשלב כי $m=1$! לכן לכל אחד בסביבה מספיק קטן של w_0 יש בדיוק מקור אחד בסביבה z_0:

$U_{z_0} = \underbrace{\{|z-z_0|<\varepsilon\}}_{\text{הסביבה מהמשלב}} \cap \underbrace{f^{-1}(\{|w-w_0|<\delta\})}_{\text{תמונת ההפוכה של הכדור, וגם קיבלנו פתרון כי } f \text{ הפיכה...}}$ חח"ע

$\boxed{\text{(*) הערה: לא יכול להיות שיש הרבה נקודות שמשאיר } w_0 \text{ כי יש } \varepsilon \text{ מספיק קטן שלא אין פתרון נק' שמשאיר } f \text{ בו כי אם } f \text{ הפיכה קבועה בו}}$

31/12/13

המשך שיעור קודם

הגדרה: המקרה בה, $U_{z_0}=\{|z-z_0|<\varepsilon_0\}$ אזי לכל $w\in U_{w_0}$ מתקיים

$$f'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\varepsilon_0}\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)-w}\,d\xi$$

[ובפרט הנגזרת הראשונה ונגזרת מושפעת הראשונה]

3) **עקרון המקסימום:** אם $f\neq const$ אזי $z\longmapsto|f(z)|$ אינה מקבלת מקסימום פנימי [מסקנה מ1] כלומר לכל נקודה w יש סביבה שלה שבה נקודת מקסימום עם ערך מוחלט גדול יותר שגם לכן יש מתוך f בתחום שלנו. לכן אינפיניטיבי נקודה בתמונה עם ערך מוחלט גדול יותר! לכן אין מקסימום מקומי בתמונה.

מסקנה: $f\in Hol(G)\cap C(\bar{G})$ כאשר G תחום חסום! $M=\max_{\partial G}|f|$ אם $|f(z)|\le M$ לכל $z\in G$, ואם יש שוויון $|f(z_0)|=M$ עבור $z_0\in G$ מתקיים אזי $f=const$.

הגדרה: G תחום חסום! $f\in Hol(G)$ אם

$$\sup_G|f|=\limsup_{\substack{z\to\partial G\\ z\in G}}|f|$$

ואם $|f(z_0)|=\limsup_{\substack{z\to\partial G\\ z\in G}}|f|$ אזי $f=const$

$\boxed{z\to\partial G \text{ אומ"מ } d(z,\partial G)}$

4) **למת Schwartz:**

נתון $\Delta=\{|z|<1\}$! $f\in Hol(G)$! $f:\Delta\to\Delta$ לדוגמה $|f(z)|<1$ ובנוסף $f(0)=0$ אזי בהכרח $|f(z)|\le|z|$! $|f'(0)|\le1$

ואם $|f(z_0)|=|z_0|$ אזי $f(z)=\lambda z$ עבור $|\lambda|=1$ ואם המסקנה אם $|f'(0)|=1$

הוכחה: $g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z} & z\neq0\\ f'(0) & z=0\end{cases}$ לכן גזיר ורציף סביבת g כי הגבול קיים, כי הנגזרת קיימת גם הגבול הזה הוא הנגזרת...

נתבונן בעיגול מרכזו $1>r$ אזי בעיגול הזה $|g(z)|<\frac{1}{r}$ כי מעקרון המקסימום נניח $|f|\le1$ ושוויון $r=|z|$ של הגבול.

בחסם נכון לכל $1>r$ לכן $|g(z)|\le1$ לכל $z\in\Delta$ לכן $|f(z)|\le|z|$

כמו כן $|g'(0)|\le1$ ולכל $1>|\lambda|$ אם $|f'(0)|=1$ [illegible]

31/12/13

כי אם יש שוויון אז $|g|=1$ בכל המקום וקבוע...

תרגיל: (א) נניח כי $f\in Hol(\Delta)$! $|f|<1$ ב Δ. הוכיח

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right| \le \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|$$

רמז: מסתכלת באותם שורשים, וקבועים w וz ותשתמש

$f:\Delta\to\Delta$ ע"י $F(\xi)=\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}$ כאשר $z=\frac{\xi+w}{1+\xi\bar{w}}$

[אם שורשים הם מתחת $z_0=0$ אפשר לקחת $w_0=0$]

(ב) $$|f'(z)| \le \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

(ג) אם יש שם נקודת שינוי אזי f הוא הכפלה.

תרגיל: $f\in Mer(\mathbb{C})$ רק ל $\#f^{-1}(w)<\infty$ לכל $w\in\mathbb{C}$ אזי f רציונלית.

משפט Hurwitz:

G-תחום ! $f_n\in H(G)$ עבור $n\in\mathbb{N}$! $f_n\neq 0$ ב G ! $f_n\to f$ במ"ש מקומית אזי $f\neq 0$ בכל G או $f\equiv 0$ ב G.

הוכחה: נניח בשלילה כי $f(z_0)=0$ עבור $z_0\in G$ לשהו ! $f\not\equiv 0$. נמצא עיגול $D(z_0)$ עם מרכז ב z_0 כך ש $\overline{D(z_0)}\subseteq G$! $f|_{\partial D(z_0)}\neq 0$ כי אפשרי הם מקומפקט כי $f\neq 0$ [f הלומורפית כפל במ"ש]

נסמן $f_n=f+(f_n-f)$ ונשתמש $\max_{\partial D(z_0)}|f_n-f| < \min_{\partial D(z_0)}|f|$ עבור n מספיק גדול [כי f חסומה מלמטה על השפה $\partial D(z_0)$ כי היא אינה אפס, ומהנחת המ"ש בעיגול הנתון שלא לאפס]

לכן משלב רושם ! f_n יש אותו מספר אפסים כמו f ב $D(z_0)$! לכן f_n לא אפס ב $D(z_0)$ בפרט, כי f יש אפס ב $D(z_0)$. לכן הנחת היא שגויה.

תרגיל: מסקנה: G תחום ! $f_n\in Hol(G)$ עבור $n\in\mathbb{N}$ סדרת פונ' חח"ע ונניח כי $f_n\to f$ במ"ש מקומית אז f חח"ע או $f\equiv const$

דוגמא: פולינום Hermit: $H_k(z)=e^{z^2}\frac{d^k}{dz^k}(e^{-z^2})$

טענה: כל האפסים של H_k ממשיים. רמז: $e^{-z^2}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{z^2}{n})^n$

לכן $H_k(z)=e^{z^2}\lim_{n\to\infty}\frac{d^k}{dz^k}(1-\frac{z^2}{n})^n$ כי ניתן לחלף גזירה מקומית במ"ש של הלומורפיות.

ובגלל $(1-\frac{z^2}{n})^n$ כל הפולינומים ממשיים $(1-\frac{z^2}{n})^n=((1-\frac{z}{\sqrt{n}})(1+\frac{z}{\sqrt{n}}))^n$

הבעיה כאן שמשמאל הפולינומים נשמרת גם לגבולות. לכן הפתרון לא מתאים במקום

מתחים מתן מעלה

לכן מתאים כאן בכלל מן שלב מתכלה

31/12/13

בשלב שיעור 61

תרגיל: נניח כי $P(z)$ פולינום מרוכב השונה מקבוע. מצאו כל האפסים של $P'(z)$, ומצאו בקשר בין האפסים של $P(z)$.

Winding number

הגדרה: תהי $\gamma: I \to \mathbb{C}$ עקומה סגורה. $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ נגדיר

$$ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma(\arg(\xi - z))$$

או אם γ גזירה למקטעין גם למשפט

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

[למעשה הפרש ה"לוג" בנקודה ובסוף... לוותר כמה המתקדמים מביא אפס] ← את כל הרבוד שהגדרנו.

לדוגמא:

[לוותר גם כמו לתגיב המשלים אבל מקומות תלויים כמעט סיבוכים מביך אלגס ...]

נניח עכשיו ש γ היא עקומה סגורה. אזי המקומות שם מהגדרה רציפה ומקומית הם $\mathbb{C} \setminus \gamma(I) \to \mathbb{Z}$ רציפה מ $z \mapsto ind_\gamma(z)$ [קבוצה למקומות בפרט]

וכמו כן $\lim_{z\to\infty} ind_\gamma(z) = 0$! יש גם נגזרים $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ כיוון

רכיבי קשירות $\bigcup_j \Omega_j$ אזי $ind_\gamma|_{\Omega_j} = Const$! $ind_\gamma|_{\Omega(\infty)} = 0$

רכיב הקשירות המלא חסום...

