

15/10/13

אם החתום:

אצא

lerobuh@post.tau.ac.il

www.math.tau.ac.il/~lerobuh

מספר  
430  
פנימי למאג

לימוד 1

מספרים מרוכבים:

החברה ב  $\mathbb{R}$  למי  $x^2 + 1 = 0$

לזאת מנסים להוסיף  $\mathbb{R}$  את השורש  $i$

$x^2 + 1 = 0$ , נסמן  $i$  להיות השורש  $i^2 = -1$

$x^2 + 1$

מקן נקודות מספרים מרוכבים  $a+bi$  כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$

(\*) ויש סגור לחיבור  $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

יחסים זכוכ וקומפטיביות

(\*) יש סגור לכפל:  $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

הערה: נקודת  $i$  נוספה פורמלית, קיים  $i^2 = -1$  ב  $[\text{השלם הריבועי}]$   $i$   $i^2 = -1$

הערה: אם  $\mathbb{C}$  פולקס  $\mathbb{C}[x]$  יהיה פתון, והוא יתכן למצוא קטגוריה,  $[\text{השלם הריבועי}]$   $i^2 = -1$

לדבר: את המספרים המרוכבים  $\mathbb{C} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$  נסמן  $i$   $i^2 = -1$

(1)  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

(2)  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

הערה:

לדבר: שאלות חוק  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ ,  $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

יש  $(1, 0)$  הוא היחידה  $(0, 0)$  !  $(0, 0)$  הוא גם האפס

(\*) נקודות  $\mathbb{C}$  הוא שפה

הערה: מק קטגוריה את המספר ההפוך  $[\text{השלם}]$   $i^2 = -1$

יהי  $(a, b) \in \mathbb{C}$  (חל)  $(x, y) \in \mathbb{C}$   $(a, b)(x, y) = (1, 0)$   $\text{pp}$

$(ax - by, ay + bx) = (1, 0) \rightarrow ax - by = 1 ; ay + bx = 0 \rightarrow ay = -bx$

15/10/13

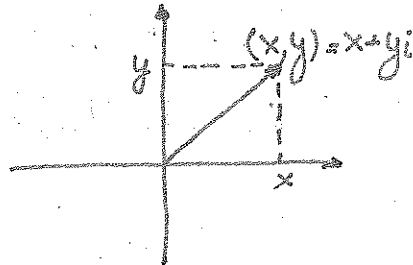
# המשפט הראשון

$$(a,b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \quad \text{pp}$$

$x \in \mathbb{C} \rightarrow x$  נקראת וקטור  $x = (x, 0)$  אם  $x \in \mathbb{R}$  ~~אז~~  $x = (x, 0)$    
 $x + yi = (x, y) \in \mathbb{C}$  pp ;  $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$    
 ומה יהיה הסתם לעומת

## המשפט השני: [Gauss]

המשפט השני מראה שכל וקטור ב  $\mathbb{R}^2$    
 [כל וקטור מראה שכל וקטור ב  $\mathbb{R}^2$ ]



⊛ עבור  $z \in \mathbb{C}$ , האורך של הוקטור המצביע יסומן  $|x + iy| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

⊛ עבור  $z = x + iy$  נמו,  $\text{Re}(z) = x$  ;  $\text{Im}(z) = y$

⊛ המשפט השלישי: עבור  $z = x + iy$  יש  $\bar{z} = x - iy$  [המשפט השלישי]

המשפט הרביעי: אם  $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$  (א)  $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  (ב)

(ג)  $\text{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  (ד)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  (ה)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  (ו)

(ז)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  (ח)  $z_1, z_2 \neq 0$  הם הפיכים אחד לשני

לכל  $z_1, z_2$  מתקיים  $z_1 \bar{z}_2$  ממשי חיובי.

הן אם  $z$  הוא בורל ופונקציה ממשיים, אם  $z$  הוא בורל.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{כל - שוויון המשולש}$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{כי} \quad \text{Re}(x) \leq |x| \quad \text{[קטור]}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \leftarrow \quad |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \quad \text{pp}$$

אם יש שוויון? כאן  $z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+$  [כי אם הם שווה לעומתה] צה אחר

ומה מראה שכל  $z_1 \bar{z}_2$  [אם הוקטור] ~~הוא~~   
 מראה שכל

15/10/13

# 1. מרחב המרוכב

הקדמה

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

הוכחה: נניח

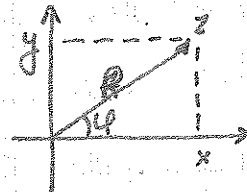


הצגה אלגוריתמית

הצגה אלגוריתמית של  $z$  נקראת  $arg z$

$$\varphi = arg z$$

$$r = |z|$$



$$\varphi = arg(z)$$

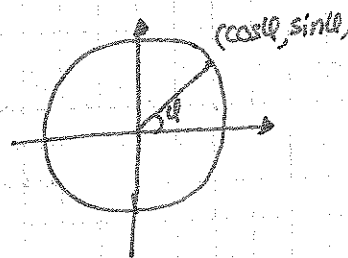
הזווית בין הציר הריאלי החיובי לוקטור  $z$  נקראת  $arg z$

$$z \mapsto (r, \varphi)$$

פ

$$z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

פ



הצגה אלגוריתמית

$$arg(\bar{z}) = arg(z^{-1}) = -arg z$$

הוכחה

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2))$$

$$= z_1 z_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$[De-Moivre] (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

פ

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi); w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ אז } z^n = w$$

הוכחה

$$n\varphi = \theta + 2\pi k; r^n = r$$

$n\varphi = \theta$

$$z^n = w$$

פ

$$k=0, \dots, n-1 \text{ אז } \varphi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}; r = r^{1/n}$$

פ

$$z_k = r^{1/n} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$$

פ

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0 \text{ ; } \omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

הוכחה

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \omega^k = ?$$

פ

[הוכחה של הטענה] : נניח  $z_n \rightarrow z$

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

$$z_n \rightarrow z \text{ ; } |z_n - z| \rightarrow 0$$

$$\exists \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \rightarrow |z_n - z| < \epsilon$$

15/10/13

# תורת המספרים

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

כדור פתוח

$$\bar{B}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$$

כדור סגור

אם  $A \subset \mathbb{C}$  אז  $A$  מקובצת

נקודה פנימית:  $z \in A$  כך שלכל  $r > 0$  בלתי פור  $B(z, r) \subset A$

int(A) איחוד קבוצות הנקודות הפנימיות של A

נקודות חיצוניות: נקודה פנימית של המשלי

$$\text{ext}(A) = \text{int}(\bar{A})$$

נקודות גבול: שייך לאי הנקודה, אבל לא פנימי

$$\partial A = (\text{int} A \cup \text{ext} A)^c$$

אם  $z \in \partial A$  אז לכל כדור סביב  $z$  יש נקודה ב-A ונקודה ב- $A^c$

אם  $z \in \partial A$  אז  $z \in \bar{A}$  ויש נקודה ב- $A^c$ ...

נקודה פנימית: קבוצה של נקודה של פנימי

נקודה סגורה: קבוצה של נקודה של פנימי

אם  $A \subset \mathbb{C}$  אז הסגור  $\bar{A}$  הוא איחוד הנקודות הפנימיות של A

כל הנקודות הפנימיות של A

נקודות הגבול של A

סגור

$$\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \{z_k\}_{k=1}^\infty \subset A : \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z\}$$

כלומר מספר מה האיחוד של נקודות הפנימי של A

נקודה פנימית

A מקובצת ופנימית אם קיים  $R > 0$  כך  $A \subset B(0, R)$

נקודה פנימית

תהי  $z_k \in A$ ;  $k \in \mathbb{N}$  והגדיר  $z_k = z_k$

(1)  $\{z_k\} \subset A$  ויש מ- $A$  סדרה מתכנסת ל- $z$

(2)  $z \in A$  כי אם  $z \in A$  ויש מ- $A$  סדרה מתכנסת ל- $z$

(3)  $z \in A$  סגורה (פנימית)

אם  $z \in A$  אז  $z \in \bar{A}$  ויש נקודה ב- $A^c$ ...

כדור פתוח:  $A \subset \mathbb{C}$  נקודה פנימית של פנימי

1. 10. 2020

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y) = d(A, B) = d(a^*, b^*) \quad e$$

[...Bspw  $a^* = 0, b^* = 1$  mit]

As

• קומפקט  $f(A) \leftarrow$  קומפקט  $A$  ולכן  $f: C \rightarrow C$   
 •  $f^{-1}(A) \leftarrow$  סגור  $A$

דליות

:  $\text{P}(\text{A})$   $\text{P}(\text{B})$   $\text{P}(\text{C})$   $\text{P}(\text{D})$   $G \subseteq C$

$a_0 = a_0, a_1, \dots, a_n = b$  ~~мы имеем~~  $a, b \in G$  ~~то есть~~ ~~мы имеем~~ ~~мы имеем~~  $\lambda$   
мы имеем в  $B$  по определению  $w(B); \{ta_i + (1-t)a_{i+1} | t \in [0, 1]\} \subseteq G$

... 31/10/72 ...

$V = G, U = Q$     sic     $Q = U^T V$      $G = U U^T$     ok (2)

[... ומה שיש לו שם  $G=U, V=Q$  ] 16

$(G, \beta)$  איז אן אפּוּרטיזאציע  $\leftarrow$  אפּוּרטיזאציע  $f: G \rightarrow R$  (

$$\forall a \in B \exists r > 0 : B(a, r) \subseteq B \quad \text{and} \quad f|_{B(a, r)} = c$$

15/10/13

מיכל כרמל

mic1@post.tau.ac.il

18-19

# 1. מספרים מרוכבים

הצגה אלגוריתמית:

$$i^2 = -1 \quad \text{וכן} \quad \mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

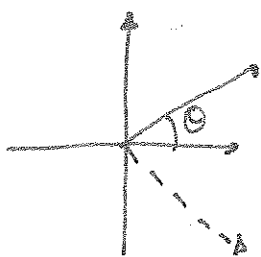
$$\operatorname{Im}(z) = y; \operatorname{Re}(z) = x \quad \text{כל} \quad z = x + iy \quad \text{ממ} \quad \mathbb{C}$$

הצגה טריגונומטרית:

$$[|z| = \sqrt{x^2 + y^2}] ; r = |z| \quad \text{כל} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

הזווית  $\theta$  נקראת  $\operatorname{Arg}(z)$  ונקבעת על ידי  $z$ .

$\operatorname{Arg}(z)$  נמצא בתחום  $[-\pi, \pi]$  ונקראת  $\arg(z)$ .



$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2\pi k \quad \text{כאשר } k \in \mathbb{Z}$$

הצגה טריגונומטרית של המספרים המרוכבים:

$$z = r \cdot e^{i\theta} \quad \text{כאשר} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

הכפלה של מספרים מרוכבים

הצגה טריגונומטרית של המספרים המרוכבים:  $z = r \cdot e^{i\theta}$

$$z = r \cdot e^{i\theta} \quad \text{כל} \quad z^5 = 1 - i$$

$$\sqrt[5]{2} e^{i(-\pi/4)} = z^5$$

$$\arctan(-1) = -\pi/4$$

$$\sqrt[5]{2} e^{i(-\pi/4)} = (r e^{i\theta})^5$$

$$r = \sqrt[5]{2} \quad \text{וכן} \quad r^5 = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{-\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5} \quad \text{כל} \quad 5\theta = -\pi + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{-\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \dots \quad \text{כל} \quad \theta = \frac{-\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$$

15/10/13

1 נסו לראות

$0 < a < \pi$  נסו  $\arg(e^{-ia} + 1)$  נק' של  $\arg$  :

$$\arctan \left( \frac{\operatorname{Im}(e^{-ia} + 1)}{\operatorname{Re}(e^{-ia} + 1)} \right) = \arctan \left( \frac{-\sin(a)}{\cos(a) + 1} \right) = \boxed{0 < a < \pi}$$

$$= \arctan \left( \frac{-2\sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{a}{2})}{2\cos^2(\frac{a}{2})} \right) = \arctan \left( -\tan\left(\frac{a}{2}\right) \right) = -\frac{a}{2}$$

נסו  $\arg(e^{-ia} + 1) = \frac{\cos a + 1}{\sin a} \geq 0$  נק' של  $\arg$  :

$|z|^2 = z\bar{z}$  נק' של  $\arg$  :

נסו  $x^2 + y^2 = a^2$  נק' של  $\arg$  :

$(1,0)$  נק' של  $\arg$  :

$z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  נק' של  $\arg$  :

$[... z\bar{z} = 1 \text{ נק' של } \arg]$  נק' של  $\arg$  :

$$z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{נסו } z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \text{ נק' של } \arg$$

$$z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\text{נק' של } z - \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} - \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$|z|^2 = 1$  נק' של  $\arg$  :

$\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| \frac{z}{|z|} - \frac{w}{|w|} \right| = \left| \frac{z}{|z|} - \frac{w}{|w|} \right|$  נק' של  $\arg$  :

$$\left| \frac{z}{|z|} - \frac{w}{|w|} \right|^2 = \left| \frac{z}{|z|} - \frac{w}{|w|} \right|^2$$

$$\left( \frac{z}{|z|} - \frac{w}{|w|} \right) \left( \frac{\bar{z}}{|z|} - \frac{\bar{w}}{|w|} \right) = \left( \frac{\bar{z}}{|z|} - \frac{\bar{w}}{|w|} \right) \left( \frac{z}{|z|} - \frac{w}{|w|} \right)$$

$$1 - z\bar{w} - w\bar{z} + |z|^2|w|^2 = 1 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2|z|^2$$

נק' של  $\arg$  :

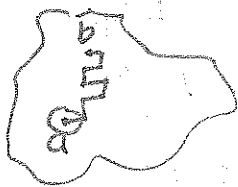


17/10/13

# תורת הקבוצות

א.  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  נניח כי  $G$  קבוצה פתוחה,  $f$  קבוצה מקומית.

תהי  $a \in G$ ,  $b \in G$  ניקח הסתרה נכונה



$\gamma: [0,1] \rightarrow G$  ק  $\gamma(0)=a$   $\gamma(1)=b$   
 (נהי שם  $t \in [0,1]$  מקיים  $f(\gamma(t)) = f(\gamma(0))$ )

נניח שיש  $t_0 \in [0,1]$  שם  $\sup$  ה  $f(\gamma(t))$   $t \in [0, t_0]$   $f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0))$   
 שם  $t \in [0, t_0]$  מקיים  $f(\gamma(t)) = f(\gamma(0))$

נניח כי  $0 < t_0$  כי  $f$  קבוצה מקומית וכן יש נקודה קצרה בגבול אולם

אם ניקח ישר  $\gamma(t_0)$  שם  $f$  קבוצה מה  $\gamma(t_0)$   $0 < \epsilon$

הכל  $\gamma(t_0)$  קיים  $\epsilon$  כך  $B(\gamma(t_0), \epsilon) \subseteq \gamma(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$

שם  $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$  מקיים  $t \in [0, t_0]$  שם

$$f(\gamma(t_0)) = f(\gamma(t)) = f(\gamma(0))$$

קבוצה מקומית...  
 [נניח שיש  $t_0$ ]

שם  $t_0 < t < t_0 + \epsilon$   $t \in [0,1]$  מקיים

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0)) = f(\gamma(0))$$

סומה אחרת  $t_0$  סבירימא, שם  $t_0 = 1$  שם  $f$  קבוצה שם האזור  
 ונניח גם. שם  $f$  קבוצה שם  $G$ .