תרגיל:
כל הנאמר נכון גם אם γ רק רציפה ולא רק גזירה למקטעין.

משפט "הגאוס הרחוק":

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהי $f \in Hol(G)$. תהי $\gamma: I \to G$ עקומה סגורה מקומית למקטעין כך ש $\forall z \in \mathbb{C} \setminus G$ מתקיים $ind_\gamma(z) = 0$ (*)

אז

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz$$

הגדרה: תהי γ עקומה סגורה ורציפה אזי

$$\{z \in G \setminus \gamma \mid ind_\gamma(z) \neq 0\} = \int int(\gamma)$$

לוותר נקודה ש γ מסתובבת סביבן.

$$\{z \in G \setminus \gamma \mid ind_\gamma(z) = 0\} = ext(\gamma)$$

נקודה ש γ ~~[illegible]~~ אינה מסתובב סביבן.

תנאי (*) שקול ל $int(\gamma) \subseteq G$!

31/12/13

הגדרה: מחלקה סכום פורמלי של עקומות, [לפי] $\gamma = \sum n_j \gamma_j$ עקומות

כאשר $n_j \in \mathbb{Z}$! γ_j עקומות סגורות [נניח שהן גזירות למקוטעין]

ולפי הגדרה

$$\int_\gamma f = \sum n_j \int_{\gamma_j} f$$ וכמו כן $ind_\gamma(z) = \sum n_j \cdot ind_{\gamma_j}(z)$

רגיל שלא בו

31/12/13

הגדרה: יהי G תחום ! f מרומורפי ב G [לחומר קבלת מנוקסים]

נסמן $N_{f-w}(G)$ מס' הפתרונות של $f(z)=w$ ב G כולל הריבוי עבור $w \in \mathbb{C}$.

ונסמן $P_f(G)$ מס' הקטבים של f ב G.

הגדרה: $ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$

עקרון הארגומנט: נניח f מרומורפי ב G ! $\overline{G_1} \subseteq G$ תחום $f \neq w, \infty$! $\gamma = \partial G_1$

אז $ind_{f\circ\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{d\xi}{\xi - w}$ והמשלב אורך שפע שווה $N_{f-w}(G_1) - P_f(G_1)$

משפט רושה:

$f,g \in Hol(G)$! $\overline{G_1} \subseteq G$ כמקודם. $\gamma = \partial G_1$. אם $|g|_\gamma < |f|$ אזי

$$N_{f+g}(G_1) = N_f(G_1)$$

תרגיל: כמה פתרונות יש לשוואה $0 = 2z^5 + 8z - 1$ בטבעת $1<|z|<2$

פתרון: (מג) עם 0-ים על $|z|<2$. נסמן $f(z) = 2z^5$! $g(z) = 8z-1$

ולכן בשפה $|z|=2$ אזי $|f(z)| = 64$! $|g(z)| \overset{\Delta}{\leq} 17$

לכן $|g| < |f|$ על $|z|=2$ לכן מספר האפסים בתוך $|z|<2$ של f ושל $f+g$ שווים

נזכר אם f יש 5 אפסים, לכן על $|z|\leq 2$ יש לפחות 5 שורשים.

(מג) מס' אפסים ב $|z|\leq 1$. נסמן $f(z) = 8z$! $g(z) = 2z^5 - 1$ אזי

על המעגל $|z|=1$ ← $|g(z)| \leq 3$! $8 = |f(z)|$! לכן מעל רושה $f+g$

יש אפסים כמו f ! f ב אפס יחיד, מחוץ הע"ל. לכן מניה מספר האפסים של

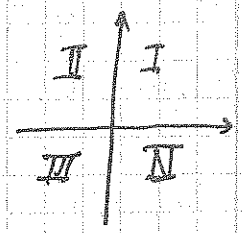
$2z^5 + 8z - 1$ בטבעת $1<|z|<2$ הוא 4.

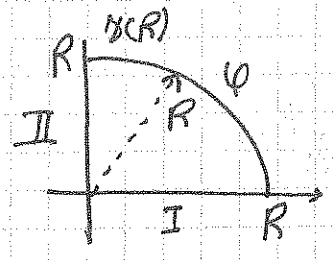
לא עקומה

נושא: שורשים

תרגיל: מצא את מספר האפסים של $f(z)=z^4+2z^2-z+1$ ברביע ה I

פתרון: לא בהכרח אין לשער מה שלב כלשהי ברור מי הפתרון





⊖ נעבור בעקרון הארגומנט:

ומה פונ' הלוגריתם ולכן אין הבנה.

$$N_f = \mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{\xi}\,d\xi$$

כאשר מספר השורשים מקיפים את אפס.

לכן הוצאה הגיון בשלבים לכן אפשרי לשים מסרגת לפי גסה

לאחר בדיקה לגבי השינוי הארגומנט של $f\circ\gamma$ כאשר מתחילים מהנקודה כלשהי ומסיימת באותה הנקודה והולכים לאורך $f\circ\gamma$

[מאחר והמעגלה $f\circ\gamma$ סגורה, השינוי הארגומנט הוא כפולה שלמה של 2π]

כאשר נראה שאין אפסים על I: $f\circ I(x)=\underbrace{x^4}_{\substack{>0\\ x\in\mathbb{R}^+}}+\underbrace{2x^2-x+1}_{\substack{>0\\ x\in\mathbb{R}^+}}$

לכן $f\circ\gamma$ לא מאפס על I.

יש מצב $\mathbb{R}^+\supseteq \mathrm{Image}\, f\circ\gamma$ לכן אין שינוי הארגומנט על המעגלה הזו.

נראה שגם אין אפסים על קטע II

$$f\circ II = f(iy) = y^4-2y-iy+1 \longrightarrow$$

$0\le y\le R$

אין אפס כי המכפלה קטנה מאפס אלא רק המשוויון $y=0$.

בנוסף $\mathrm{Immag}\, f\circ II \subseteq IV$ כי המכפלה שלו והמשוויון חיובי.

ונסרוק את השינוי הארגומנט על קטע II.

ישים לב $f(0)=1$!

$$\mathrm{Arg}(f(iR)) = \mathrm{Arg}\,\underbrace{R^4}_{\text{גדול}}(1+o(\tfrac{1}{R})) = f(iR)$$

לכן

$$= \mathrm{Arg}\,R^4 + \mathrm{Arg}(1+o(\tfrac{1}{R}))$$

על $f\circ I$ המכפלה ברורה

$f(0)=1$! $f(iR)=iR^4(1+o(1))$

לכן על קטע המעגלה II השינוי הארגומנט הוא $o(\frac{1}{R})$ ועל קטע I הוא אפס.

על קטע φ: $\mathrm{Arg}(z^4+2z^2+z+1)=\mathrm{Arg}(z^4(1+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}))$ $|z|=R$

$$= \mathrm{Arg}(z^4) + \mathrm{Arg}(1+o(\tfrac{1}{R})) = 4\,\mathrm{Arg}\,z + \mathrm{Arg}(1+o(\tfrac{1}{R}))$$

לכן לשינוי $f\circ\varphi$ לכן לשינוי φ $2\pi+o(\frac{1}{R})\to 2\pi$

לכן השינוי של $f\circ\varphi$ הוא בלבד 4 פעמים השינוי הארגומנט של φ !

לכן יש מספר אפס סביב אפס לכן מיוחס !

31/12/13

המשך הרצאה מן

הערה: כאשר להסתכל על השינוי במחלה II השלמה בין $\mathbb{N} \supseteq \mathrm{Image}\, f\circ \mathrm{II}$ לבין לא ניתן שהקטנו את אחוז מן סני II.

תרגיל: הוכיחו כי לשוואה $(z-2)^3 e^z = 1$ קיימת 3 פתרונות שקיים מהם הנמשר $\mathrm{Re}\, z > 0$ ולפחות אחד מרחוק מרחוק 1.