ב. נניח שיש פונקציה מקומית  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  שם  $f$  קבוצה מקומית.

אז  $G = U \cup V$  שם  $U, V$  פתוחים זה בזה.  $U \cap V = \emptyset$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases} : f: G \rightarrow \mathbb{R}$$

קבוצה מקומית וכן  
 קבוצה מקומית  
 הסתרה

הקבוצה:  $G$  פתוח, שם  $G$  פתוח קבוצה קטנה  $A \subseteq X$  שם  $A$  מקומית שם מקומית.

תהי  $x \in A$  קבוצה. קבוצה  $A \subseteq X$  קטנה  $x$  שם  $x \in A$   $|z - x| < \epsilon \rightarrow z \in A$   
 קיים  $\epsilon > 0$  כך  $B(x, \epsilon) \cap X \subseteq A$

7/10/13

## הקשר בין $A$ ל- $A^c$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר:

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

22/10/13

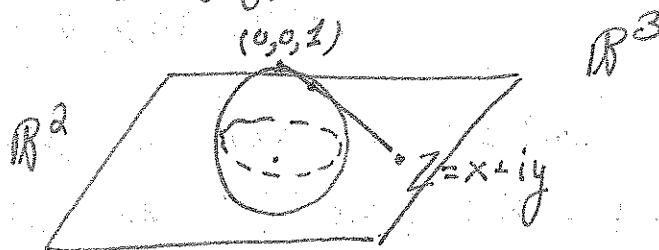
## הקשר בין $A$ ל- $A^c$

הקשר:

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

## הקשר בין $A$ ל- $A^c$



הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

הקשר בין  $A$  ל- $A^c$  הוא  $A \cup A^c = U$  ו- $A \cap A^c = \emptyset$

$$z = \frac{x + iy}{|z|} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

22/10/13

## המשקל שלוקר 2

ההשקה (ההוספה) היא  $(\xi, \eta, \lambda) \mapsto \frac{\xi + i\eta}{1 - \lambda}$  : הזכר

\* וזה כי  $\mathbb{C}$  מתאר את המישור המרוכב  $(0,0,1)$  (כי השדה  $\mathbb{C}$  מסתדר כזה,  $(0,0,1)$ )

\* מרחקים הם המרחקים המרחביים של המישור  $(0,0,1)$  (המרחק המרחבי...)

\*  $z, z' \in \mathbb{C}$  מתאימה לנקודה  $S^2$  (ומכאן, וההפך, כל נקודה ב-

הקובייה  $S^2$  מתאימה לנקודה  $z \in \mathbb{C}$  :  $z \bar{z}' = 1$

\* נמצא נקודות  $z$  ו- $z'$  שמתאימות לנקודה  $a$  ו- $b$  ב- $\mathbb{R}$ .

## מרחב מרחבי

זהו  $z, z' \in \mathbb{C}$  (נסמן  $\rho(z, z')$  את המרחק האוקלידי בין הנקודות המתאימות

ב- $S^2$  : [המרחק המרחבי מן המרכז] : הזכר

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1} \sqrt{|z_2|^2 + 1}} ; z_1, z_2 \neq \infty$$

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2}{\sqrt{|z_1|^2 + 1}} \quad z_2 = \infty$$

\* נקודות  $z$  ו- $z'$  מתאימות לנקודה  $G$  :  $S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longleftrightarrow G$

למשל  $G = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  :  $S^2 \longleftrightarrow G \cup \{\infty\}$  (כלומר  $\infty$  זהו הנקודה המרכזית)

יש כן פונקציה  $f$  שמתאימה לנקודה  $R^3$ .

## המשקל שלוקר 1

המשקל  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  ;  $z \in U$  נקודה  $U \subseteq \mathbb{C}$  סתומה

נקודה  $z$  נקודה  $z$  נקודה  $z$  נקודה  $z$  נקודה  $z$  : הזכר

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

: הזכר

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 0 \iff f(z) = 0 \quad *$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2zh + h^2}{h} = 2z \quad \text{למשל } f(z) = z^2 \quad *$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h - z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{למשל } f(z) = z \quad *$$

22/10/13

2. עמוד

הגדרה:  $z \rightarrow 0$   $ze^{i\theta}$  כאשר  $\theta$  קבוע ו- $z$  שואף ל-0

$$\frac{\overline{h}}{h} = \frac{ze^{-i\theta}}{ze^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

כלומר: אם  $h$  קיים במסלול קבוע, כל הסתברות של  $z$  שואף ל-0.

המשפט:  $0 \leftarrow z \implies C \cdot |h| \geq |f(z+h) - f(z)|$  כאשר  $C$  קבוע.

דוגמה:

אם  $g(z) \neq 0$  אז:

$$(f \circ g)'(z) = \frac{f'(g(z)) \cdot g'(z)}{g'(z)} = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

או:  $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$  (3)

הוכחה:

אם  $g(z) \neq 0$  ו- $g'(z) \neq 0$  אז  $g$  היא איזומורפיזם מקומי.

משפט:

אם  $g$  היא פונקציה אנליטית ו- $f$  היא פונקציה אנליטית, אז:

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

הוכחה:

נניח  $g'(z) \neq 0$  אז  $g(z+h) - g(z) \neq 0$  עבור  $h$  קטן מספיק.

$$\frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{h} = \frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{g(z+h) - g(z)} \cdot \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

אם  $h \rightarrow 0$  אז  $g(z+h) - g(z) \rightarrow 0$  ו- $g'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$  קיים.

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

אם  $g'(z) = 0$  אז  $f'(g(z))$  קיים ו- $g(z)$  היא פונקציה קבועה.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{h} = 0$$

$$(f \circ g)'(z) = 0$$

כלומר:  $(f \circ g)'(z) = 0$

22/10/13

# 2. עמוד 2

משפט: קריטריון - נאמן

היה  $f$  - פונקציה בקומפלקס  $z$  ויש  $z = x + iy$  ;  $h = k + il$  ;  $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

כאן  $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$  ו-  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$  מתקיים:  $1$

$h = k \rightarrow l = 0$  בלתי שוויון לאפשר נחשבון חלקי של נקודה:

$$\frac{f(z+k) - f(z)}{k} = \frac{u(x+ky) + i v(x+ky) - u(x,y) - i v(x,y)}{k}$$

$$= \frac{u(x+ky) - u(x,y)}{k} + i \frac{v(x+ky) - v(x,y)}{k} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

מתקיים:  $2$  ;  $h = il$  ;  $k = 0$  ; בלתי שוויון לאפשר נחשבון חלקי של נקודה:

$$f'(z) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(z+il) - f(z)}{il} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

לכן קריטריון לנאמן, כי הנגזרת קיימת חלק שמה שם הנגזרת:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

משפט: קריטריון - נאמן

ע"י  $u \in C^1$  קומפלקס פונקציה  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  ;  $f = u + iv$  ;  $f$  פונקציה אנליטית

כל נקודה ב-  $D$  יש  $f$  פונקציה אנליטית (פונקציה) ב-  $D$ .

נאמן:  $H^1(D)$

משפט:

$G \subseteq \mathbb{C}$  קומפלקס פונקציה  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  ; כן  $f = u + iv$  ; ויש:

$f$  אנליטית  $\iff$  קיימת פונקציה  $u$  ופונקציה  $v$  קוסי נאמן ומקיימות:

ב-  $D$  קיימים ויכוחים  $u_x, u_y, v_x, v_y$  ומקיימות נאמן קוסי נאמן

כל  $f$  אנליטית.

מכאן נובע:

קומפלקס:

$$\left. \begin{aligned} u(x+k, y+l) - u(x,y) &= u_x k + u_y l + \epsilon_1 \\ v(x+k, y+l) - v(x,y) &= v_x k + v_y l + \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \epsilon_1, \epsilon_2 = o(h)$$

$f = u + iv$   $\textcircled{2}$

$$h = k + il$$

22/10/13

# המשפט

המשפט  
המשפט

המשפט:  $G$  הוא תחום פתוח וחסום.

$$f(z+h) - f(z) = (\alpha - i\beta)h + (\beta + i\alpha)\bar{h} + \epsilon$$

$$= (\alpha - i\beta)h + o(|h|)$$

$$\begin{aligned} x &= u_x \\ y &= u_y \end{aligned}$$

המשפט:  $f$  היא פונקציה אנליטית.

המשפט:

המשפט:  $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$  היא פונקציה אנליטית.

המשפט:

המשפט:

המשפט:  $f \in H(G)$ ,  $G$  הוא תחום פתוח וחסום.

$$f = \text{const} \quad (*) \quad (x)$$

$$G \text{ הוא } f' = 0 \quad (*) \quad (y)$$

$$(\text{Re}(f) = \text{const} \text{ או } \text{Im}(f) = \text{const}) \quad (*) \quad (z)$$

$$|f| = \text{const} \quad (*) \quad (a)$$

$$\arg f = \text{const} \quad (*) \quad (b)$$

המשפט:

המשפט:  $f' = 0$  או  $f = 0$  או  $f = \text{const}$ .

המשפט:  $G$  הוא תחום פתוח וחסום.

המשפט:  $f = \text{const}$  או  $f = 0$  או  $f = \text{const}$ .

המשפט:

$$u_x, u_y = 0 \leftarrow v_x, v_y = 0 \leftarrow v = \text{const} \text{ או } \text{Im}(f) = \text{const} \text{ או } f = \text{const}$$

המשפט:  $f = \text{const}$  או  $f = 0$  או  $f = \text{const}$ .

המשפט:

$$u^2 + v^2 = \text{const}; |f| = \text{const} \quad x \leftarrow y$$

$$\text{const} \neq 0 \quad y \text{ או } x \text{ או } y$$

$$[x \text{ או } y] \begin{cases} 2u u_x + 2v v_x = 0 \\ 2u u_y + 2v v_y = 0 \end{cases}$$

$$[y \text{ או } x] \begin{cases} 2u u_x + 2v v_x = 0 \\ 2u u_y + 2v v_y = 0 \end{cases}$$

המשפט:

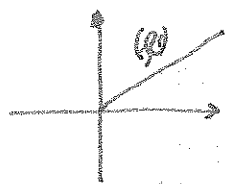
$$\begin{cases} u u_x + v v_x = 0 \\ v u_x - u v_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} \rightarrow \det = -(u^2 + v^2) \neq 0$$

המשפט:  $f = \text{const}$  או  $f = 0$  או  $f = \text{const}$ .

22/10/13

## דוגמה 2



$k \in \mathbb{R}$  כל  $u = kv$  כל  $\arg f = \text{const}$  נט  $x \rightarrow y$

$$0 = u - kv = \operatorname{Re}((1 - ik)(u + iv)) = \operatorname{Re}((1 - ik)f)$$

כל  $(1 - ik)f = \text{const}$  כל  $f$  קבוע כל  $f$  קבוע

הוכחה:

אוליברט פירמנטל

[לחומר מפורט ראו ערך ...]

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

כל  $f = u + iv$  כל  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \text{משוואת קושי-רימן}$$

22/10/13

## דוגמה 2

$A, B$  קבוצות סגורות כל  $a^* \in A, b^* \in B$

$$\inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} d(A, B) = d(a^*, b^*)$$

$$d(A, B) \leftarrow d(a_n, b_n) \quad \text{כל } a_n \in A, b_n \in B$$

כל  $a_n \in A, b_n \in B$  כל  $a_n \rightarrow a_0 \in A, b_n \rightarrow b_0 \in B$

$$d(A, B) \leftarrow d(a_{n_k}, b_{n_k})$$

כל  $a_{n_k} \in A, b_{n_k} \in B$  כל  $a_{n_k} \rightarrow a_0 \in A, b_{n_k} \rightarrow b_0 \in B$

$$d(A, B) \leftarrow d(a_{n_{k_m}}, b_{n_{k_m}})$$

$$\downarrow \text{למשפט היינצ}$$

$$d(a_0, b_0)$$

$$[|z_n| \rightarrow \infty \iff z_n \rightarrow \infty] \quad [ |z_n - z| \rightarrow 0 \iff z_n \rightarrow z ]$$

$$|n \cdot z^n| = |n| \cdot |z|^n \stackrel{|z| < 1}{\rightarrow} 0 \quad \text{כל } z \in \mathbb{C}$$

$$|n \cdot z^n| \geq |n| \rightarrow \infty \iff |z| > 1 \quad \text{כל } z \in \mathbb{C}$$

הוכחה:

$$z \in \mathbb{C} \quad \text{כל } a_n = n \cdot z^n$$

$$b_n = \operatorname{Arg}\left(\frac{-n+1}{n}\right)$$

22/10/13

# כוחות חזקים

התלך תחילת: ויש לה להאזינה תהיה פה צורה, למצוא עמוד הביר השליל!

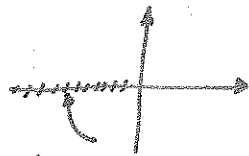
הארכימדיס (החלף)  
מספרים

~~הארכימדיס~~

$(-\pi, \pi]$

$$U_n = \frac{-ni + a}{n^2 - 1}$$

תחלק ב



$$\frac{(-ni + a)(-1 - ni)}{1 + n^2} = \frac{-n^2 - a + ni - 2ni}{1 + n^2} = \frac{-n^2 - a}{1 + n^2} + i \frac{(-n)}{1 + n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

יש לה כי  $0 > \text{Im}(U_n)$  ;  $\text{Re}(U_n) < 0$

מציאות חסר צבצב  
מחלק טון קצו  
(החלף)

$$-\pi \leftarrow \text{Arg}(U_n)$$

$U_n$  תהיה השלילי  $\phi_n$

## זכירות:

קיים  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  נמצא ב  $z_0$

יש לה להחליף!  
בין עיניה ב  
(קיים לה פה)  
פירוקה וכו'

אנינה עזר במחלק במחלקה צה חתך וכו' מופתותה  
כי הפתפתתה צבץ לא קוים-רומן.

$$\begin{pmatrix} U_x(x, y) & U_y(x, y) \\ U_y(x, y) & -U_x(x, y) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{הפתפתה} \\ \text{מחלקתה} \\ \text{הפתפתה} \end{matrix}$$

## פירוק:

בכאן כי  $g(z) = |z|$  אינה עזרה בלתי נקודה.  
כאילו בלתי כי  $f(z) = z$  אינה עזרה בלתי נקודה. נמצא והתקנה  $z \neq 0$

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{g^2(z)}{z}$$

אם  $g$  עזרה ב  $z$  היינו מתקנים ל  $z$  עזרה במחלק.  
אם  $z \neq 0$  נעזר  $g$  לה עזרה. עזרה  $z = 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{g(z) - g(0)}{z} = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{g(z) - g(0)}{z} = -1$$

אם  $g$  עזרה באיזה.

אם  $g$  עזרה  
אם  $g$  עזרה  
אם  $g$  עזרה

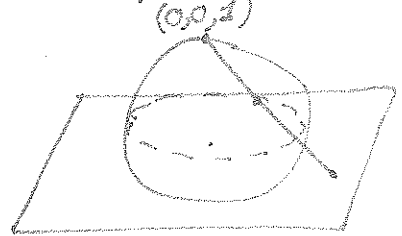
## פירוק:

כאילו כי אם  $f$  מופתה במחלק  $u$   $f = \text{const} \leftarrow \text{Im} f = \text{const}$ !  
אם  $\text{Im} |z| = 0$  !  $\text{const} = |z|$  אלו קיימה נקודה לכל מהל עזרה  
כל מהל

2 Bm 2nd

6024200 25.71 24.71 25.71

$$\underbrace{(x, y, 0)}_{\text{نقطه}} \longrightarrow \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$$



: 1000 6 600 6 600

$$\{(x, y, 0) \mid A \cdot \frac{\partial x}{1+x^2+y^2} + B \cdot \frac{\partial y}{1+x^2+y^2} + C \cdot \frac{\partial z}{x^2+y^2+1} = D\}$$

$(z = x - iy)$

$$A \cdot \overset{\text{pp}_1}{\partial x} + B \cdot \overset{\text{pp}_2}{\partial y} + C \cdot \overset{\text{pp}}{\partial z} = D$$

$Ax + by$

הם המקסימום  
הוא 0  
 $Ax + by + Cz = 0$

$$Aax + Bay + (C-D)(x^d y^d) = D + C$$

... $\mathbb{R}^n$   $\ell_1$   $\ell_2$   $Q = D$   $P^k$

$$\frac{Ax}{(C-D)} + \frac{Ay}{(C-D)} + x^2 + y^2 = \frac{D+C}{C-D} \rightarrow \left(x + \frac{A}{C-D}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{C-D}\right)^2 = \frac{D+C}{C-D} + \frac{A^2+B^2}{(C-D)^2}$$

1979      1980      1981      1982      1983      1984      1985      1986      1987      1988      1989      1990      1991      1992      1993      1994      1995      1996      1997      1998      1999      2000      2001      2002      2003      2004      2005      2006      2007      2008      2009      2010      2011      2012      2013      2014      2015      2016      2017      2018      2019      2020      2021      2022      2023      2024      2025      2026      2027      2028      2029      2030      2031      2032      2033      2034      2035      2036      2037      2038      2039      2040      2041      2042      2043      2044      2045      2046      2047      2048      2049      2050      2051      2052      2053      2054      2055      2056      2057      2058      2059      2060      2061      2062      2063      2064      2065      2066      2067      2068      2069      2070      2071      2072      2073      2074      2075      2076      2077      2078      2079      2080      2081      2082      2083      2084      2085      2086      2087      2088      2089      2090      2091      2092      2093      2094      2095      2096      2097      2098      2099      2100      2101      2102      2103      2104      2105      2106      2107      2108      2109      2110      2111      2112      2113      2114      2115      2116      2117      2118      2119      2120      2121      2122      2123      2124      2125      2126      2127      2128      2129      2130      2131      2132      2133      2134      2135      2136      2137      2138      2139      2140      2141      2142      2143      2144      2145      2146      2147      2148      2149      2150      2151      2152      2153      2154      2155      2156      2157      2158      2159      2160      2161      2162      2163      2164      2165      2166      2167      2168      2169      2170      2171      2172      2173      2174      2175      2176      2177      2178      2179      2180      2181      2182      2183      2184      2185      2186      2187      2188      2189      2190      2191      2192      2193      2194      2195      2196      2197      2198      2199      2200      2201      2202      2203      2204      2205      2206      2207      2208      2209      2210      2211      2212      2213      2214      2215      2216      2217      2218      2219      2220      2221      2222      2223      2224      2225      2226      2227      2228      2229      2230      2231      2232      2233      2234      2235      2236      2237      2238      2239      2240      2241      2242      2243      2244      2245      2246      2247      2248      2249      2250      2251      2252      2253      2254      2255      2256      2257      2258      2259      2260      2261      2262      2263      2264      2265      2266      2267      2268      2269      2270      2271      2272      2273      2274      2275      2276      2277      2278      2279      2280      2281      2282      2283      2284      2285      2286      2287      2288      2289      2290      2291      2292      2293      2294      2295      2296      2297      2298      2299      2300      2301      2302      2303      2304      2305      2306      2307      2308      2309      2310      2311      2312      2313      2314      2315      2316      2317      2318      2319      2320      2321      2322      2323      2324      2325      2326      2327      2328      2329      2330      2331      2332      2333      2334      2335      2336      2337      2338      2339      2340      2341      2342      2343      2344      2345      2346      2347      2348      2349      2350      2351      2352      2353      2354      2355      2356      2357      2358      2359      2360      2361      2362      2363      2364      2365      2366      2367      2368      2369      2370      2371      2372      2373      2374      2375      2376      2377      2378      2379      2380      2381      2382      2383      2384      2385      2386      2387      2388      2389      2390      2391      2392      2393      2394      2395      2396      2397      2398      2399      2400      2401      2402      2403      2404      2405      2406      2407      2408      2409      2410      2411      2412      2413      2414      2415      2416      2417      2418      2419      2420      2421      2422      2423      2424      2425      2426      2427      2428      2429      2430      2431      2432      2433      2434      2435      2436      2437      2438      2439      2440      2441      2442      2443      2444      2445      2446      2447      2448      2449      2450      2451      2452      2453      2454      2455      2456      2457      2458      2459      2460      2461      2462      2463      2464      2465      2466      2467      2468      2469      2470      2471      2472      2473      2474      2475      2476      2477      2478      2479      2480      2481      2482      2483      2484      2485      2486      2487      2488      2489      2490      2491      2492      2493      2494      2495      2496      2497      2498      2499      2500      2501      2502      2503      2504      2505      2506      2507      2508      2509      2510      2511      2512      2513      2514      2515      2516      2517      2518      2519      2520      2521      2522      2523      2524      2525      2526      2527      2528      2529      2530      2531      2532      2533      2534      2535      2536      2537      2538      2539      2540      2541      2542      2543      2544      2545      2546      2547      2548      2549      2550      2551      2552      2553      2554      2555      2556      2557      2558      2559      2560      2561      2562      256

[illegible]

פסקה: הנא כי מלפני הספק המוצג לפרשניו אין מקום להוסיף.

2)  $z_1 = 1, z_2 = i$ ;  $f(z) = z^3$  m) 1/20

$$f'(z)(z_1 - z_2) = f(z_1) - f(z_2) \quad \text{für } z_1, z_2 \text{ beliebig}$$

$z \in [0, 1]$  אז  $Z = z \cdot z + (1-z)i$   ~~$z \cdot z + (1-z)i$~~  וצדד  $Z$  למעלה  
:  $P_z$   $P_z$

$$3(1 + (1 - 2)i)^2 (i - 1) = -i - 1$$

$$3\left(z^4 + 2z\left(1 - \frac{1}{z}\right)i - \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2\right) = \frac{z^4 + 1}{z^2 + 1} - \left(\frac{z^4 + 1}{z^2 + 1}\right) = i$$

$$3. (a + a^d) i = i + a i$$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



2 July 2012

לכאן  $a, b \in \mathbb{C}$  [כאן  $a, b$  מקומות] כי  $p$  מה  $\mathbb{Z}$  ולכן  $a, b$  מה  $\mathbb{Z}$

$$\arg(az+b\bar{z}) - \arg(a+b) = \arg(z) - \arg(\bar{z}) \text{ for } az+b\bar{z}$$

~~$$\arg(z) + \arg\left(a + \frac{bz}{z}\right) - \arg(a+b) = \arg(z)$$~~

$$z \neq 0 \text{ if } \arg(a + \frac{b\bar{z}}{z}) = \arg(a+b)$$

כשר, ולפי זה כי  $\frac{E}{E_0} = 1$  מקום ; וסמוך לו מספר 8 ועליו החיפוי נח  
סמך 7  $\frac{E}{E_0}$

$|A|=1$  e p. 2.  $\text{arg}(a+b\lambda) = \text{arg}(a+b)$  p. 2

הקבוצה  $\{a, b\}$  היא מערכת חסומה אם  $a \leq b$  או  $b \leq a$ .

הם בלב אלה, וזה לא. [בין אלה החרושים]

מא  $\mathbb{C}$  אל  $\mathbb{C}$  פאר  $b=0$  פאר  $L(z)=az$  פאר  $a \in \mathbb{C}$  איז אן איזאמאריזם

$$[a - b\lambda / \lambda] = 1$$

$$a - b\lambda = \lambda$$

$$b\lambda = a - \lambda$$

תוצאות: שני  $e$  ו- $f: G \rightarrow C$  כאשר  $C$  זוגי [כמויות של חזקה]

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\bar{h} + o(h) \quad \text{as } |h| \rightarrow 0$$

(L/N/70) : C. C. S. R.

הוכחה:  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה ממשית ל- $\mathbb{C}$  ולכן

[...wsk/mo 30/mo/100, 20]  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$

$$b(z) = zZ_1 + (1-z)Z_2$$

$$\text{Ex } \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{Q} : \text{RUP}$$

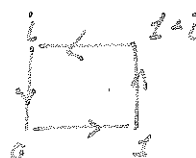
ok some to us  
Z2 ! Z1

Amclg 9x

$$B: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{b) } B(z) = \cos z + i \sin z \quad (1)$$

$$\psi: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{bzw.} \quad \psi(t) = \cos t - i \sin t \quad (2)$$

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + (t-1)t & 1 \leq t \leq 2 \\ 3 - t & 2 \leq t \leq 3 \\ (4-t)^2 & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$



24/10/13

מבחן 2

הערה: פונקציה  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  נקראת אנליטית בנקודה  $z_0$  אם מתקיים

המחזור והמחזור של  $f$  בנקודה  $z_0$  קיים הגבול

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

⊛ פונקציה  $f$  נקראת אנליטית בנקודה  $z_0$  אם היא ניתנת לזרועות

⊛ פונקציה  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  אם  $f$  אנליטית בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

⊛ פונקציה  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  אם  $f$  ניתנת לזרועות ויש לה זרועות

29/10/13

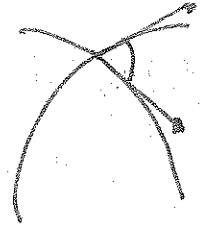
שאלה 3

הערה: יהיו  $f, g$  פונקציות אנליטיות בנקודה  $z_0$

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) \quad \text{ועל כן} \quad f'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) - g'(z_0)$$

אם  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות  $g$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

$$\arg(f(z_0)) - \arg(g(z_0)) = \arg(f'(z_0)) - \arg(g'(z_0))$$



משפט: יהי  $G \subseteq \mathbb{C}$  קבוצה פתוחה,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה אנליטית,  $z_0 \in G$  נקודה

$f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  אם  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

$f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  אם  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

$f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  אם  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

חומר:  $f = u + iv$  ; אם  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

$$f(z_0+h) = f(z_0) + L(h) + o(h) \quad \text{כאשר} \quad L = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} = 1$$

אם  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות  $g$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

$$(f \circ g)'(z_0) = L_{f(z_0)} \cdot L_{g(z_0)}$$

$$(f \circ g)'(z_0) = L_{f(z_0)} \cdot L_{g(z_0)}$$

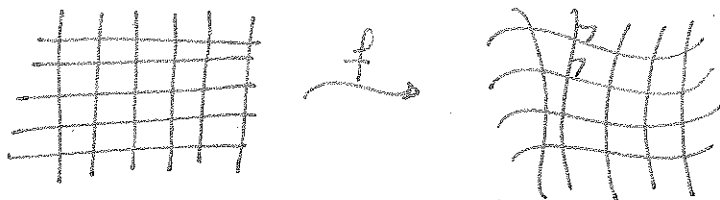
אם  $f$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות  $g$  ניתנת לזרועות בנקודה  $z_0$  ויש לה זרועות

3740 720

$$0 \neq a = f'(z_0) \quad \text{pf:}$$

200

$z \in G$  של  $G'(z) \neq 0$ !  $G$  מכיל  $\neq$  נקודת מוקד ואם  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$



2. மெய்யறிவு

דפדפן דפדפן

$$4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{--- 100089}$$

[ 6/100 PWD ]

: 2240

$G \rightarrow e$  מה שיש לנו ממש בקבוצה מה  $G$ , אז  $\text{misc } h$  הרישום  $G$

$$\frac{\partial h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial y^2} = \Delta h = 0$$

Die  $k = 4, 20$

11/11/11

PNB misc 4,3

וכן נכתב חלקו של  
א הן כצו

$$h: G \rightarrow \mathbb{C} : \text{Herm}_\mathbb{C}(G) \quad \text{if } \text{NO}$$

$$h: G \rightarrow B : \text{Hom}_B(G)$$

68

$$\text{PerHom}_G(G) \text{ or } \text{Per}^2(G) : \text{Per}(G) \text{ on}$$

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v$$

12  $u, v \in \text{Harm}_p(G)$  sk  $f = u + iv$  pk GDN

[100 100 100]  $\Delta u, \Delta v = 0 \rightarrow \Delta f = 0$ .  $\rho_k$  is ~~not~~

$$\Delta f = 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = 0$$

י"ז תמוז, ומה שלקחתי כסף וזאת.

$\Delta f = 0$  פר  
כניסה פר

6 *CDN*

ה'תרס"ח

Se Lie Horn (3)

$$2(\Delta U) - \Delta U = k \Delta U = 0 \rightarrow \Delta U = 0 \text{ rise cond}$$

29/10/13

# הרעיון של פונקציה אנליטית

הרעיון:

$u, v \in \text{Harm}_{\mathbb{R}}(G)$ ;  $u$  אישית נקראת פונקציה אנליטית אם  $u \in \text{Harm}_{\mathbb{C}}(G)$

הפונקציה  $u$  פשוט הנחשבת  $G$  (אם הוויז) היא לא ואינה אנליטית אלא פונקציה אנליטית.

הערה: יהי  $G$  גחום, יהי  $u \in \text{Harm}_{\mathbb{R}}(G)$  אישית כל שיש פונקציה אנליטית  $v$  כזו ש- $u = v$ .

הרעיון:

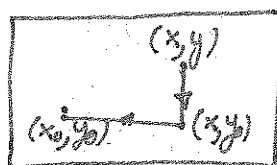
$$f(z) = \log|z|$$

$$G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

הפונקציה  $u$  איננה פונקציה אנליטית ב- $G$ ...

$u \in \text{Harm}_{\mathbb{R}}(G)$  יהי  $u$  פונקציה אנליטית.

אנחנו שואלים את עצמנו: האם יש פונקציה אנליטית  $v$  כזו ש- $u = v$ ?



$(x, y) \in G$  נקודה אחת.