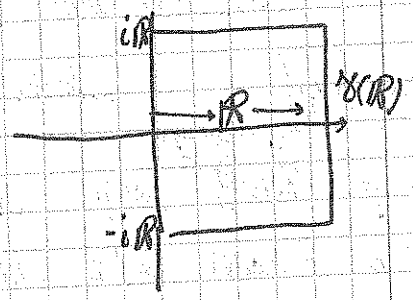
פתרון: מחלה שלפחות אחד מרחוק 1. (נסמן $f(z) = (z-2)^3 e^z - 1$) נניח כי $f(w) = 0$ ונראה $f'(w) \neq 0$ ← $f'(z) = 3(z-2)^2 e^z + e^z (z-2)^3$ ולכן $f'(w) = \frac{3}{w-2} + 1$

ובה לא שורת אחד אחר $\mathrm{Re}\, w > 0$

נמצא מה שורשים:

$(z-2)^3 e^z = 1 \longleftrightarrow (z-2)^3 - e^{-z} = 0$. נשתמש בחלק ינתבונן המתוך

נסמן $f(z) = (z-2)^3$! $g(z) = e^{-z}$. לפי מקיים $\gamma(R)$



שיעור שבוע 2

2/1/14

ביקורת: סכום **שרשרת** סופי $\gamma = \sum n_j \gamma_j$ כאשר γ_j עקומות סגורות ! $n_j \in \mathbb{Z}$

טענה: אם G תחום ! $\gamma \subseteq G$ ביקורת כך ש $\mathrm{index}_\gamma|_{\mathbb{C}\setminus G} = 0$! $f \in \mathrm{Hol}(G)$

אז $\int_\gamma f(z)dz = 0$ כאשר לפי הגדרה $\int_\gamma f(z)dz = \sum n_j \int_{\gamma_j} f$

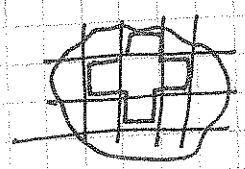
הוכחה:

יהי δ כך ש G תחום תמיד ! $\gamma \subseteq G$ ביקורת. (מחר $0 < \delta < \frac{1}{2} d(\gamma, \partial G)$

קיים כזה כי G פתוח ! γ חיבור מחלקה באופן סופי ש הומאומורפים]

נשלח רשת δ, נשאר נחלק את G לריבועים סגורים קטנים $\delta \times \delta$ בעצם ישרים אופקיים

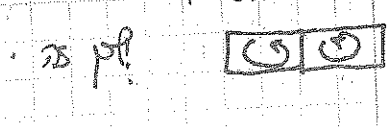
ואנכיים. נסמן Q להיות אחד הריבועים הסגורים.



הגדרה:

$$\Gamma_\gamma = \sum_{Q \subseteq G} \partial Q$$

ינוקה בלתי שאופיינו סמל"ם, בכוונים הפוכים



יהי גם יהיה סרטון בלתי של הריבועים שאותם הם קרוב לגבול של G

2/1/14

המשך שיעור 12

המשך הוכחה: יש מעיין, מחק את כל הריבועים $Q \subseteq G$, ונשאר בשורה
אי כל הנקודות שהיה עם כיון שאף אחד לא אם לא עבור מופעים סופיים
בכיוונים שונים אל נתחם אחת. בעזרת מקרה מספר סופי של צעדים $e_1,\dots,e_N$
[G חסום לכן המספר סופי] לכן $\Gamma_\delta = \sum_{j=1}^{N} e_j$ ומקבלים כי $\int_{\Gamma_j} \varphi$
נתבונן $\sum_{j=1}^{N} \int_{e_j} \varphi$.

אם G לא חסם אלא נמצא אותו עם הסיגל ונשאר הרעיון לחלוטין

נגדיר $G_\delta = int\left(\bigcup_{Q \subseteq G} Q\right)$.

הערה: אם Γ_j אכפל לינאי ע"י צמתים [בואשר מתלבטים עם הטריאנגולציה] $\partial G_\delta = \Gamma_\delta$ אזור $\partial G_\delta = e_1 \cup \dots \cup e_N$ לא ומעל בהחלט...

אבל: לכל $\xi \in \Gamma_\delta$ אם $ind_\gamma(\xi) = 0$

הטענה: יהי $\xi \in \Gamma_\delta$ אזי $\xi \in Q \subseteq G$ כי אחרת ξ הוא בפנים לכן לא ב Γ_δ שהוא הנחה. קיים $\xi_0 \in Q \setminus G$ כך ש $ind_\gamma(\xi_0) = 0$ נגיד שני $Q = \gamma \cap Q$ כי בQ יש נקודה ב ∂G ומאחר δ לא יכול לחתוך את γ לכן Q הוא רביע קשיר של הנשאר של הנקודות לפחות הנקודה עליו קבוצה לכן גם $ind_\gamma(\xi) = 0$ בפרט.

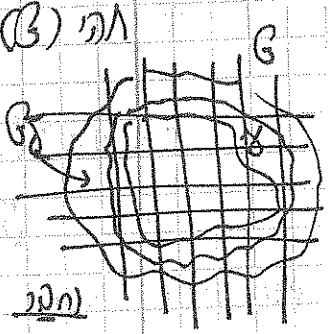
כי G פתוח!

כמו כן נשים לב $\partial G_\delta \subseteq \gamma$ מכיוון δ. כי גם $\xi \in \gamma$ אז כל הריבועים הסגורים שנמצאים אחר ונמצאים מעל המעגל G לכן בתוך G_δ

תהי $f \in Hol(G)$. ותהי $z \in G_\delta$ אם $z \in int(Q_{j_0})$ אז **מעבר קושי**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \begin{cases} f(z) & j = j_0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אפשרי לפי נוסחת הבנה הבסיסית



נחבר את כל השוויונות הללו עם כל הריבועים $Q_j \subseteq G$ לכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z)$$

אם נביט בנקודה ונראה שהוא אכפל!!

כרגע אי אפשר לדבר על הנקודות בפנים של הריבועים אלא רק מעל הנקודות Γ_δ לכן המשוואה נכון עם הגבול לכן יש שוויון בכל G_δ!

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} f(\xi)\cdot \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}$$

[הבדל...] פונקציה רציפה

$$\frac{1}{2\pi i}\int \left[\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, dz\right] d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int \left(\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\right) dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

רעיון: $\partial G_\delta \subseteq \gamma$

7/1/14

אבחנה המשלימה של משפט קושי:

יהי G תחום, $\gamma \subseteq G$ כך ש $\operatorname{ind}_\gamma|_{\mathbb{C}\setminus G} = 0$ אז לכל $f \in Hol(G)$ מתקיים

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

מסקנה: אם תנאי המשפט מתקיים לכל $w \in G\setminus\gamma$: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = f(w)\operatorname{ind}_\gamma(w)$

הוכחה: נשתמש במשפט על הפונ' $g(z) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ כאשר $z \neq w$

ובנק' w נגדיר, לפי הגדרה שם לפחות $f'(w)$. ואז האינטגרל מתאפס:

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} - \int_\gamma \frac{f(w)}{z-w} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} - f(w)\cdot\operatorname{ind}_\gamma(w)$$

תרגיל: $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום! $z_1,\dots,z_p \in \mathbb{C}\setminus G$ ויהי $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{Z}$

נניח שלכל מעגל סגור $\gamma \subseteq G$ מתקיים $\sum_{i=1}^{p} \alpha_j \operatorname{ind}(z_j) = 0$

אז קיים עליו $(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_p)^{\alpha_p}$ ב G.

רמז: $\int_\gamma \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_j}{z-z_j}\,dz = 0$ כי γ סגור.

הומוטופיה

הגדרה: יהי G תחום ו-γ_0, γ_1 שני מעגלים סגורים, $\gamma_0,\gamma_1 : [0,1] \to G$ נקראים הומוטופיים אם קיימת העתקה רציפה $\gamma : [0,1]\times[0,1] \to G$ כך ש

$\gamma(t,0) = \gamma_0(t)$

$\gamma(t,1) = \gamma_1(t)$

וכמו כן $\gamma(1,s) = \gamma(0,s)$ לכל $t,s \in [0,1]$

⊖ נוח לחשוב $\gamma_s : [0,1] \to G$ באופן $\gamma_s(t) = \gamma(t,s)$, והתנאי שהגדרנו מבטא כי γ_s סגורה.

⊖ לאמשלה יבנו משפחה של עקומות $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$ שמקשרת באופן רציף בין γ_0 לבין γ_1, כך שכל עקומה במשפחה היא סגורה.

כך מעבר רציף מ γ_0 ל γ_1.