הרעיון:

$$v(x, y) = [v(x, y) - v(x, y_0)] + [v(x, y_0) - v(x_0, y_0)]$$

$$+ v(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y v_x(x, z) dz + \int_{x_0}^x v_y(s, y_0) ds + v(x_0, y_0)$$

$$\xrightarrow{\text{הרעיון}} = \int_{y_0}^y u_x(x, z) dz - \int_{x_0}^x u_y(s, y_0) ds + v(x_0, y_0)$$

אם אנחנו מסתכלים לעיל, האם הפונקציה  $u$  היא אנליטית? [הרעיון: לא, כי קיימת פונקציה אנליטית  $v$  כזו ש- $u = v$ ]

הערה: מוכח שהפונקציה  $u$  איננה פונקציה אנליטית ב- $G$  (אם הוויז) היא לא פונקציה אנליטית.

הרעיון:

$$v(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{והיא} \quad (x_0, y_0) = (0, 0) \quad \text{אם} \quad u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = - \int_0^x u_y(s, 0) ds + \int_0^y u_x(x, z) dz = 2xy$$

הפונקציה  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$  היא פונקציה אנליטית.  $f(z) = z^2$

29/10/13

# לימודי אנליזה

תאריך:

(1)  $Harm_{\mathbb{R}}(G) \ni u, v, u^2, v^2 \leftarrow u, v \in Harm_{\mathbb{R}}(G)$  ! וזו נכונה !

(2) לכל  $u, v$  יש פולינום הומוגני של  $x, y$  ממעלה  $\geq 3$ .

(3)  $u, v$  יכול להיות  $u, v$  הומוגניים  $\leftarrow$  הומוגניים  $\nabla u, \nabla v$  הם אורתוגונליים.

(4)  $\Delta |f|^2 = 4 |f'(z)|^2$  אם  $f \in H(G) \cap C^1(G)$

(5) אם  $u, v$  הומוגניים קוסי כמעט בקורולאריה של (3):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

(6)  $\Delta$  פולריות בקורולאריה של (3):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

(7)  $f \in H(G)$  ; אם  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$  אז  $f^*$  גם  $S_k$  הומוגני.

(8)  $h(x, y) = 4(x^2 + y^2)$  פולי הומוגני ממעלה

## Mobius

הפונקציה  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  מכונה הפונקציה של מוביוס כאשר  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ו- $(c, d) \neq (0, 0)$  !

יש להיזהר כי  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  אינה הפונקציה  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  !

אם  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  אז  $h$  היא פונקציה של מוביוס.

הפונקציה  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  היא פונקציה של מוביוס.

כאשר  $h$  היא פונקציה של מוביוס יש הפונקציה הפיכה שלה  $h^{-1}$ .

(\*) מנסה להוכיח:  $h_A(h_B(z)) = h_{AB}(z)$  !

$$h_A(h_B(z)) = h_{AB}(z) \iff h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$$

לכל  $z \in \mathbb{C}$  יש פונקציה של מוביוס  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  !

הפונקציה  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  היא פונקציה של מוביוס.

הפונקציה  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  היא פונקציה של מוביוס.

הפונקציה  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  היא פונקציה של מוביוס.

24/10/13

כחלק מפרק 3

המשפט הבא:  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $[z_1, z_2]$  היא קטע קטן במישור המרוכב.

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית, אז  $f$  היא פונקציה חלופית.  $[z_1, z_2]$  היא קטע קטן במישור המרוכב.

הפונקציה  $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  היא פונקציה חלופית.

$$\pi(z_1, z_2) \mapsto [z_1, z_2]$$

אם  $[z_1, z_2] = [z_2, 1]$  וכן  $z_2 \neq 0$  אז  $[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1$  \*

$$[z_1, z_2] = [1, 0] \text{ אם } z_2 = 0 \text{ אז}$$

הפונקציה  $\hat{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \leftarrow \mathbb{C}P^1$  נקראת  $\hat{C}$  ויש לה מרחב טופולוגי.

$$\infty \mapsto [1, 0] \quad ; \quad z \mapsto [z, 1] \text{ אז } \hat{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

המשפט הבא:  
אם  $f$  היא פונקציה אנליטית, אז  $f$  היא פונקציה חלופית.

3 נקודות

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

המשפט הבא:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \quad (1)$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית, אז  $\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)(z_0) = 0$  אם  $z_0$  היא נקודה כלשהי.

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \quad (3)$$

$$f_{xx} - f_{yy} = \Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$\text{אם } f \in G^2 \text{ אז } (4)$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית, אז  $f(z) = u(z) + i v(z)$  ויש לה מרחב טופולוגי.

$$\Delta f = 0 \iff \Delta u = 0 \quad ; \quad \Delta v = 0 \quad \text{אם } f \in G^2$$

אם  $u$  היא פונקציה אנליטית, אז  $v$  היא פונקציה אנליטית.

אם  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית, אז  $f$  היא פונקציה חלופית.

$$\Delta (|f|^2)(z) = 4 |f'(z)|^2 \quad \text{אם } f \text{ היא פונקציה אנליטית}$$

29/10/13

3 פרק הנ

$$\Delta |f|^2 = \Delta(f \cdot \bar{f}) = 4 \frac{\partial^2 (f \cdot \bar{f})}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right) \cdot \bar{f} + \frac{\partial}{\partial z} \left( f \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{f} \right) =$$

$$= 4 \frac{\partial}{\partial z} \left( f \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) = 4 \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \cdot \bar{f} = 4 \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

המשפט:  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  (המשפט של פארה) ... כלומר  $f$  היא פונקציה אנליטית.

פרק 4

נתונה קבוצה  $D$  בעלת גבול חלקלק.  $f_1, \dots, f_n$  פונקציות אנליטיות ב- $D$  המקיימות  $|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2 = \text{const}$  ב- $D$ .  
 נניח כי  $f_i$  אינה קבועה.

נניח  $0 = f_i$  בנקודה  $z_0$ . אז  $0 \leq |f_i(z)|^2$  ב- $z_0$ .

$$4 \sum_{i=1}^n |f_i'(z)|^2 = \sum_{i=1}^n \Delta(|f_i|^2) = \Delta(|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2) = 0$$

נניח  $f$  אינה קבועה;  $f(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{z-t} dt$  עבור  $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ .

נניח  $f = u + iv$  אז  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$  ו- $f' = u' + iv'$ .

$$\int_a^b f' = \int_a^b u' + i \int_a^b v' = \int_a^b (u' + i v') = \int_a^b f'(z) dz$$

נניח  $z_0 \in [0,1]$ .

$$f(z) - f(z_0) = \int_0^1 \frac{h(t)}{z-t} dt - \int_0^1 \frac{h(t)}{z_0-t} dt = \int_0^1 \frac{h(t)(z-z_0)}{(z-t)(z_0-t)} dt$$

$$\rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{h(t)}{(z-t)(z_0-t)} dt$$

נניח  $z \rightarrow z_0$  אז  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{h(t)}{(z_0-t)^2} dt = g_{z_0}(z)$

נניח  $z_0 \in [0,1]$  אז  $g_{z_0}(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2}$ .

נניח  $z \rightarrow z_0$  אז  $|g_{z_0}(z) - g_{z_0}(z_0)| \rightarrow 0$  כי  $g_{z_0}$  היא פונקציה אנליטית.

נניח  $h$  היא פונקציה אנליטית ב- $[0,1]$  אז  $h$  היא פונקציה אנליטית ב- $\mathbb{C}$  ו- $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

29/10/13

3 חלקי

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{h(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

:פר

פרט

31/10/13

3 חלקי

ההעתקה Mobius מפה  $\mathbb{C}$  אל  $\mathbb{C}$  פונקציה אנליטית וחד-חד-חד  
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  מטריצה ממונורמלת. כלומר  $\det A = 1$  ופונקציה חד-חד-חד  
 $h_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  גר' הקבוצה

$$(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}} ; h_A \circ h_B = h_{AB} \quad \text{⊗} \text{ כל המרחב והמקרים}$$

מרחב פרויקטיבי ממונורמלת

$$\lambda \neq 0 \quad (w, \omega_a) = \lambda(z, z_a) \iff (z, z_a) \sim (w, \omega_a) : \text{ויחס שקילות} \quad \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

!  $\lambda \in \mathbb{C}$  [מרחב פרויקטיבי חד-חד-חד]כל נקודה נשלחת לנקודה ב- $\mathbb{C}P^1$ 

$$\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1 ; \pi(z, z_a) \mapsto [z, z_a] : \text{הקבוצה}$$

$$z_a \neq 0 \quad [z, z_a] = [\frac{z}{z_a}, 1] \quad \text{אם הקבוצה איננה נקודה}$$

$$z_a = 0 \quad [z, z_a] = [1, 0] \quad \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{אם יש בעתיד מ"צ}$$

$$[\frac{z}{z_a}, 1] \mapsto \frac{z}{z_a} ; [1, 0] \mapsto \infty \quad \text{כל}$$

⊗ ישנם  $\mathbb{C}$  מרחב פרויקטיבי חד-חד-חד וכל פונקציה אנליטית

$$A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 ; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה חד-חד-חד}$$

וכן ההעתקה  $A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  הופכה

$$[A]: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \quad \text{המרחב פרויקטיבי חד-חד-חד}$$

$$A: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{[A]} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

$$z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \quad p = \pi(z) ; p \in \mathbb{C}P^1$$

$$[A](p) = \pi(A(z))$$

31/10/13

זכרון שמי

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי

$$Az = \lambda Aw \quad \text{פר } (z, za) = \lambda(w, wa) \quad \text{פר } [z, za] = [w, wa] \quad (*)$$

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי  $\pi(Az) = \pi(Aw)$  פר

פר היא קבוצה המרחב הפרויקטיבי.

$$[A]([z, 1]) = [A(z, 1)] = [az+b, cz+d] = : [A] \text{ על } \mathbb{C}P^1$$

$$= [\frac{az+b}{cz+d}, 1] = [h_A(z), 1]$$

$$[A]([1, 0]) = [a, c] = \begin{cases} [\frac{a}{c}, 1] & c \neq 0 \\ [1, 0] & c = 0 \end{cases}$$

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי  $\mathbb{C}P^1 \cong \hat{\mathbb{C}}$  הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי  $\hat{\mathbb{C}}$  היא קבוצה המרחב הפרויקטיבי.

$$h_{A^{-1}} = (h_A)^{-1} ; h_{AB} = h_A \circ h_B \quad \text{פר}$$

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי

$$h_A(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

$$h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} : z \in \mathbb{C} ; h_A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$h_A(\infty) = \frac{a}{c}$$

$$h_A(z) \neq 0 \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{פר} \quad h_A(z) = \frac{\det A}{(cz+d)^2} \quad (*)$$

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי  $h_A(z)$  היא קבוצה המרחב הפרויקטיבי.

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי

$$; h_A(z) = z \quad \text{פר} \quad h_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} : c=0 \quad \text{פר } (*)$$

$$h_A(z) = z \quad \leftarrow d \neq 0 \quad \text{פר} \quad h_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} : c=0 \quad \text{פר } (*)$$

$$h_A(\infty) = \infty$$

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי  $a \neq d$  פר היא קבוצה המרחב הפרויקטיבי

$$b=0 \quad \text{פר} \quad a=d \quad \text{פר} \quad \text{הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי}$$

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad \text{פר} ; h_A(\infty) \neq \infty \quad \text{פר} : c \neq 0 \quad \text{פר } (*)$$

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי

הקבוצה הזו היא המרחב הפרויקטיבי

31/10/13

3 מרחב פונ

$[z_i, z_j; w_i, w_j]$  - זה

three-fold transitivity

המרחב  $\mathbb{C}P^1$  של  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^1$  !  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  :  $\mathbb{C}P^1$

$h(z_i) = w_i$  ל  $p$   $k$  מרחב

:  $\mathbb{C}P^1$

לכן  $h_a(z_i) = w_i$  !  $h_1(z_i) = w_i$  ל  $p$   $h, h_a$  מרחב :  $\mathbb{C}P^1$

אם  $w_i$  הם נקודות שונות  $i \in \{1, 2, 3\}$  וזה  $h(z_i) = z_i$  ;  $h = h_1 \circ h_a$

:  $\mathbb{C}P^1$  מרחב  $h_1 = h_a$  מרחב ;  $h$  מרחב  $k$

לכן  $z_i \mapsto w_i$  ;  $w_1 = \infty$  ;  $w_2 = 0$  ;  $w_3 = 1$  :  $\mathbb{C}P^1$  מרחב

$$h(z) = \begin{cases} \frac{(z - z_a)(z_1 - z_3)}{(z - z_1)(z_a - z_3)} & z_1, z_a, z_3 \in \mathbb{C} \\ \frac{z - z_3}{z_3 - z_2} & z_1 = \infty \\ \frac{(z_3 - z_1)}{(z - z_1)} & z_2 = \infty \\ \frac{(z - z_2)}{(z - z_1)} & z_3 = \infty \end{cases}$$

זהו  $h_a$  :  $\mathbb{C}P^1$  מרחב ;  $0, \infty, 1$  מרחב  $h$  מרחב :  $\mathbb{C}P^1$  מרחב ;  $0, \infty, 1$

$w_1, w_2, w_3$  ,  $z_1, z_2, z_3$  מרחב

$h(z_i) = w_i$  ל  $p$   $h$  מרחב  $\mathbb{C}P^1$  מרחב  $h$  מרחב  $\mathbb{C}P^1$  מרחב

$h_a(w_1) = \infty$  ;  $h_1(z_3) = 1$  ;  $h_1(z_2) = 0$  ;  $h_1(z_1) = \infty$  מרחב

$h_a(z_a) = 0$   $\rightarrow h = h_a \circ h_1 \rightarrow h(z_i) = w_i$

$h_a(w_3) = 1$

:  $\mathbb{C}P^1$

5/11/13

# 4 הערה

Cross-ratio

הערה:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \in \hat{\mathbb{C}}$$

[הערה: נקודה חלשה]  $\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$

הערה: נקודה חלשה  
הנקודה הזו היא  
הנקודה הזו היא  
הנקודה הזו היא  
הנקודה הזו היא

הערה:

$(\infty, 0, 1) \mapsto (z_1, z_2, z_3)$   
 $\varphi(z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

הערה:

$(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

$(\infty, 0, 1) \mapsto \varphi(z_1, z_2, z_3)$   $\varphi(z) = (z_1, z_2, z_3, z)$

$\varphi(z_1) = \infty$   
 $\varphi(z_2) = 0$   
 $\varphi(z_3) = 1$

$(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)) = (\varphi \circ \varphi^{-1})(\varphi(z_4)) = \varphi(z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

הערה:  $\varphi(z_4)$  היא הנקודה הזו  
הנקודה הזו היא הנקודה הזו  
הנקודה הזו היא הנקודה הזו

הערה:

הערה:  $z \mapsto kz$   $k > 0$   $z \mapsto \lambda z$   $|\lambda| = 1$   $z \mapsto z + b$   $b \in \mathbb{C}$   $z \mapsto \frac{1}{z}$

$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c} = \frac{b - ad/c}{cz + d} + \frac{a}{c}$

הערה:  $h(z)$  היא הפונקציה הזו

הערה:  $h(z)$  היא הפונקציה הזו

הערה:  $h(z)$  היא הפונקציה הזו

5/11/13

4 תמונות

הצגה

$$\alpha |z|^2 + \beta \operatorname{Re} z + \gamma \operatorname{Im} z + \delta = 0$$

הצגה

הצגה

$$\alpha \cdot \frac{1}{|z|^2} + \beta \cdot \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} + \gamma \cdot \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} + \delta = 0$$

$$\alpha + \beta \operatorname{Re} z + \gamma \operatorname{Im} z + \delta |z|^2 = 0 \quad \leftarrow \text{הצגה}$$

הצגה:  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  ו- $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$

$$h^{-1}: w \mapsto i \frac{1+w}{1-w} ; h: z \mapsto \frac{z-i}{z+i} = w$$

calcy

$$h: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{D} (= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\})$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \{z: |z|=1\}$$

הצגה

הצגה

הצגה:  $h(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$  ו- $|a|^2 - |b|^2 = 1$  ו- $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

$$\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1, z_0 \in \mathbb{D} \text{ אז } h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$$

הצגה

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

$$\psi^{-1}(w) = \psi^{-1} \circ \psi(z)$$

הצגה

$$\psi^{-1}(w^*) = \psi^{-1} \circ \psi(\bar{z})$$

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

הצגה

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

הצגה:  $h(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$

ה'תש"ב

12

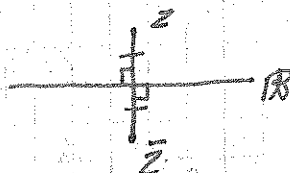
2000 10 10  
 2000 10 10  
 2000 10 10

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

פירמע פארמאגט אירע פאמיליע

माना  $R$  व  $S$  प्रकृतियाँ  $\bar{Z}$ ,  $Z$  पर  $\bar{Z}!$  व  $Z!$  पर  $R!$  और  $S!$  के

$R^1$  פאקטור  $[z, za]$  וואס איז  $(\dots)$



\* סימטריה ביחס למישור הממשי:  $S^1 = \{z \mid |z|=1\}$ ; המראה: caley הקניין

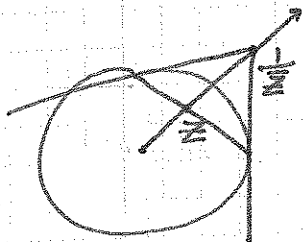
$h(z) = \frac{z-i}{z+i}$

$$h^{-1}(w) = i \frac{1+w}{1-w}$$

[illegible]

$$\omega^* = h(\overline{h^{-1}(\omega)})$$

$$\omega^* = h \left( -i \cdot \frac{1+\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} \right) = \frac{-i \frac{1+\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}}{-i \frac{1+\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} - i} = \frac{\frac{1+\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} + 1}{\frac{1+\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} - 1} = \frac{1}{\omega}$$



$\frac{1}{z}$ ! נכון  $\geq$  פנימי פנימי!

הוא ממוסב: \*ש, ש ומצאים ש תין, שחזא  
מחמם המעל ומעל העתק הש! \*ש  
מחמם מה 1.

מאמר מיוחד: (קורס) נקרא המסמך ל רחוק המדויק של המסמך  
 $\frac{1}{2}$  מהם? מסמך המסמך

12

ממחור המלך המלכותי לרבות הנהגות ופיקודים

257 # DMC\*

1954.11.20

→  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$   
 $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$   
 $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$   
 $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$

ביום ש' ו' פ'  
 יום ש' ו' פ'  
 יום ש' ו' פ'  
 יום ש' ו' פ'

(u-axwa) 

ואלו הן המצוות  
 אשר צוה ה' את  
 משה ואת בני ישראל  
 לעשות לפני ה'

[illegible]

5/11/13

הצגת פונקציה

הצגת פונקציה

$e^z$  היא פונקציה

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

דיון

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

הפונקציה  $e^z$  היא פונקציה

הפונקציה  $e^z$  היא פונקציה

$$e(z_1+z_2) = e(z_1) \cdot e(z_2)$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

הפונקציה  $e^z$  היא פונקציה

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} = \cos y + i \sin y$$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

הפונקציה  $e^z$  היא פונקציה

$$(e^z)' = e^z \quad \text{[הפונקציה } e^z \text{ היא פונקציה]}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

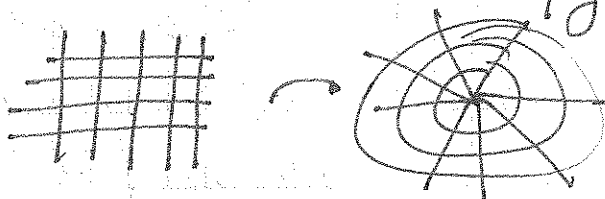
הפונקציה  $e^z$  היא פונקציה

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

הפונקציה

$$f(z) = c \cdot e^z \quad \text{הפונקציה } f(z) \text{ היא פונקציה}$$

$$[g(z) = e^{-z} f(z)]$$



$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

הפונקציה

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \cos(iz) \quad ; \quad \sinh(z) = -i \sin(iz)$$

הפונקציה

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad ; \quad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$

4128

$\sin(z) = 0$  s/c  $z \in \mathbb{R}$  ist pl!

$$\sinh(wz) = ? \quad \ominus \quad \cosh(wz) = ? \quad \ominus$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \ominus \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \ominus$$

←  $z = x + iy$  (1)



$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{\cos z} \rightarrow \cos z$$

Омск

$$e^b = e^x \cdot e^{iy} \quad \leftarrow b = x + iy \quad ! \quad a = re^{i\phi} \quad \text{pk 10 \& 10b}$$

$$\varphi = y + 2\pi k \quad ! \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{also} \quad x = \ln(r) \quad \text{for} \quad e^{x+iy} = r e^{iy}$$

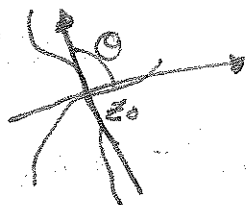
צדור  $KEZ$ . פסקנים פובליק פאר מער מרובע שנים מאז.

(... וידוע כי  $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$  )  $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$  pp

5/11/13

# הרצאה 4

השאלה:  $f$  קונפורמית ב  $z_0$  אם  $f$  שומרת זווית וכוונת ב  $z_0$  וזוהי  
 עקרון של  $z_0$ .



משפט:

$f \in H(D)$  !  $f'(z) \neq 0$  כל  $z \in D$  אם  $f$  קונפורמית.

הוכחה: ההשקפה קונפורמית הנה השקפה אנליטית וחזקה.

הערה: השקפה ביומורפית-הנה השקפה אנליטית וחזקה בן של ההיפוכת אנליטית.

משקפה חלוקה של ההשקפה ביומורפית הנה השקפה חזקה:

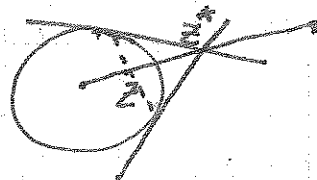
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} ; \text{ אלה השקפה אנליטית מ } \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$; \mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ אלה } f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ [אם } c \neq 0 \text{ או } \infty \text{ אם } c=0]$$

משפט: השקפה מובנים נקבעת ביחס  $z \sim z'$  נקרא  $z$  ו  $z'$  הם

מובנים  $z \sim z'$  הם זהו  $z$  ו  $z'$ .

משפט: השקפה מובנים מובנים מובנים מובנים, וזוהי בן השקפה  
 זהו סימטריה בהם למובנים מובנים מובנים זהו סימטריה בהם למובנים מובנים.



משפט:

$(z)$  מובנים השקפה מובנים מ  $\mathbb{C}_+$   $[Im z > 0]$  למובנים  $|w| < R$  נקרא  
 $\alpha \in \mathbb{C}_+$  אצורה תקופה 0. (מובנים מובנים)



מובנים  $\alpha$  ! אצורה 0 ! מובנים

סימטריה  $f(\bar{\alpha}) = \infty$  [  $\infty$  סימטריה אצורה מובנים למובנים !  $\alpha$  סימטריה  $\alpha$  מובנים  $[R]$  ]

$$: \text{פר} \quad f(z) = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} ; \rightarrow f(z) = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \text{ כי } w = f(\bar{\alpha})$$

כי  $f(\alpha) = 0$

בבן אצורה  $R$  יעבור למובנים קוון הדיסקוס  $R$  מובנים  $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = |\lambda| \left| \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}} \right| = |\lambda| \left| \frac{x-\alpha}{x-\alpha} \right| = |\lambda|$$

$$|\lambda| = R \text{ פר}$$

$$f(z) = R e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$$

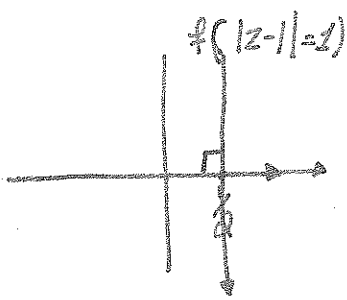
$$\lambda = R e^{i\theta} \text{ מובנים } \theta \text{ מובנים אלה}$$

5/11/13

# המפתח למערכת

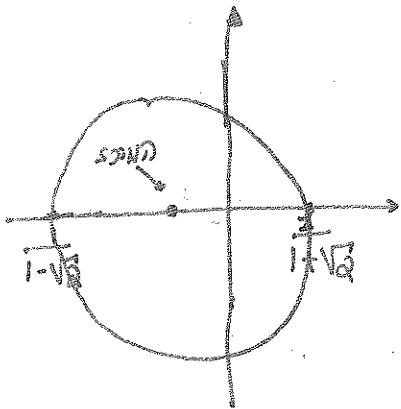
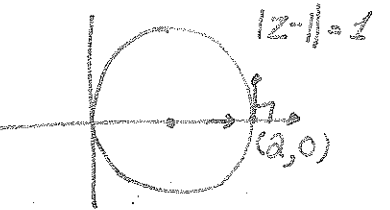
צריך להבין את המערכת כדי להבין את המערכת.

המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא



המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

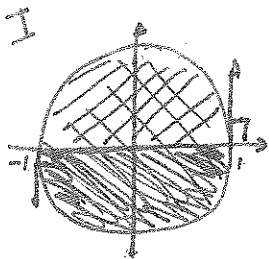
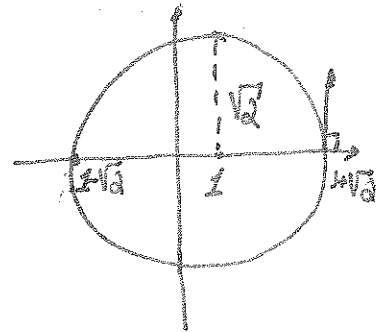


המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$f(1) = 1$$



II



המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

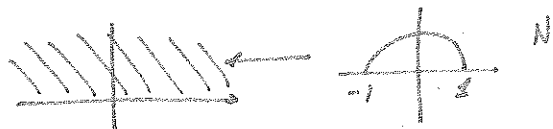
המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

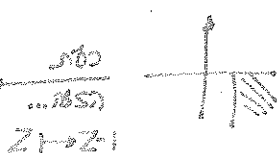
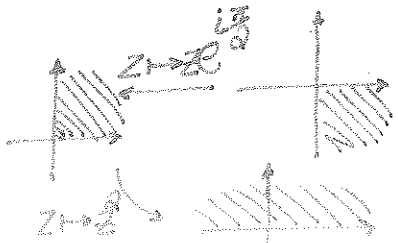
$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא

המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא



המערכת היא  $|z-1|=1$  ;  $|z-1|=\sqrt{2}$  ;  $|z-1|=\frac{1}{2}$  המערכת היא



7/11/13

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

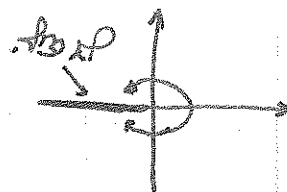
כ"ס) \*

$$\operatorname{Arg} z \in \arg z; \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

: המרה  
: 'המרה' המרה

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

המרה המרה  
המרה המרה

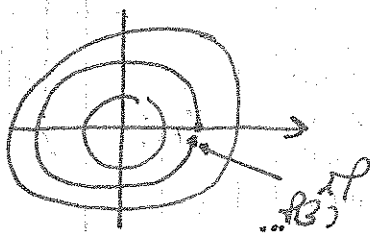


המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה



המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

$$\boxed{\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z}$$

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

המרה המרה  
המרה המרה

7/11/13

# 4. מילר, שני

! נרמית  $l(z)$  של  $G$  ממשל:  $l(z)$  רק:  $l'(z) = \frac{1}{z}$

0 של  $l(z)$ ;  $l_0 := l(z_0)$ ;  $z_0 \in G$  נקרא: נקודת

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{l(z) - l(z_0)}{z - z_0} ; \lim_{l(z) \rightarrow l(z_0)} \frac{l(z) - l(z_0)}{z - z_0}$$

המשל של  
המשל של  
המשל של

המשל של  
המשל של

משל:

$$l'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{l(z) - l(z_0)}{z - z_0}$$

משל:  $z \rightarrow z_0 \Rightarrow l(z) \rightarrow l(z_0)$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{l(z) - l(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{l'(z_0)} = \frac{1}{z_0}$$

משל:  $z \rightarrow z_0$

$G \subseteq \mathbb{C}$ : נרמית  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , נקרא  $G$   
 $f(g(z)) = z$  ו  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ , נקרא  $g$

$G$  של  $f \neq 0$  ו  $f^{-1}$  של  $g$  נקרא  $z \in G$  של

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))} ! \text{ נרמית } G \text{ של}$$

משל של  $G$  של  $f \neq 0$  ! ,  $f \in H(G)$  נקרא: נקרא  $G$  של  
 $f = e^g$  נקרא  $g$  של  $\log f$  של  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$

של  $\log z$  של  $l$  של  $z$  של  $l(z)$  נקרא  $f(G)$  נקרא  $l^*$   
 $\log f$  של  $z$  של  $l^*$

$$g' = \frac{f'}{f} ! \text{ נרמית } g \text{ של } f \text{ של } g$$

משל של  $z$  של  $U_{z_0}$  נקרא  $z_0 \in G$  נקרא: נקרא  
 $l: V \rightarrow \mathbb{C}$  של  $l^*$  של  $l^*(z_0)$  של  $V$  של  $l^*(U_{z_0})$  של

$U_{z_0}$  של  $\log f$  של  $z$  של  $l^*$  של

משל של  $g$  של  $U_{z_0}$  של  $\log f$  של  $g$  של

משל:  $g'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$  של  $g = \log f + 2\pi i$  של

הפונקציה  $f(z) = e^z$  היא פונקציה אנליטית.  $\log f$  היא פונקציה אנליטית.  $f(z) = e^z$  היא פונקציה אנליטית.  $z$  היא פונקציה אנליטית.