הגדרה: לכל עקומה γ כך ש $\gamma : [a,b] \to G$ קיימת הרחבה רציפה $\bar{\gamma}(t) : [0,1] \to G$ שלה

7/1/14

המשך שיעור 13

הגדרה: יהי עקומה סגורה ורציפה $\gamma:[a,b]\to G$, יהי שני ~~[illegible]~~ רציפה-פרמטריזציה של γ_0,γ_1 אז הן הומוטופיות ב-G.

מסקנה: אם $\gamma_0:[a_1,b_1]\to G$! $\gamma_1:[a_2,b_2]\to G$ (סגורות ורציפות) אז הן נקראות הומוטופיות אם קיים רציפה פרמטריזציה

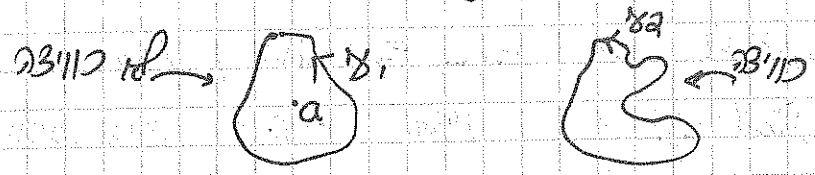
$\tilde{\gamma}_0:[0,1]\to G$ של γ_0 ! $\tilde{\gamma}_1:[0,1]\to G$ של γ_1 שמקיים $\tilde{\gamma}_0$! $\tilde{\gamma}_1$ הומוטופיות.

הגדרה:

עקומה סגורה γ ב-G נקראת כווצה ב-G אם γ הומוטופית ב-G לעקומה קבועה ב-G [לומר אחרת...] [כלומר שני נקודות הן הומוטופיות...]

כי G מחוק! לכן קשיר

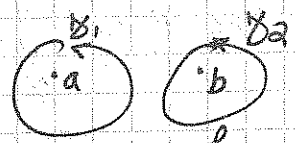
הערה: אם $G=\mathbb{C}\setminus\{a\}$ אזי



כדי לשלוף את γ_1 אני אהיה חייב לעבור ב-a מילתא, ואמרו כי הפנים הן ! G. אי אפשר לשלוף אותה ! a כי a לא במחוק

הערה לא מעניין אבל נקודה נמצאת בכל שני עקומות קבועות הומוטופיות

הערה: $G=\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ $a\neq b$



הן לא הומוטופיות ! ולא כווצות.

⊖ יש עקומה לא כווצה שאינטגרלים של כל מנה כלשהי לא במחוק הוא אפס! [כזן הראה לך...] לכן אין בהכרח קשר אוניברסלי בין כווצות לאינטגרלים.

משפט: אם $G\subseteq\mathbb{C}$! γ_0,γ_1 עקומות סגורות, חלקות למקוטעין ב-G שהן הומוטופיות ב-G ותהי $f\in Hol(G)$ אזי

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz$$

מסקנה: גרסה הומוטופית של משפט קושי

יהי $G\subseteq\mathbb{C}$ תחום ! $\gamma\subseteq G$ עקומה סגורה חלקה למקוטעין וכווצה אזי

$$0=\int_{\gamma} f(z)dz$$

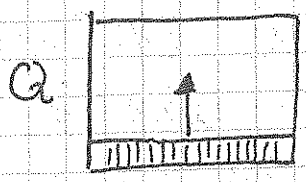
למה 1: לוגריתם רציף: יהי $Q=[0,1]\times[0,1]$! $h:Q\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $h\in C(Q)$, אזי קיימת פונ' רציפה $\varphi:Q\to\mathbb{C}$ כך $h=e^{\varphi}$

7/1/14

המשך שיעור 13

בניית הלמה: מהלך נשים לב שקיים $\delta>0$ כך שלכל שני נקודות ב $z,z'\in Q$ שקרובים מספיק כפי δ מתקיים $Re\frac{h(z')}{h(z)}>0$ [מרכיבה במ"ש]

בר"כ $\delta=1/k$ כאשר $k\in\mathbb{N}$.



ע"י בונים של h לקטע $[0,1]\times\{0\}$ ומרחיבים מפה מישרית של הלמה נמצא שקיים פונ'

$\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}$ כזאת כך ש $h=e^{\varphi}$ על $[0,1]\times\{0\}$. נשלוק את φ לפונ' $\varphi:[0,1]\times[0,\delta]\to\mathbb{C}$ כך ש: $\varphi(t,s)=\varphi(t,0)+Log\frac{h(t,s)}{h(t,0)}$.

נשלוק להרחיב את φ. אם φ מוגדרת על $[0,1]\times[0,\delta k]$ אז נגדיר אותה על $[0,1]\times[0,\delta[k+1]]$ בעזרת $\varphi(t,s)=\varphi(t,\delta k)+Log\frac{h(t,s)}{h(t,\delta k)}$ כאשר $k=k$! נקבל פונ' רציפה $\varphi:Q\to\mathbb{C}$.

כל פעם שמחיבים את הפונ' לעיל שלם היא מגדרת עם הקבועים על השפה ורציפה בשלם המלבן, כי קיים לוג ! כי יש תמיד מצד ימין של הגדר המשוואה כי ראינו שבשלם עשינו קצת חלק המשוי תמיד חיובי.

למה ב: יהי $G\subseteq\mathbb{C}$ תחום, נניח כי $\gamma_0,\gamma_1:[0,1]\to G$ סגורות הומוטופיות ב G אז לכל $z\in\mathbb{C}\setminus G$ אז $ind_{\gamma_0}(z)=ind_{\gamma_1}(z)$

הוכחה: בשביל נוכח למה ב והבנאנו ההומוטופיה של שלבי קושי: כי אם γ_0,γ_1 הומוטופיות ב G אז למה ב הגיון פרקטי שווים לכן $ind_{\gamma_0-\gamma_1}(z)=0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus G$ לכן מבינים הומוטופיה של שלבי קושי ונקבל

$$\int_{\gamma_0}f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz \leftarrow 0=\int_{\gamma_0-\gamma_1}f(z)dz$$

[הוכחה נקבל ל ברגע סגורה נקודה מתבשם לנו כמובנה, ר האינטגרל לא שווים]

בניית למה ב:

יהי γ_0,γ_1 הומוטופיות לכן קיימת הומוטופיה $\gamma:[0,1]\times[0,1]\to G$ כמו γ_0 ! γ_1

עשה: $h(w)=\gamma(w)-z$ אז $h\in C(Q)$, $h(z)\neq0$! לכל $w\in Q$ כאשר $z\in\mathbb{C}\setminus G$

לפי למה 1 קיימת $\varphi\in C(Q)$ כך ש $h=e^{\varphi}$. נסמן $\gamma_s(z)=\gamma(z,s)$ לכל $0\le s\le1$ אז מתקיים

$$ind_{\gamma_s}(z)=\frac{1}{2\pi i}[\varphi(1,s)-\varphi(0,s)]$$

[כי φ זו הפונקציה הרציפה המוגדרת לכל הנקודות בזה הלמה הקודמת]

לכן $s\mapsto ind_{\gamma_s}(z)$ זו פונ' רציפה ב $[0,1]$

19/1/7

הרצאה שיעור 13

יש $s \mapsto ind_{\gamma_s}(z)$ רציפה, ומקבלת ערכים שלמים, יש קבועה!

יש $ind_{\gamma_0}(z) = ind_{\gamma_1}(z)$; משל.

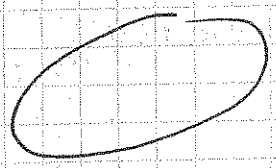
⊗ יש עקומה כלשהי, הומוטופית לעקומה, יש האינטגרל שלה אפס, כמה האינטגרל של העקומה.

תחומים פשוטי קשר

הגדרה: יהי $G \subseteq \mathbb{C}$. תחום G נקרא פשוט קשר אם כל עקומה סגורה $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ הוא כלשהי ב G.

דוגמאות:

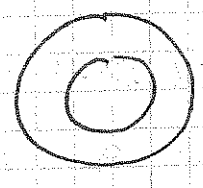
⊗ תחומים הבאים



. כל שני עקומות, γ_0, γ_1 הן הומוטופיות ע"י הומוטופיה לינארית.

⊗ **תחום כוכבי:** תחום G נקרא תחום כוכבי אם קיים $z_0 \in G$ כך שלכל $z \in G$ הקטע $[z, z_0] \subseteq G$

⊗ כאלה



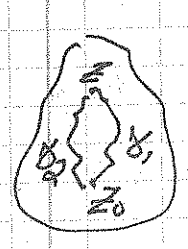
הוא אינו פשוט.