### 5. פונקציה אנליטית

הפונקציה  $\log z = \log|z| + i \arg(z)$  היא פונקציה אנליטית.  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

$e^{u(z)} = z$  היא פונקציה אנליטית.  $z \in G$  היא פונקציה אנליטית.

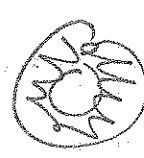
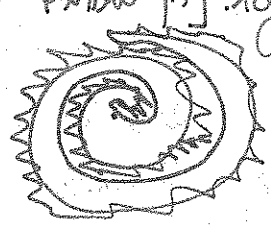
הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

$z \in G$  היא פונקציה אנליטית.  $e^{u(z)} = f(z)$  היא פונקציה אנליטית.

הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

$u' = \frac{f'}{f}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

[הפונקציה  $\log z$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.]



הפונקציה

$\log z$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

$z^a = e^{a \log(z)}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

$[\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)] z^a = e^{a \log(z)}$  היא פונקציה אנליטית.

הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

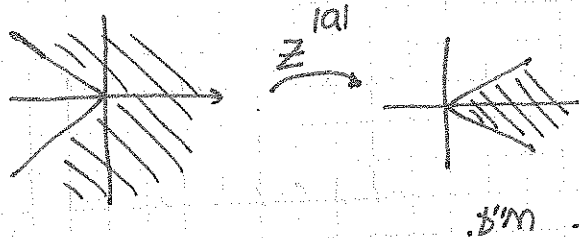
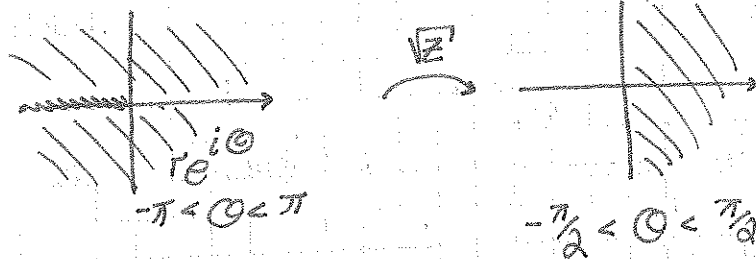
$$z^a = \{ e^{a \ln r} e^{i a (\theta + 2\pi k)} ; k \in \mathbb{Z} \}$$

הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

הפונקציה  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.  $G \subseteq \mathbb{C}$  היא פונקציה אנליטית.

$$p \sim e^{\frac{1}{2} \log(z)}$$

מד  $\sqrt{z'}$  ה מהירות הפח : הי  
 $C \setminus [-\infty, 0]$



באופן פומבי  
במסגרת תוכנית/תוכנית  
המסגרת

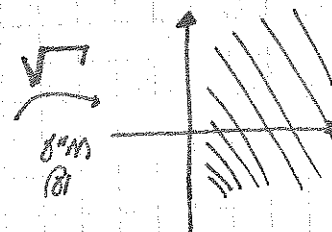
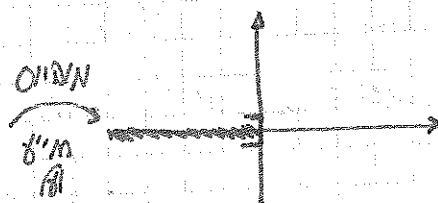
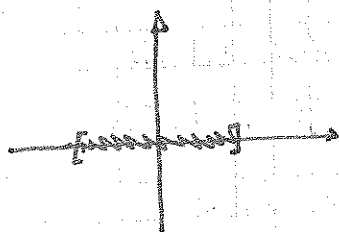
אם  $|a| \geq 1$  מתקבל

16 NC 19

$$G = \hat{C} \backslash E \cup I$$

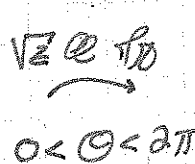
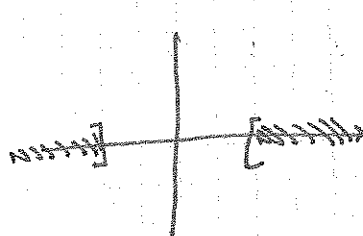
6 10

$$g(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \quad (1)$$



מחצית מלך

3.  $G = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$  מ"ד וקווי פתוחים. (2) חזרים בעמדה



$$-\pi < \theta < \pi ; Z = re^{i\theta}$$

3)  $z^a = r^a e^{ia\theta}$

PMIC

ל  $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$  ידוע:

опм  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N a_n \right) \quad \text{лишь при } p_k$$

10/11/13

# סדרות אינסופיות

קרינה:  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$  אם  $|z| < 1$  וכל  $|z| \geq 1$  לא מתקבל.

קרינה: קרינה:  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אם  $\epsilon > 0$  קיים  $N$  כך ש- $\forall m, n > N$ :  $|\sum_{k=m}^n C_k| < \epsilon$

\*) אומדן של  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אם  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  מתקבל.

\*) אם  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אז  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  מתקבל [משפט קרינה]

משפט: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אז  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  מתקבל.

משפט: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אז  $\sum_{k=1}^{\infty} C_{n_k}$  מתקבל לכל  $n_k$  מתקבל. [משפט קרינה]

הערה: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אז  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  מתקבל. משפט קרינה.

משפט: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אז  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  מתקבל. משפט קרינה.

## משפט קרינה

משפט: אם  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  מתקבל אז  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  מתקבל.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 0}} a_k b_l \right) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)$$

משפט קרינה

$$C_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 0}} a_k b_l$$

הערה: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  מתקבל אז  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  מתקבל.



$$\sum_{k,l=0}^{N-1} |a_k| |b_l| = \left( \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right) \left( \sum_{l=0}^{N-1} |b_l| \right) \leq \dots$$

12/11/13

הנדסה

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n = \left( \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) \left( \sum_{l=0}^{N-1} b_l \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} b_l \right)$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} = e^{z-z_0}$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$C_n = \sum_{k+l=n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!} =$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \binom{n}{k} z^k w^l = \frac{1}{n!} (z+w)^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k+l=n} a_k a_l \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (n+1)$$

הנדסה

[הנדסה]

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$\sup_{z \in G} |g_n(z) - g(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists N: \forall n > N: \sup_{z \in G} |g_n(z) - g(z)| < \epsilon$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N: \sup_{z \in G} |g_n(z) - g_m(z)| < \epsilon$$

אם  $f$  היא פונקציה אנליטית בנקודה  $z_0$  אזי יש לה פיתוח טיילור סביב  $z_0$ .

$$g: S \rightarrow \mathbb{C} \quad g_1, g_2, \dots: S \rightarrow \mathbb{C}$$

12/11/13

5.18.2

12/11/13

(1) היות  $g_n(z) = z^n$  ב  $S^1$ . כל פונקציה רגולרית  
 $\sup_{|z| \leq 1} |g_n(z) - 0| = \sup_{|z| \leq 1} |z^n| = 1 \rightarrow 0$  ! חסר  
 על המישור המרוכב

$\sup_{|z| < R} |z^n - 0| \leq |R|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  כל  $|z| < R < 1$  כל  $|z| \leq 1$  כל

הערה: כל פונקציה  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  שבה  $S \subseteq \mathbb{C}$  ובה  $f_n$  רגולריות  
 הסכומים חלקיים:  $g_N = \sum_{n=1}^N f_n$  כל פונקציה רגולרית ב  $S$ .

[כל פונקציה רגולרית שבה  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  רגולריות]

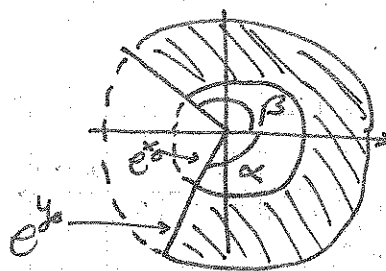
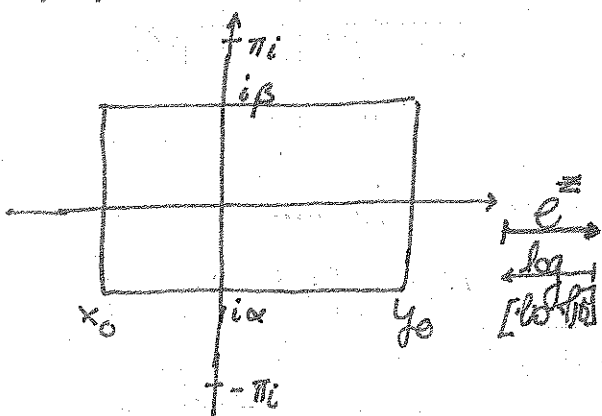
הערה: כל פונקציה  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  שבה  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  רגולריות  
 כל פונקציה רגולרית שבה  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  רגולריות

הערה: כל פונקציה רגולרית שבה  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  רגולריות

5.18.2

$e^z = e^x \cdot e^{iy}$  : הערה

12/11/13



Jukowsky

$f(z) = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$

כל פונקציה רגולרית שבה  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  רגולריות

$\frac{1}{2} (z_1 + \frac{1}{z_1}) = \frac{1}{2} (z_2 + \frac{1}{z_2}) \rightarrow z_1 \cdot z_2 + \frac{1}{z_1} = z_2 \cdot z_1 + \frac{1}{z_2}$

~~$z_2 - z_1 = z_2^2 z_1 - z_1^2 z_2$~~

$z_2 - z_1 = z_2^2 z_1 - z_1^2 z_2$

$z_2 - z_1 = (z_2 \cdot z_1) (z_2 - z_1)$

$z_1 \cdot z_2 = 1 \rightarrow z_1 = \frac{1}{z_2}$

$z_2 = z_1$  כל

5th rule

Wm. Wm

$$(z-w) = \sqrt{w^2-1} \iff (z-w)^2 = w^2-1$$

$\sqrt{w^2 - 1}$  !  $\omega$   $\sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}$  ;  $G \setminus [-1, 1]$

וזו המורה המלאה!  
 פן חז-מורה!  

$$\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}$$

✓ 6 14 20 24 28 32 36 40 44 48 52 56 60 64 68 72 76 80 84 88 92 96 100  
GVE-03, 01 2 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

היך  $\rho$ ,  $w$ , ו- $\omega$  הם המרחק, המסתם והזווית בין שני נקודות במישור.

עולם של  $\rightarrow$  [הוא רץ ויש לו כוח]

[illegible]

והסימן ההפוך:  $z = \omega \pm \omega \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}}$  ;  $\omega \neq 0$

$$(*) \quad \underbrace{(\omega + \omega \sqrt{1 - \omega^2})}_{\downarrow \frac{1}{\omega}} \underbrace{(\omega - \omega \sqrt{1 - \omega^2})}_{\downarrow \frac{1}{\omega}} = 1$$

ואם הקדש בין השנים.

$\omega + \omega \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$

[G\&] הו קטור מכוון, וזו מול  $S^2$ . [המחנה]

1.  $\frac{1}{2}$  of the total population is under 15 years of age.  
 2.  $\frac{1}{3}$  of the total population is over 65 years of age.  
 3. The population is growing at a rate of 1.5% per year.  
 4. The population is concentrated in the coastal areas.  
 5. The population is highly mobile.  
 6. The population is highly educated.  
 7. The population is highly skilled.  
 8. The population is highly entrepreneurial.  
 9. The population is highly innovative.  
 10. The population is highly adaptable.

[illegible]

Q \ S B B pte dms 10 B

5 10 15 20

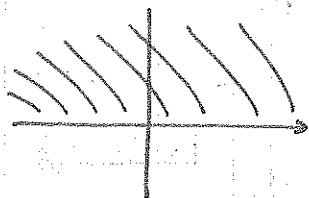
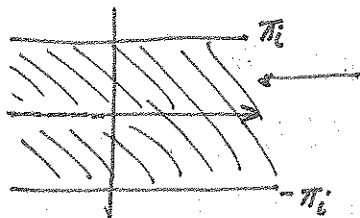
$C \setminus S^1$  to  $\{ |z| > 1 \}$  to  $PGL$

$$\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \cdot \underbrace{e^{iz}}_{\text{Ans}} = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

20

מ. 1131 המספר ב' תל אביב

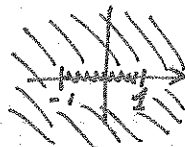
100



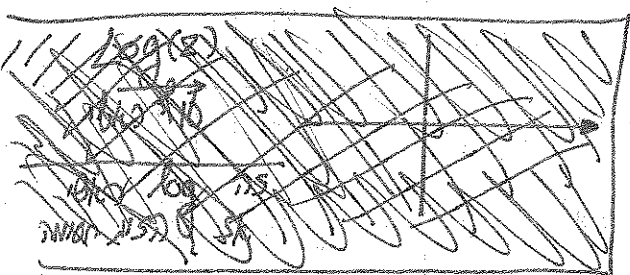
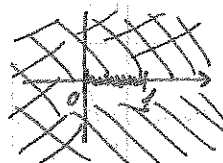
01/11



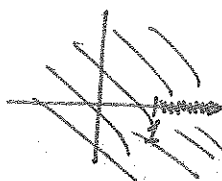
July 1944



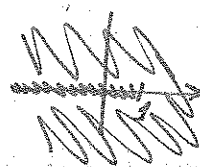
子



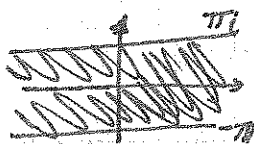
1



2-12



$-\pi \leq \pi$   $\log$



2/12/12

② תחנות מרחם ← על פי מדיניות

graw Dixon → graw rex 36 (\*)

④ ԶԻՅԱՆ

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ sk opnn } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

•  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$  converges

[Група в'їзду поїзду]: Скелечин в по М\*

פרק-12 מודון מיוחד על  $f_1, \dots, G \rightarrow G$ ! מוד  $G \subseteq G$  יח

$\forall z \in G : |f_n(z)| \leq M_n$  и  $0 \leq M_1, M_2, \dots$   
 $\sum_{i=1}^{\infty} M_i < \infty$

Case : lip pump

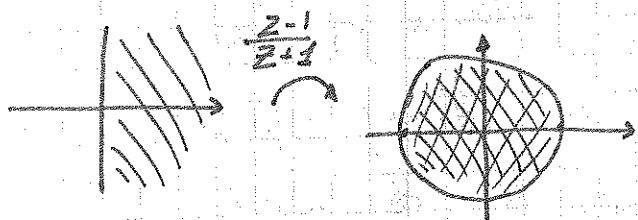
$$\sup_{z \in G} \left| \sum_{i=r}^s f_n(z) \right| \leq \sum_{i=r}^s M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s \rightarrow \infty} 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-1}{z+1}}$$

12 1/2 100

פרימט

מלחמה בנאציזם



הערה:  $\text{Re} z > 0$  ו-  $\text{Im} z$  שונים

$$0 < \varepsilon \quad \text{b.} \quad \operatorname{Re} z_0 > 0 \quad \text{f.} \quad z_0 \quad \text{f.}$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = O(\log n) \quad \text{و } \delta = 0!$$

מכאן, קח  $\epsilon$  כזה  $z_0$  בה  $1-\epsilon > \left| \frac{z_0}{z_0-1} \right|$  כל  $z$  מסביבה  $z_0$  מקיים.