טענה 1:

G תחום פשוט קשר, $f \in Hol(G)$, אז לכל עקומה סגורה $\gamma \subseteq G$! $\int_\gamma f(z)dz = 0$ כי כולן הומוטופיות לעקומה הקבועה.

טענה 2: G תחום פשוט קשר אם לכל f הלומורפית ב G קיים פונ' קדומה $F \in Hol(G)$; כך $F'(z) = f(z)$.

נימוק: $F(z) = \int_\gamma f(\xi)d\xi$; עבור $\gamma(0)=z_0$, $\gamma(1)=z$. אין תלות לבחירת γ, כי אם יש אחר נוסף אז ביחס כל עקומה סגורה ולכן האינטגרלים שווים, כי האינטגרל אפס כי זה פשוט קשר.



טענה 3: G תחום פשוט קשר, $f \in Hol(G)$! $f \neq 0$ ב G אז קיים $g \in Hol(G)$ כך ש $e^g = f$; וקיים $h \in Hol(G)$ כך ש $h^2 = f$

הוכחה מסקנה 3: נקבע z_0 נקודה ב G ונגדיר $g(z)=\int_{\gamma}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi+C_0$

כך ש $C_0\in\log f(z_0)$

! $\gamma(0)=z_0$; $\gamma(z)$ והאינטגרל לא תלוי בדרך, עבור אבן מגדיר פונ' הלומר

ומתקיים $g'(z)=\frac{f'}{f}$. כמו כן מתקיים $(fe^{-g})'=0$ ולכן $f=C\cdot e^{g}$

חזרו אחורה...

! מהותית C_0 מתקיים $C=1$

מלמה הסתכלה של רימן:

$G\subsetneq\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, ! $z_0\in G$ אז קיימת התאמה הלומרפ

חח"ע ועל $f:G\to D$ כאשר D גם עגול היחידה

כך ש $f(z_0)=0$ $[D=\{|z|<1\}]$

ועל שכיח כאלה נמצאת בדיוק בקבוצה ב כך ש $|a|=1$

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\int_{[z_0,z]}\frac{\frac{f'}{f}}{z-z_0}\longrightarrow$$

אבל קיים ולכן

גם אחר...

הפונ' הנ"ל אינה חלק ומאפס

7/1/14

הגדרה שנוכל לבנות

הגדרה: הרבו שגם הפונקציה f הלו' חח"ע ועל $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

היא מהצורה $f(z)=az+b$.

הערה: אם f פולינום אז $f(z)=\sum_{n=1}^{m}a_nz^n$ ומשום שהוא חח"ע

נקבל בהכרח כי $f'\neq 0$ אבל f' פולינום, ולכן משום שאינו מתאפס

הוא קבוע, לכן $f=az+b$

פונ' הוא חח"ע מקומית אבל הנגזרת לא מתאפסת

אבל f הלומרפי אז $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, כאן f אינה פולינום, בפרט

$f(\frac{1}{z})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{z^n}$ יש סינגולרית עיקרית באפס, כי יש אינסוף מקדמים שלילי

בטור לורן, לכן אינסוף סינגולרית עיקרית של f.

לכן בסביבת אפס

התמונה של $f(\frac{1}{z})$ בפרט. לעומת התמונה של $\{|z|>1\}$ ע"י הפונ f

הוא בפרט ב $\mathbb{C}$. אבל מלמה local mapping theorem התמונה של הקבוצה פתוחה

ע"י פונ' הלומרפית הוא פתוח. [שלא כמו פולינום לא ברור שהפולינום אינו מתאפס]

לכן התמונה של $\{|z|<1\}$ ע"י f הוא פתוח ומחיצה התמונה של $\{|z|<1\}$! $\{|z|\geq 1\}$

גבול, וכן סותרת כי קבוצה פתוחה וקבוצה בפרט אינם גבול.

לכן פונ' חח"ע ועל מהמשור לעצמו הוא לינארי.

לשון שלילי שלא מתאפס $f\neq 0$

7/1/14

המשך תרגיל 13

אוטומורפיזמים של פיסת היפרבולי:

לכל $a\in D$ נגדיר $\varphi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. אפשר לראות כי מתקיים

1) φ_a מע"ל ועל מ D ל D!

2) $\varphi_a = (\varphi_a)^{-1}$

3) φ_a מעתיקה ∂D ל ∂D!

4) $\varphi_a(a)=0$; $\varphi_a'(a)=\frac{1}{1-|a|^2}$; $\varphi_a'(0)=1-|a|^2$

⊖ כל האוטומורפיזמים של D הם $e^{i\theta}\varphi_a(z)$

לעזר של שוורץ: אם $f\in H(D)$! $|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D$! $f(0)=0$

אזי $|f'(0)|\le 1$! $|f(z)|\le|z|$ ואם $|f'(0)|=1$ אז $|f'(w)|=|w|$

אם $w\neq 0$ אזי $f(z)=e^{i\theta}z$

תרגיל: תהי f אנליטית בדיסק $|f(z)|\le 1$! בתוך D ובנקודה $f(\frac{1}{2})=0$.

מצאו חסם גדול ביותר עבור $|f(\frac{3}{4})|$ [לעזר שוורץ חיפוש חשבון]

פתרון: נגדיר פונ' עזר $g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{\varphi_{1/2}(z)} & z\neq\frac{1}{2}\\ 3/4\,f'(\frac{1}{2}) & z=\frac{1}{2}\end{cases}$

אזי g הולומורפית בדיסק, כי $\varphi_{1/2}$ מתאפס רק ב $\frac{1}{2}$, ומתקיים $\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{\varphi_{1/2}(z)}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{f'(z)}{\varphi_{1/2}'(z)}=\frac{f'(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{3}{4}f'(\frac{1}{2})$! לכן הגבול קיים ! לכן הפונ' רציפה.

לפי תכונה של $\varphi_{1/2}(z)$ מתקיים $\lim_{z\to\partial D}|\varphi_{1/2}(z)|=1$ לכן לכל $\varepsilon>0$ אם r קרוב מספיק ל 1 נקבל

$$|g(z)|\le\frac{|f(z)|}{1-\varepsilon}\le(1+2\varepsilon)|f(z)|\le 1+2\varepsilon$$ עבור $r<|z|<1$

⊖ נזכיר לך ש $\varphi_{1/2}$ גם הוא פונ' כמו f, והוא מספר חסם, לכן אוסרים!

אבל הפונ' ε לכל ε, ! לכן מעקרון המקסימום במעגל ברדיוס r $|g(z)|\le 1+2\varepsilon$

! לכן $|g(z)|\le 1$ (כי ε שרירותי) בכל D. לכן $|f(z)|\le|\varphi_{1/2}(z)|$

ובפרט $|f(\frac{3}{4})|\le\underbrace{|\varphi_{1/2}(\frac{3}{4})|}_{2/5}$.

תרגיל: נתון $f\in H(D)$! $|f(z)|<1$ בכל D. הראו כי $\max|f'(\frac{1}{3})|$ על פני כל הפונ' שמקיימות הנחות אלה $f(\frac{1}{3})=0$.

7/1/14

הערה: נראה כי אם $f(\frac{1}{3})\neq 0$ אז יש g כך ש g מקיים התנאים!
$|g'(\frac{1}{3})|>|f'(\frac{1}{3})|$ בהתאמה. נניח השלמה $\alpha=f(\frac{1}{3})\neq 0$

נשקול פונ' עזר $g(z)=(\varphi_\alpha\circ f)(z)$. מכיוון ש $|f(z)|\neq 1$ אז $|g(z)|<1$
כי φ מאבד פנים המעגל לפנים המעגל! לכן $g(z)$ מקיים קנון. נחשב נגזרת ב$\frac{1}{3}$.

$$g'(\tfrac{1}{3})=\varphi'_\alpha(\underbrace{f(\tfrac{1}{3})}_{\alpha})\cdot f'(\tfrac{1}{3})=\frac{f'(\frac{1}{3})}{1-|\alpha|^2}$$ $\leftarrow$ לכן $g'(\frac{1}{3})>f'(\frac{1}{3})$ כי $|\alpha|\neq 0$

בהתאמה...