$\left| \frac{z+1}{z-1} \right|^n \leq (1-\varepsilon)^n$  skl במסגרת וויזואלית  
 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^n$  p כיון  $z_0$  ב  $\mathbb{D}$  מתקיים  $z \in \mathbb{D}$

WPSA MIC

$$z_0, C_n \in G \quad \text{no} \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad \text{mibn} \quad \text{pnc}$$

$\text{Re}[0, +\infty]$  .  $n=0$   $R$   $\frac{1}{R} = \lim |G_n|^{\frac{1}{n}}$  :  $\mu_0$

14/11/13

5 דפים

תאריך: 14/11/13

Colours:  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$  זהו  $R$  רדיוס ההתכנסות.  $D(z_0, R)$  סדרת הנקודות

הכיוון שבו  $z \in D(z_0, R)$  נמצא, ונניח  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$  הפונקציה הנגזרת

התכנסות נורמלית:  
התכנסות בהתאם  
לנורמה

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z-z_0)^{n-1}$$

מקרה:  $z_0 = 0$

1) מקריב  $z_0 \in D(0, R)$  ונניח  $z \in D(0, \rho)$  ונניח  $\rho < R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \rho^n$$

נניח  $|C_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R} + \epsilon$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \rho^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n \rho^n$$

כלומר,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{1/n} = \frac{1}{R} > \frac{1}{|z|}$  כלומר,  $|z| > R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n C_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n |C_n|^{1/n} > 1$$

כלומר  $\sum z^n C_n$  לא מתכנס

3) נקודת  $z_0$  כזו שבה  $|z_0| < R$  נקראת נקודת התכנסות פנימית.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

השאלה היא:  $|z_0| < \rho < R$  אז

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n n z_0^{n-1}$$

האם זה מתכנס?

$$\frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} C_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n w_0^n}{w - w_0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}$$

השאלה היא:

$$\left| \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n n w_0^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left( \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} - n w_0^{n-1} \right) \right|$$

$$\frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} - n w_0^{n-1} = (w^{n-1} + w^{n-2} w_0 + \dots + w_0^{n-2} w + w_0^{n-1}) - n w_0^{n-1}$$

$$A_n : |w^n - w_0^n| \leq |w - w_0| \left| \sum_{l=0}^{n-1} w^l \cdot w_0^{n-1-l} \right| \quad \text{se } |w_0|, |w| < \rho \quad \text{pc: } \underline{C^1_k}$$

$$\leq |w - w_0| \cdot n \cdot \rho^{n-1} \quad \text{pl!}$$

$$\left| \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} - n w_0^{n-1} \right| = \left| \sum_{l=0}^{n-1} (w^l w_0^{n-1-l} - w_0^{n-1}) \right| = \left| \sum_{l=1}^{n-1} w_0^{n-1-l} (w^l - w_0^l) \right|$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n-1} \rho^{n-1-l} \cdot |w - w_0| \cdot l \cdot \rho^{l-1} \leq n |w - w_0| \sum_{l=1}^{n-1} \rho^{n-2} \leq n^2 |w - w_0| \rho^{n-2}$$

$$\left| \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot n w_0^{n-1} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| n^2 |w - w_0| \rho^{n-2} = |w - w_0| \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| n^2 \rho^{n-2}}_{\text{pl!}}$$

הקטן הזה הוא  $\lim_{n \rightarrow \infty} (K n^2 \rho^{n-2}) = \frac{1}{R} \cdot \rho < 1 \rightarrow$   $\text{הוא קטן!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K n^2 \rho^{n-2}) = \frac{1}{R} \cdot \rho < 1 \rightarrow \text{הוא קטן!}$$

19/11/13 בית 10

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{בה } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{זוהי } \underline{\text{הרדיוס של התבונה}}$$

זוהי  $z_0 = 0$  נניח

$\{ |z| < R \}$ ,  $\rho$  נקודה מסוימת  $\in \mathbb{C}$

הוא מסוימת  $\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n|$   $|z| > R$   $\text{זהו}$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \text{ומקיים } \Delta_R \text{ שבו } f \in H(\Delta_R) \quad \text{זהו}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{ומקיים } f^{(n)} \in H(\Delta_R) \quad \text{זהו}$$

$$R \text{ זהו } \Delta_R \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n-1} \quad \text{זהו } \textcircled{A}$$

הוא  $\sum a_n z^n$   $\Delta_R$   $\text{זהו } \textcircled{B}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n} \quad \text{זהו}$$

זהו  $\Delta_R$

$$\text{הוא } e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (1) \quad R = \infty \quad \text{... מקיים } \Delta_R$$

$$e(0) = 1, \text{ זה } e(z) = e^z \quad e'(z) = e(z) \quad \text{... זהו}$$

$$y/z \text{ in } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$R = \infty ; \cos(z) = \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} ; \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad \therefore \text{MC } (3)$$

1. un konvergenz.  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$  D.  $\mu_0 = 1000$

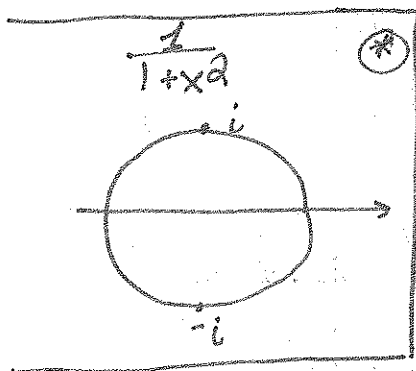
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n \quad \text{for } |z| < 1$$

$$l'(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{pt.}$$

$$l'(z) = (\log(1+z))'$$

לפי ההנחה  $l(0) = \log(2+0) = 0$  וכן  $l'(0) = 0$

10.9.2  $h(z) = \text{Log}(1+z)$



$$\text{Arctan } z = \frac{1}{2i} \text{Log} \frac{1+iz}{1-iz} \quad \{ |z| < 1 \} \quad \text{poor} \quad (4)$$

Arctan  $z$  is sp. as noted:  $\text{Re}(z)$

~~Re~~  $\text{Re}(z + iz) = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} > 0$   $|z| < 1$   $\text{P.P.M.}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} z^{2n-1} \xrightarrow[\text{W.D.M.}]{\text{W.D.M.}} \text{Arctan}(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

$$(1+z)^5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(5-1)\dots(5-n+1)}{n!} z^n \quad \because \quad \begin{matrix} 5 \in \mathbb{C} \\ \text{⑤} \end{matrix} \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{5}{n} z^n$$

תורת אור כק. יפיוס התכנסת 1 [אק 6&N, אה 15 סס 100]

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{pmatrix} 5 \\ n \end{pmatrix} \text{ prob. for}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$[\log(1-z)]^2 = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right]^2 = \left[ \sum_{n=2}^{\infty} z^n \sum_{\substack{k+l=n \\ 1 \leq k, l \leq n-1}} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{l} \right] = \dots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} z^n \sum_{k+j=n} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{j} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n} z^n$$

Answer:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{n}\right)^{1/n} \rightarrow 1$  for  $\frac{1}{n} \leq \frac{4n}{n} \leq 1$  (p. 2)

19/11/15

# הכללה

אינטגרציה:

המשפט:  $f$  פונקציה ממשלתית  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  נחשבת פונקציה

$$\int_a^b \varphi(z) dz = \int_a^b \operatorname{Re}(\varphi(z)) dz + i \int_a^b \operatorname{Im}(\varphi(z)) dz \quad a, b \in \mathbb{R}$$

המשפט:  $\varphi$  פונקציה ממשלתית  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  נחשבת פונקציה  $\varphi$  פונקציה ממשלתית  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  נחשבת פונקציה

המשפט:

$$[c_1, c_2 \in \mathbb{C}] \quad \int_a^b \varphi_1(z) dz + \int_a^b \varphi_2(z) dz = c_1 \int_a^b \varphi_1(z) dz + c_2 \int_a^b \varphi_2(z) dz \quad (*)$$

המשפט:  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה ממשלתית  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  נחשבת פונקציה

$$\int_a^b \varphi'(z) dz = \varphi(b) - \varphi(a)$$

$$\left| \int_a^b \varphi(z) dz \right| \leq \int_a^b |\varphi(z)| dz$$

המשפט:

$$\int_a^b \varphi(z) dz = 0 \quad \text{אם } \varphi(z) = 0 \quad \text{לכל } z \in [a, b]$$

$$\left| \int_a^b \varphi(z) dz \right| = \left| \int_a^b \lambda \varphi(z) dz \right| = \operatorname{Re} \left( \int_a^b \lambda \varphi(z) dz \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda \varphi(z)) dz \leq \int_a^b |\lambda \varphi(z)| dz = \int_a^b |\lambda| |\varphi(z)| dz = |\lambda| \int_a^b |\varphi(z)| dz$$

המשפט:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה ממשלתית  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  נחשבת פונקציה

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(z)| dz$$

$$\int_a^b \sqrt{x'(z)^2 + y'(z)^2} dz$$

המשפט:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה ממשלתית  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  נחשבת פונקציה

$$\gamma(z) = (1-z)z_1 + z z_2 \quad [z_1, z_2] \quad \text{אם } \gamma'(z) = z_2 - z_1$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dz = |z_2 - z_1|$$



19/11/13

# Corollary 2.12

$g'(z) = f(z)$  on  $\Delta_R$  and  $g(z) = a_0 z + \frac{a_1 z^2}{2} + \dots$

$$g(z) = a_0 z + \frac{a_1 z^2}{2} + \dots$$

pl!

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} g' = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0$$

imagine that  $\gamma$  is

19/11/13

## 6. Power Series

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

is not a power series: pl!

$$\dots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

$$a_n = \begin{cases} n & n = k! \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k!]{k!} = 1$$

pl!  $R=1$

$$\frac{n!}{n^n}$$

...  $(1+z)^{\alpha}$  is not a power series: pl!

$$(1+z)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+z)} \rightarrow (e^{\alpha \log(1+z)})' = e^{\alpha \log(1+z)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{1+z} = \alpha (1+z)^{\alpha-1}$$

$$((1+z)^{\alpha})^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+z)^{\alpha-k}$$

$$(f(z))^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+z)^{\alpha-k}$$

pl!

is not a power series [...]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1$$

is not a power series: pl!

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

pl! is not a power series

...  $f(z) = \arctan z$  is not a power series: pl!

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}$$

pl!

...  $f(z) = \arctan z$  is not a power series: pl!

...  $f(z) = \arctan z$  is not a power series: pl!

19/1/3

6 תרגילי פתרון

$$(1+\tan z) = \frac{1}{1+\tan z} \cdot \frac{1}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1$$

הנחה:  $\tan z$

לפי הנוסחה של קוואנטיזציה [הנחה]

הנחה:  $\tan z$

אם  $z$  הוא מספר ממשי אז  $\tan z$  הוא מספר ממשי  
אם  $z$  הוא מספר מרוכב אז  $\tan z$  הוא מספר מרוכב  
אם  $z$  הוא מספר מרוכב אז  $\tan z$  הוא מספר מרוכב

אם  $z$  הוא מספר מרוכב אז  $\tan z$  הוא מספר מרוכב

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(x+iy) (x'+iy') dx$$

הנחה:  $\tan z$

$$\left| \int_a^b f(z) dz \right| \leq 4$$

אם  $z(0) = ie^{i0}$  ו  $z(2\pi) = ie^{i2\pi}$  אז  $z = e^{i\theta}$

אם  $z = e^{i\alpha}$  אז  $z' = ie^{i\alpha}$

$$\left| \int_a^b f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(e^{i\alpha}) ie^{i\alpha} d\alpha \right| = \left| \int_a^b f(e^{i\alpha}) \cos \alpha d\alpha \right|$$

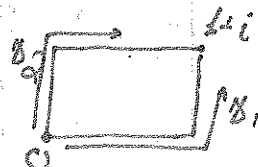
$$= \left| \int_a^b \operatorname{Re}(f(e^{i\alpha}) \cos \alpha) d\alpha \right| = \left| \int_a^b \operatorname{Re}(f(e^{i\alpha}) \cos \alpha) d\alpha \right|$$

$$= \left| \int_a^b f(e^{i\alpha}) \sin \alpha d\alpha \right| \leq \int_a^b |f(e^{i\alpha})| |\sin \alpha| d\alpha \leq \int_a^b |\sin \alpha| d\alpha =$$

$$= 2 \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = 4$$

$$\int_a^b z dz = \int_a^b x dx + \int_a^b y dy = 1-i$$

אם  $z = x+iy$  אז  $z' = x'+iy'$



הנחה:  $\tan z$

$$z = 0 \leq t \leq 1$$

$$1+(z-1)z = [1-(z-1)] + (z-1)(1+i)$$

$$z_1(z) = \begin{cases} i & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$z_1 = \begin{cases} 1 & 0 \leq z \leq 1 \\ i & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_a^b z dz = 1-i$$

2/11/13

6 חזר

: Regular function

כל  $z_0$  שבו  $f$  רגולרי  
 $z_0$  נקרא  
 $z(z) = z_0 + e^{it}$   
 $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

(\*)

$$\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$$

הקו  $\gamma$  הוא  $(z-z_0)^n$  שבו  $n \neq -1$  לפי

ההנחה. כלומר, אם  $f$  רגולרי בנקודה  $z_0$  אז  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^{-1} dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^{-1} \cdot Re^{it} i dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

: נוסחה

כל  $z_0$  שבו  $f$  רגולרי  
 $z_0$  נקרא  
 $z(z) = z_0 + e^{it}$   
 $n \in \mathbb{Z}$

[כל  $z_0$  שבו  $f$  רגולרי]  $n \in \mathbb{N}$  שבו  $f(z) = \frac{1}{z} (z - \frac{1}{z})^{2n}$

שבו  $z \in [0, 2\pi]$  שבו  $\gamma(z) = e^{it}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \binom{2n}{n} \left[ \frac{1}{z} (z - \frac{1}{z})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(-\frac{1}{z}\right)^{2n-k} z^k = \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{k-2n-1}$$

כל  $z_0$  שבו  $f$  רגולרי  
 $z_0$  נקרא  
 $z(z) = z_0 + e^{it}$   
 $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} (e^{it} - \frac{1}{e^{it}})^{2n} \cdot i e^{it} dt = 2^{2n} i \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt = \frac{2\pi \binom{2n}{n}}{2^{2n}} = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}$$

כל

: כל-המשפט

יהי  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  קו מתפתל, אז  $\gamma$  רגולרי

הוא מהמשפחה  $\gamma: [a, b] \rightarrow [a, b]$  שבו  $\gamma = \gamma \circ \beta$  אם  $\gamma$  רגולרי

כל  $\gamma$  רגולרי מתפתל [כלומר, קו מתפתל]

אם  $f$  רגולרי בנקודה  $z_0$  אז  $f$  רגולרי בנקודה  $z_0$

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\beta(s))) \gamma'(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds$$

: נוסחה

$$\int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f dz$$

הכלל  
 $\gamma = \beta \circ \alpha$   
 $\gamma' = \beta' \circ \alpha'$

21/11/3

# הקדמה

פונקציה  $f: \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  נקראת פונקציה אנליטית.