מעבר לכך ניתן לבדוק שהחסם האפשרי אכן מתקבל ע"י $\varphi_{1/3}$. מבאים תמונת
לשקול הקופסא כי לכל $f\in H(D)$, $|f|\leq 1$, $f(\frac{1}{3})=0$! מתקיים כי

$$\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left|\frac{\varphi_{1/3}(z)}{z-\frac{1}{3}}\right| \geq \lim_{z\to\frac{1}{3}}\left|\frac{f(z)}{z-\frac{1}{3}}\right|$$

$\leftarrow$ כי ראינו שב$\frac{1}{3}$ הם מאפסים המקסימום

; לכן $|f(z)|\leq|\varphi_{1/3}(z)|$ $\leftarrow$ הם מהגבול הקופסא...

$$\frac{9}{8}\overset{?}{=}|\varphi'(\tfrac{1}{3})| \geq |f'(\tfrac{1}{3})|$$

8/1/14

שיעור לבוא 13

משפט המתקן של רימן: אם G פשוט קשר, $z_0\in G$ אז קיים התאמה הולומורפית
חח"ע ועל $f:G\to D$! $f(z_0)=0$; וכל שני פונ' כאלה נבדלות בכפל בקבוע.
אם נבחרת גם $f'(z_0)>0$ אז הפונ' יחידה.

הוכחה של היחידות:

יהיו f_1,f_2 שני פונ' הולומורפיות חח"ע ועל מ D! $f_1(z_0)=f_2(z_0)=0$
נגדיר $\varphi=f_1\circ f_2^{-1}$; אזי $\varphi:D\to D$ חח"ע ועל והולומורפית
! $\varphi(0)=0$ לכן לשלמה שורש נגזרת כי $|\varphi'(0)|\leq 1$; באופן דומה
$|\frac{1}{\varphi'(0)}|=|(\varphi^{-1})'(0)|\leq 1$ לכן $|\varphi'(0)|=1$! לכן יש שוויון לשלמה שורש! לכן $\varphi(z)=\lambda z$
כאשר $|\lambda|=0$! לכן $f_1(z)=e^{i\theta}f_2(z)$

כלל:

$$f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi}\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)-w}\,dw$$

כאשר ξ f חח"ע ב B_ξ

כלל הרחבת הקיום: נניח כי $f:G\to D$
חח"ע ועל! $g:G\to D$ שגם הולומורפית ב G
! $f,g(z_0)=0$ אז $|g'(z_0)|\leq|f'(z_0)|$
הוכחה: $\varphi:g\circ f^{-1}:D\to D$! $\varphi(0)=0$ אז לשלמה
שורש $|\varphi'(0)|\leq 1$ בגלל $|g'(z)|\leq|f'(z_0)|$

לכן המקרה של הנקבת מתקבל כשהפונ' חח"ע ועל. לכן בגלל הנגזרת האנטיבוליות לכל
לכל $H(z_0)=0$! $\leftarrow$ מתקיים הוא $H:G\to D$ שמקיים $|H'(z_0)|$

9/1/14

המשך שיעור 13

אוסף של תחומים הומולוגי קושי

הגדרה: $X \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ קשירה אינ"מ כל פונ' $f: X \to \mathbb{C}$ הקבועה מקומית הינו הומולוגית לאפס.

הגדרה: $X \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ קשירה אינ"מ $h \in \mathcal{O}(X), h: X \to \mathbb{Z}$, ו-$h$ הומולוגי.

הגדרה:

X אינה קשירה אינ"מ קיים X_1, X_2 כך ש $X = X_1 \cup X_2$

! $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$! $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ כך שאין

סופרה ב X_1 שנגעה ב X_2 ! אין סופרה ב X_2

שנגעה ב X_1, כלומר $X_2 \cap \overline{X_1} = X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset$.

הערה: אם X סגורה אז בפירוק כנ"ל לפחות אחת X_1, X_2 סגורה. [בכוח...]

טענה:

יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) G הומולוגי קושי

(ב) לכל פונ' הולומורפית יש קדומה ב G

(ג) לכל $z \in \mathbb{C} \setminus G$ יש סעיף הולומורפי של $\xi \mapsto \log(\xi - z)$ ב G.

(ד) לכל עקומה סגורה $\gamma \subseteq G$ ולכל $z \in G \setminus \mathbb{C}$ מתקיים $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$

(ה) $G \setminus \mathbb{C}$ קבוצת קשירות.

הוכחה:

(א) ← (ב) ← (ג) ראינו כבר.

(ג) ← (ד): קיים סעיף של $f(\xi) = \log(\xi - z)$ הולומורפי ב G. אם γ עקומה סגורה ב G אז

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z} = \mathrm{ind}_\gamma(z)$$

כי הפ' הולומורפית

(ד) ← (ג): נניח כי $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$! γ סגורה ב G.

נגדיר $f(w) = \int_{w_0}^{w} \frac{d\xi}{\xi - z} + C_0$ כאשר $w_0 \in G$; $C_0 \in \log(w_0 - z)$

לא תלוי בדרך! שנמצא, כי ההבדל בין כל אינטגרלים הם בדיוק אינטגרלים לכן מתבטל בגלל אפס!

לכן כמו קודם נקבל ש $f(w)$ סעיף אינטגרלי של $\log(\xi - z)$ ב G.

9/1/14 — בעזרת שיעור 13

(ד) ← (ג): נניח כי $\hat{\mathbb{C}}\setminus G$ קבוצה קשירה. אם נקבע מקומית סביבת $G \supseteq z_0$ כך שלא הפונ' $z \mapsto ind_\gamma(z)$ רציפה על $\hat{\mathbb{C}}\setminus G$ ומקבל $|z|$ אפשר הוא שאפשר. נשתמש אז ב $\hat{\mathbb{C}}\setminus G$ ע"י ש אם עובר לשלם. זו פונ' רציפה לשלמים ובאינטגרל שאפשר. לכן זו פונקציה שהיא כמעט אפס לפי תיאוריה של מחזור קשורה.

יתר המעגל: (ב) ← (א) ; (א) ← (ד)

בפרוך כמו (ב) ← (ג) אפשר להראות שלכל $f \in Hol(G)$! $f \neq 0$ קיים פולינום אלפים של $\log f$ [מכפלה הומולוגית של שלם קטן] ומכן אפשר להשתמש במשלים הסיבתי של כיוון לכן קיים $\varphi: G \to D$ חח"ע ועל הומאומורפי ! אם G הומאומורפי לפסים לכן פשוט קשיר.

14/1/14 — שיעור שלישי 14

פונקציות הרמוניות:

הגדרה: $Harm_{\mathbb{C}}(G) = \left\{ h: G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} h \in C^2(G) \\ \Delta h = 0 \end{array} \right\}$ עבור $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

(*) $Harm_G = Harm_{\mathbb{R}}(G)$

(*) כמו כן $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ בשלב: $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

(*) פונ' הולומורפית בG הן הרמוניות.

(*) אם f הולומורפית אז גם Imf וגם Ref הן פונ' הרמוניות משלים.

(*) $u \in Harm_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} \in Hol(G)$

$\boxed{u \text{ משלים}}$

אבחנה: אם $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום פשוט קשיר ! $u \in Harm(G)$ אז קיימת f הולומורפית בG כך ש $u = Ref$.

הוכחה: נגדיר $g(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z}$; אז g הולומורפית בתחום G, וגם G פשוט קשיר, לכן יש קדומה f הולומורפית בG כך ש $f' = g$. בנוסף $f(z_0) = u(z_0)$ ע"י הנחה קבוע. נסמן $f = u_1 + iv_1$ לכן

$g = f' = \frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - i\frac{\partial v_1}{\partial y} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow u_1 = u$

$\boxed{\text{בגלל שהגדרנו g הרי הגדרנו אותה מהנגזרת}}$

$\boxed{\text{כי אם כאן יהיה וקיבלנו עקבות}}$

14/1/14

המשך שיעור 14

טענה: $u\in Harm(G)$ ← לכל $z\in G$ קיים סביבה $U_z\subseteq G$ וקיים $f\in Hol(U_z)$ כך ש $u=Re f$ ב U_z

מסקנה: אם $u\in Harm(G)$! $f:\mathbb{U}\to G$ הולומורפית אז $u\circ f\in Harm(\mathbb{U})$

טענה: $Harm(G)\subseteq C^\infty(G)$, כי היא חוק מנוי של הולומורפיות סביבה, ולכן גזירה אינסוף פעמים.

טענה: $u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta$ לכל $0<\rho<dist(z_0,\partial G)$!

הדגמה. עדיין נכון כי הולומורפיות מקיימת גזירה.

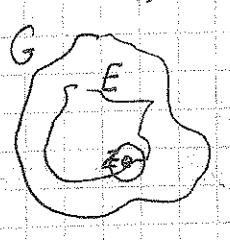
מסקנה 5:

$u_1,u_2\in Harm(G)$ וקיים קבוצה פתוחה $V\subseteq G$ כך ש $u_1=u_2$ על V אז $u_1\equiv u_2$

הוכחה: נסמן $u=u_1-u_2$ אז $u|_V$. נגדיר $E=\{z\in G \mid u(z)=0\}$

לכן $Int(E)\neq\emptyset$. אנו נראים כי $G=Int(E)$ כי זו הנחה

ב $G\neq Int E$. אזי $G\cap\partial(Int E)\neq\emptyset$



[כי אחרת $G\subseteq int E \cup ext(Int E)$ אבל זה לא יתכן כי G מחובר לכן קשיר]

יהי $z_0\in G\cap\partial(Int E)$. נניח שיש תחום $D_{z_0}\subseteq G$ שם מרכז ב z_0

[לפי הגדרת הרציפות] לכן קיים שורש הולומורפי ב D_{z_0} כך ש $u=Re(f)$ ב D_{z_0}.

! $D\cap Int(E)$ היא קבוצה פתוחה, לכן $Re f=0$ לכן f מקיימת

לכן הנחה קבועה. לכן $f=iC$ בפיסוק קבוע שאינו ב $D\cap Int(E)$ ואז

מאחר היחידות f קבועה בכל D, לכן $u=0$ על כל D, ואז z_0 נמצא

בפנים, ובגלל פתוחה, כי בגלל ש z_0 בפנים.

מסקנה 6: יקרין מקסימום/מינימום. יהי $\bar{G}\subseteq G$ חסום ! $u\in Harm(G)$

$u\in C(\bar{G})$! $u\not\equiv Const$! אזי לכל $z\in G$ מתקיים

$$\min_{\bar{G}} u<u(z)<\max_{\bar{G}} u$$

[אבל G קשיר לכן $k=\emptyset$]

הוכחה: $k=\{z\in G \mid u(z)=\max_{\bar{G}} u\}$ אז מסתיים עם הנחה שקבוצה k קבוצה פתוחה ! $\forall z\in G$

[מינימום באותה הדרך]

14/1/14

הגדרה: יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום חסום. $u \in Harm(G)$ אם $u \neq Const$! ו $u(z) < \overline{\lim_{\substack{\xi \to \partial G \\ \xi \in G}}} u(\xi)$ לכל $z \in G$.

הגדרה: $u \in Harm(G_+)$ פונ' חסומה כשיפור ב $G_+ \cup \mathbb{R}$ ו $u|_{\mathbb{R}} \leq 0$! אם $u \leq 0$ ב G_+ ; כלומר G_+ גם תחום מישור פשוט.

[מה אם u לא חסומה?]

⊖ נסמן $D_R = \{|z| < R\}$. נניח כי f הולומורפית ב D_R ורציפה בסגור. מנסה לקבל נוסחא כי לכל $z \in D_R$, גם נסמן z^* את הנקודה הסימטרית ל z ב D_R ! ; $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}}$ אזי $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

נכון כן $0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi$. משלב זה, כי צ פונ' אנליטית בפנים.

נחסר השוויונות אחד מהשני ונקבל

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z^*}\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(\xi)\cdot\frac{z - z^*}{(\xi - z)(\xi - z^*)} d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\cdot\frac{(z - \frac{R^2}{\bar{z}})e^{i\theta}R}{(Re^{i\theta} - z)(Re^{i\theta} - \frac{R^2}{\bar{z}})} d\theta =$$

פלשבנת...

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\frac{R^2 - z\bar{z}}{(Re^{i\theta} - z)(Re^{-i\theta} - \bar{z})} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\frac{R^2 - |z|^2}{\underbrace{|Re^{i\theta} - z|^2}_{\text{מנה...}}} d\theta$$

לפי הנוסחה הזו אוטומטית מובטח שפתרון מנה לפתרון המשוואה.

מסקנה: נוסחת פואסון:

אם $u \in Harm(D_R)$ ורציפה ב $\overline{D_R}$ אז לכל $z \in D_R$ מתקיים

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2}$$

מסקנה: קיים f הולומורפית ב D_R כך ש $u = Re f$ ב D_R. נתון $0 < \rho < R$ כלשהו ונקבל

$$u(z) = \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2 - |z|^2}{|\rho e^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

ומרכזים u על הגלגל נשלח $\rho \to R$ ונקבל הנדרש עבור R.

14/1/14

נוסחת פואסון II

נוסחת פואסון: $f\in Hol(D_R)\cap C(\overline{D_R})$ כך ש $z\in D_R$ מתקיים

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\,\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}+i\,Im f(0)$$

כאשר $u=Re f$ הרמונית.

הוכחה: נגדיר

$$k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\,\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta$$

(נגדיר) אז $k\in Hol(D_R)$

$$\boxed{Re\left(\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}\right)=Re\left(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right)}$$

נאמר:

$\boxed{Re\ k \text{ הרמונית}}$ כי $Re\ k$ אינטגרל פואסון

ומתקיים $Re\,k=u=Re\,f$ [מאמצע 2]

$f=k+iC$ לכן!

עבור $C\in\mathbb{R}$. ומתקיים $k(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\theta})\,d\theta=Re(f(0))$

לכן $C=Im(f(0))$

הערה: הנחת הרציפות $f\in Hol(D_R)$! $Re f\in C(\overline{D_R})$.

בנוסף:

$$\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}\ \text{- גרעין פואסון.}$$

$$\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\ \text{- גרעין שוורץ.}$$

הערה:

1. $u\in Harm(G)$
   $u\le 0$!
   $u=Const$ אז
2. $f\in Hol(G)$
   $Re f=O(|z|^p)$!
   אז f גם פולינום מדרגה קטנה שווה p

(*) עבור D_1 מתקיים כי גרעין פואסון הוא

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

אינטגרל פואסון:

נסמן ב π את מעגל היחידה, $\pi=\partial D_1$ ונניח $H:\pi\to\mathbb{R}$ חסומה

ונגדיר לאינטגרל. $\left[P_r(\varphi)=P(r,\varphi)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\ ;\ h(\theta)=H(e^{i\theta})\right]$

$$P_H(z)\overset{def}{:=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H(e^{i\theta})\,\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\,d\theta=\int h(\theta)\,P_r(\varphi-\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

נוכיח כי $P_H(z)$ הרמונית כי Δ מתחלף עם אינטגרל.

$$\frac{\partial}{\partial x}P_H(x,y)=\int\frac{\partial}{\partial x}F(\theta,x,y)\,d\theta$$

$$F(\theta,x,y)=H(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

כי רציף בגבול θ, לעומת יש הנקודה בגבול. הגבול בהשפעה הגבול θ.

(אותו לחלקים) Δ (אינטגרל) $\Delta\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}=0$

17/7/14

תרגול שבוע 14

פונ' הרמונית: $u:G\to\mathbb{R}$! $u\in C^2(G)$ פונ' G תחום, כך ש $\Delta u=0$.

תכונות:

① $u\in C^\infty(G)$ ② $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta$ לכל $0<\rho<dist(z_0,\partial G)$

③ נוסחת פואסון. אם $u\in C(G)$ כך שלכל $z_0\in G$ קיים ρ כך שלכל $r<\rho$ מתקיים $u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$ אז u הרמונית ב G.

④ $u_1\equiv u_2$ על קבוצה פתוחה אז $u_1\equiv u_2$ בכל G.

⑤ G תחום חסום ! $u\in Harm(G)\cap C(\bar G)$, אם u לא קבועה $u(z)<\max_{w\in\partial G}u(w)$ לכל $z\in G$. ובפרט למינימום.

אינטגרל פואסון: תהי $u\in Harm(D)\cap C(\bar D)$ אז $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\varphi})\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\,d\varphi$ עבור D פיסקי היפרבולי. [בה"ל אפשר קונבולוציות עם גרעין טוב $u*P_r$]

תרגיל: $u_n:G\to\mathbb{R}$ סדרה של פונ' הרמוניות $u_n\xrightarrow{\text{במ"ש}}u$ מקומית ב G.

הוכחה: פונ' הרמונית ② $\frac{\partial u_n}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u_n}{\partial y}\to\frac{\partial u}{\partial y}$ במ"ש מקומית ב G.

פתרון:

א הפונ' u_n לכן u רציפה ב G. נראה כי u בעלת תכונת הממוצעים ולכן הרמונית.

תהי $z_0\in G$! $\rho>0$ כך ש $\overline{B(z_0,\rho)}\subseteq G$.

$$u(z_0)\xleftarrow{\text{נקודתי}}u_n(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(z_0+re^{it})\,dt$$

כי כל u_n הרמונית

אבל לכל $r<\rho$

$\xrightarrow{\text{מ"ש}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{it})\,dt$

מ"ש מתקבל כי $u_n\to u$ מ"ש על מעגל ברדיוס r

לכן סיימנו. [פונ' הגבול מקיימת!]

פונ' אנליטית הקבועה לפי הנחת המשוואה שלה

ב נוסחת שורש: עבור $f\in Hol(D)\cap C(\bar D)$! $u=Ref$ אז

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}u(e^{it})\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt+Im\,f(0)$$

14/1/4

הרצאה מס' 14

הרצאה סיכום: ב"ד הכללה ומסקנה ניתן לסכם מה נעשה בעזרת כלשהו לתיקון מעגל היחידה.

בכדור $B(z_0,\rho)$ יש פונ' אנליטית f_n כך ש $\operatorname{Re} f_n = u_n$.

ומתקיים

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\underbrace{u_n(\rho e^{it})}_{\text{המ"ש } u}\frac{\rho e^{it}+(z-z_0)}{\rho e^{it}-(z-z_0)}}_{\text{ביקבוצה חסומה } z\in B(z_0,\rho) \text{ ריבוי}} dt + \underbrace{i\,\operatorname{Im} f_n(0)}_{\text{ניתן לשנות לפי ירצה אלפה}}$$

מכיוון המ"ש ב z אפשר גם פונ' אנליטית לכן מתקיים לפונ' אנליטית.

לכן $\operatorname{Re} f_n \Leftarrow \underbrace{\operatorname{Re} f}_{=u}$ המ"ש מתכנסת! גם $f_n' \Leftarrow$ המ"ש מתכנסת! f'

$$\begin{cases} u_x \leftarrow u_x^{(n)} \\ u_y \leftarrow u_y^{(n)} \end{cases}$$

מסקנה חשובה:

בהינתן פונ' הרמונית על שפה של תחום, ורצה לחשב פונ' הרמונית בתחום שמתאפסת עם הפונ' הנתונה על השפה.

⊖ אפשר לעשות אותו הדבר גם לחצי מישור, כי הוא קונפורמי לעגל היחידה.

בעיה: הורחת את נוסחת פואסון לחצי המישור העליון G^+. כלומר נתון $u\in Harm(G^+)$ הרמונית רציפה על $\overline{G^+}$ אזי

$$z=x+iy \qquad u(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2}$$

16/1/14

שיעור שלמה 14

הגדרה: עבור מעגל היחידה נגדיר פואסון הוא $\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$

נסמן $\mathbb{T}=\partial D$! $H:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ רציפה קטעית ומוגדרת. נסמן $h(\theta)=H(e^{i\theta})$

אז

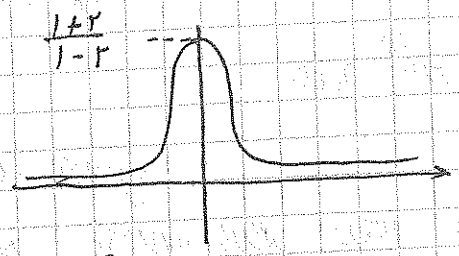
$$P_H(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)P_r(\varphi-\theta)d\theta \leftarrow$$

כאשר

$$P_r(\varphi)=P(r,\varphi)=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

$$z=re^{i\varphi}$$



תכונות של $P(\varphi)$:

$P\geq 0$ ⊛

$P(-\varphi)=P(\varphi)$ ⊛

$z\mapsto P(z)$ is פונ' הרמונית ⊛

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\varphi)d\varphi=1$ ⊛

$P_1=1$ [אינטגרל פואסון הוא 1 הרמונית] ⊛

$\max_{z\leq|\varphi|\leq\pi}P_r(z)\xrightarrow[r\to 1]{}0$ ⊛

$P_{H_1+H_2}=P_{H_1}+P_{H_2}$ ⊛

$P_H\in Harm(D)$ ⊛ ← תוצר שלישית לפונ' רציפה על השפה הופכת הרמונית בפנים.

משפט: (שורש)

$H\in C(\mathbb{T})$ אז $P_H(z)\to H(e^{i\theta})$ כאשר $z\in D\to e^{i\theta}$. תוצר P_H is פונ' הרמונית בתוך המעגל רציפה על השפה.

⊖ בנוסף, P_H גם הפתרון היחיד לבעיה הבאה שגם בתוך פונ' רציפה על פסקי סגור ליחידה פונ' הרמונית על הפנים שמתלכדת עם H על השפה.

הוכחה: נקבע $e^{i\theta_0}\in\mathbb{T}$. נבחר אפשר לחיות δ $H(e^{i\theta_0})=0$ [אפשר להניח, נקבל...]

נקבע $\varepsilon>0$ ונמצא $\delta>0$ כך ש $|\theta-\theta_0|<\delta\to|H(e^{i\theta})|<\varepsilon$ [מרציפות]

נסמן $I_1=\{e^{i\theta}\mid|\theta-\theta_0|<\delta\}$! $I_2=\mathbb{T}\setminus I_1$ ונרשום

$$H_2(\xi)=\begin{cases}0 & \xi\in I_1\\ H(\xi) & \xi\in I_2\end{cases}\qquad H_1(\xi)=\begin{cases}H(\xi) & \xi\in I_1\\ 0 & \xi\in I_2\end{cases}\qquad H=H_1+H_2$$

$|H_1|<\varepsilon$

מתקיים $-\varepsilon\leq H_1\leq\varepsilon$ מתקיים $|P_{H_1}|\leq\varepsilon$!

$$P_{H_2}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|\geq\delta}H(e^{i\theta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\theta$$

16/1/14

המשך שיעור 14

P_{4_2} רציפה ב ∂D ומתאפסת ב I.

בפרט $\lim_{z\to e^{i\theta_0}} P_{4_2}(z)=0$. לכן טיימנו כי ε שרירותי.

מסקנה:

אם $G\subseteq\mathbb{C}$ תחום, $u\in C(G)$ כך ש $z_0\in G$ קיים $P_0(z)$ כך שלכל $0<r<\rho_0$

$$(*)\quad u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

אז u הרמונית.

תזכר פונ' הרמונית אמיתית מקיימת תכונת הממוצע.

הוכחה:

$(*)\leftarrow$ מקרן מקסימום/מינימום בכל $\overline{D}\subseteq G$ מעגל.

יהי u מקיים את תכונת הממוצע. $u_1\in C(\overline{D})$ פתרון $\Delta u_1=0$! בכל כך ש $u|_{\partial D}=u_1|_{\partial D}$.

לכן $u-u_1$ מקיים את $(*)$ ומאפס בשפה ומקיים מקרן מקס' מינימום אפס בכל המעגל. לכן $u=u_1$ בכל המעגל! [בשיעור קרן...]

תזכר u הרמונית מקומית לכן הרמונית בכל המחוז. כי פונ' קבועה מקומית היא קבועה גלובלית.

דוגמא: $a\in\mathbb{C}$, $0<\rho$, $D^*=\{z\mid 0<|z-a|<\rho\}$! $u\in Harm(D^*)$

ונראה שיש קיים הפתרון הרמוני שבו הפיסוק באופן הרמוני.

פתרון: $u_\varepsilon=u-u_1+\varepsilon\log|z-a|$ + מקרן מקסימום

פתרון לפרטלי

דוגמא: אינטגרל Poisson מצ' מישר: $P(z)=\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}$

ואם $h\in C(\mathbb{R})$ אז נגדיר

$$P_h(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\frac{h(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt$$

ברור לבדוק כי P_h הרמונית מצ' מישר הפלגים.

כל פונ' הרמונית לעגול הרמונית