משפט:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה אנליטית

$$\left| \int_a^b f(z) dz \right| \leq (\max_z |f(z)|) \cdot L(\gamma)$$

הוכחה:  $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$  נקראת

$$\left| \int_a^b f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = M L(\gamma)$$

[...! נוסחה] : משפט -  $f_n \rightarrow f$  פונקציות אנליטיות

$$\lim \int_a^b f_n(z) dz = \int_a^b \lim f_n(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

הוכחה:  $n \rightarrow \infty$

$$\left| \int_a^b f_n(z) dz - \int_a^b f(z) dz \right| = \left| \int_a^b (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \max_z |f_n - f| \cdot L(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

אם  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה אנליטית ו- $E \subseteq \mathbb{C}$  קבוצה חסומה ו- $f(z, w) \in G(\text{Im}(E) \times E)$  פונקציה אנליטית ב- $z$  וקבוצה חסומה ב- $w$ .

$$Q(w) = \int_a^b f(z, w) dz$$

הוכחה:  $f(z, w)$  פונקציה אנליטית ב- $z$  וקבוצה חסומה ב- $w$ .

הוכחה:  $Q(w_k) \rightarrow Q(b)$  אם  $w_k \rightarrow b$

נניח:  $g_k \xrightarrow{u} g$  פונקציות אנליטיות:  $g = f(z, b)$  :  $g_k = f(z, w_k)$

ממילא  $Q$  פונקציה אנליטית ב- $w$ .

משפט:  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה אנליטית.

אם  $G \subseteq \mathbb{C}$  פתוח ו- $\gamma: [a, b] \rightarrow G$  קבוצה חסומה ו- $\gamma'(t) \neq 0$  אז:

$$\text{Im } \gamma \ni z_k = \gamma(z_k) \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad [a, b]$$

אז  $R = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (z_{k+1} - z_k)$

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (z_{k+1} - z_k)$$

פונקציה אנליטית  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  אז  $R \rightarrow \int_a^b f(z) dz$  כאשר  $n \rightarrow \infty$

[הוכחה: משפט]

2/11/13

6 ימים שני

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I \rightarrow I^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr = 2\pi \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi$$

20/11/13

7 ימים שני

פרק 1

הצגת פורמולה  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  (2)

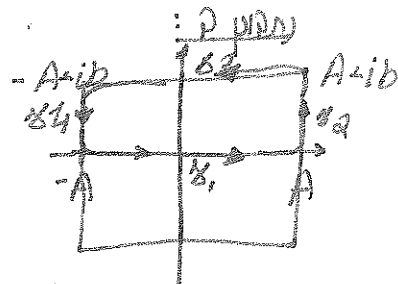
הוכחה של פורמולה זו באמצעות אינטגרל כפול

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cos(az) dz = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$$

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!}$$

לפיכך:  $f(z) = e^{-z^2}$  (10)

הוכחה של פורמולה זו באמצעות אינטגרל כפול



$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$  ולכן  $I_j = \int f(z)$  (10)

$$I_1 = \int_{z_1} e^{-z^2} dz = \int_{-A}^A e^{-t^2} dt$$

$$I_3 = \int_{z_3} e^{-z^2} dz = - \int_{-A}^A e^{-(t+ib)^2} dt = - \int_{-A}^A e^{-t^2 - 2ibt - b^2} dt = -e^{-b^2} \int_{-A}^A e^{-t^2} e^{-2ibt} dt$$

$$|I_2| = \left| \int_{z_2} e^{-z^2} dz \right| \leq \max_{z \in z_2} |e^{-z^2}| \cdot b = \max_{t \in [0, b]} |e^{-t^2 - 2ibt}| \cdot b \leq b e^{-b^2/4} \rightarrow 0$$

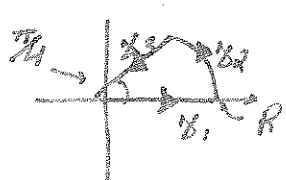
$$= - \int_{-A}^A e^{-t^2} (\cos(2bt) - i \sin(2bt)) dt = - \int_{-A}^A e^{-t^2} \cos(2bt) dt = -e^{-b^2/4} \int_{-A}^A e^{-t^2} \cos(2bt) dt$$

לכן  $I_2 \rightarrow 0$  כ- $b \rightarrow \infty$

$$e^{-b^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2bt) dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 0$$

הוכחה של פורמולה זו באמצעות אינטגרל כפול

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cos(az) dz = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$$



הוכחה של פורמולה זו באמצעות אינטגרל כפול

$$\int_{z_1} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-t^2} dt$$

20/11/13

7 מיל' פני

and the  $\gamma_2$  is regular with  $\gamma_2(t) = e^{-it^2} = \cos t^2 - i \sin t^2$  and  $\gamma_2'(t) = -2it e^{-it^2}$

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{i2\theta}} \cdot R i e^{i2\theta} d\theta \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta$$

$$= \left[ \varphi = \frac{\pi}{2} - 2\theta \right] \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi \leq \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi$$

$$e^{-R^2 \frac{2\varphi}{\pi}}$$

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin \varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R^2}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

... וכו' ...

... וכו' ...

$$e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

...

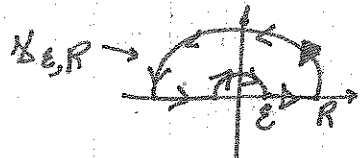
...

$$\int_0^{\infty} (\cos t^2 - i \sin t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

...

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt + \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt = 0$$



$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{1}{z} dz = 0$$

$$= 0 + \int_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{1}{z} dz = 0$$

$$0 = \int_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

$$= 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

...

...

20/11/13

7 מיליון ש"ח

$$\int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z} dz = 0 + \pi i \quad \epsilon \rightarrow 0 \rightarrow -\pi i$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right|$$

$$= \left| \int_0^\pi \frac{e^{-R \sin \theta + i R \cos \theta}}{R} R d\theta \right|$$

$$= \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \frac{\pi}{R} \rightarrow 0$$

$$\int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

לפי קוואל

Goursat קוואל

$\int_T f(z) dz = 0$  אם  $f \in H^1(G)$  !  $f \in H^1(G)$  !  $G \subseteq \mathbb{C}$  ו-  
 $\partial T$    $\partial T$  

$$I = \int_{\partial T} f(z) dz \neq 0$$

לפי קוואל  $T_0 = T$  

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

$$|I_j| \geq \frac{1}{4} |I|$$

$$\left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} |I|$$

$$\int_{\partial T_n} f(z) dz \geq \frac{1}{4} |I|$$

$$\int_{\partial T_n} f(z) dz \geq \frac{1}{4} |I|$$

$$\int_{\partial T_n} f(z) dz \geq \frac{1}{4} |I|$$

$$\int_{\partial T_n} f(z) dz \geq \frac{1}{4} |I|$$

$$\int_{\partial T_n} f(z) dz \geq \frac{1}{4} |I|$$

28/10/13

המשפט של פאן

הוכחה:  $z_0 \in D$  ו- $f$  פונקציה אנליטית ב- $z_0$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + o((z-z_0)^n)$$

$$\left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial T_n} R(z) dz \right| \leq L(\partial T_n) \cdot \epsilon_n \cdot L(\partial T_n) = \epsilon_n \cdot L(\partial T_n)^2$$

$$|R(z)| \leq \epsilon_n |z-z_0|$$

$z \in \partial T_n$

$$|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \leq \epsilon_n L(\partial T_0)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הוכחה:  $|I| \leq 4^n$

$$z_1, z_2 \in G \rightarrow [z_1, z_2] \subseteq G$$

כל קטע  $G \subseteq \mathbb{C}$

הוכחה:

הוכחה:  $G$  קטע  $\forall z_1, z_2 \in G$   $[z_1, z_2] \subseteq G$  !

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

המשפט של פאן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f$$

הוכחה:  $f_n \rightarrow f$  ב- $L^1$   $\Rightarrow \int_{\gamma} f_n \rightarrow \int_{\gamma} f$

הוכחה:  $f_n \rightarrow f$  ב- $L^1$   $\Rightarrow \int_{\gamma} f_n \rightarrow \int_{\gamma} f$

$$\sqrt{z^2 - 1} := z \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$$

$$\sqrt{1+w} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} w^k$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k \frac{1}{z^{2k+1}}$$

$$\int_{|z|=2} z \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} dz = \int_{|z|=2} z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k \frac{1}{z^{2k+1}} dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k \int_{|z|=2} \frac{1}{z^{2k}} dz = - \int_{|z|=2} \frac{1}{z} dz = - \frac{\pi i}{2}$$

26/11/13

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

אם ניקח  $\Gamma$

$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

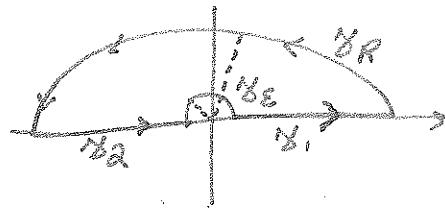
נניח:  $\Gamma$

כל מה שכתבתי  
הוא נכון  
אם כי  
אולי  
יש  
שגיאות

$\int_{\Gamma} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz$

$\Gamma = \Gamma(R) \cup \gamma(\epsilon) \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$  כל מה שכתבתי

[הכלל של קווי הריבועים הנגזרים]



$\frac{1-e^{iz}}{z^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = +\frac{i}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(iz)^{n-2} \cdot i}{n!}$

כל מה שכתבתי

$\int_{\Gamma} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz = \int_{\Gamma} +\frac{i}{z} dz + \int_{\Gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2} \cdot i}{n!} dz$

כל מה שכתבתי  
הוא נכון  
אם כי  
אולי  
יש  
שגיאות

$\int_{\Gamma} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz = 0$

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz$ ; For  $z$  s.t.  $\text{Im} z > 0 \rightarrow e^{iz} = e^{i \text{Re} z} e^{-\text{Im} z}$

$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \left| \frac{1-e^{iz}}{z^2} \right| |dz| \leq \pi R \cdot \frac{2}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{i}{z} dz - \int_{\gamma_{\epsilon}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i)^n z^{n-2}}{n!} dz \right)$

כל מה שכתבתי

אם  $f$  היא פונקציה  
משותפת, אז  $M \cdot L(\gamma_{\epsilon}) = M \cdot \pi \epsilon$

$\int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz = \int_{\gamma_{\epsilon}} -\frac{i}{z} dz = \pi$

$0 = \int_{\Gamma_{\epsilon, R}} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_{\epsilon}} + \int_{\gamma_R} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

הכלל של קווי הריבועים הנגזרים

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \pi$

7. יחיד

[ע"פ ע"פ] : מחבר מפורסם

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = 0 \quad \text{if } f \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

צורה:  $f = g'$  ביום  $g$  קטומה  $f$ !  $[z_0, z]$  חלק  $f$ ! החרמנה וקטומה  
חלק כס למין המרצה ומה אדם.

$$\left| \frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| = \left| \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} f(\xi) d\xi - \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} f(z_1) d\xi \right| =$$

$$\left| \frac{1}{z-z_1} \int_{[z_1, z]} (f(\xi) - f(z_1)) d\xi \right| \leq \max_{[z_1, z]} |f(\xi) - f(z_1)| \xrightarrow{z \rightarrow z_1} 0$$

$T \subseteq G$  וכל  $p \in C(G)$  :  $G \subseteq C$  יהי  
 $g = f \in p$   $g: C \rightarrow C$  נאמר  $f!$  נקרא  $\int_T f = 0$  נקרא

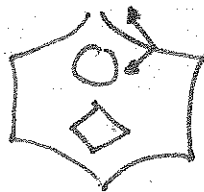
מה תפוק  
ה' אלהי  
ישראל!  
ומתקין  
העולם  
והצדקה  
והשלום  
... וכו'

Exp coln to mth doc

יחי  $G \subseteq C$  ממוקם מסוים ונקמה כי  $\Gamma_{\text{u.u}} \Gamma_p$   $\partial G =$   $\partial K$   $\Gamma_j$

מקומות שבהם יש להשתמש ב"ה" כמקור מידע

$\int_{\partial G} f = 0$  sk  $f \in H(G) \cap \mathcal{D}'(\bar{G})$  je sk. j'ed. p.n.p.



2000: 1000  
 1000: 1000  
 1000: 1000  
 1000: 1000  
 1000: 1000

W. J. P. W.

BR. T. R.

$$r_1(z) \in \mathcal{L}_p \neq$$

১৯৭৭

$$\Gamma_j(t) + i\varepsilon \Gamma_j(t) \in \mathcal{B}$$

28/11/13

# הוכחה למאור 7

הוכחה לטענה

נתון  $G$  קבוצה סופית.  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה.  $\epsilon > 0$ . נניח כי  $\sum_{g \in G} |f(g)|^2 < \epsilon$ .  
 נניח כי  $f$  איננה מתאפסת. נרצה להראות כי קיימת קבוצה  $Q \subset G$  כזו ש- $|Q| \leq \frac{1}{\epsilon}$  ו- $\sum_{g \in Q} |f(g)|^2 \geq \epsilon/2$ .

טענה  
מחזורית  
3

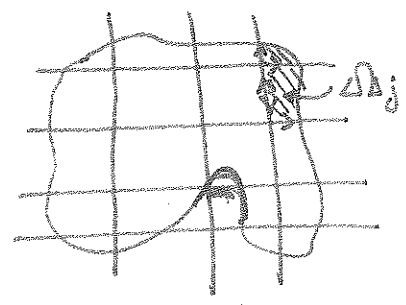
קבוצת הממוצעים  $\Delta_j = G \cap Q_j$  ו- $Q_j \subset G$ .  
 $Q_j$  קבוצת הממוצעים.

$$\int_G f = \sum_j \int_{\Delta_j} f$$

נניח  $\Delta_j = G \cap Q_j$ ; אז  $\Delta_j \subset G$

הוכחה חלופית  
למקרה  
כזה של  
הוכחה  
במקרה  
כללי

$$\sum_j \int_{\Delta_j} f = \int_G f$$



הוכחה חלופית  
למקרה  
כזה של  
הוכחה  
במקרה  
כללי

$$\int_G f = \sum_j \int_{\Delta_j} [f(z) - f(z_j)] dz$$

הוכחה חלופית  
3/10/13

הוכחה  
למקרה  
כזה של  
הוכחה  
במקרה  
כללי

קבוצת הממוצעים  
של  $\Delta_j$

$$\epsilon \geq \max_{|z-w| \leq \delta \sqrt{N}} |f(z) - f(w)|$$

קיים מרכז  $w$  של  $\Delta_j$  כזה ש- $|z-w| \leq \delta \sqrt{N}$  לכל  $z \in \Delta_j$ .

$$\left| \int_G f \right| \leq \epsilon \sum_j \Delta(\Delta_j)$$

$$\Delta(\Delta_j) \leq 4\delta + \Delta(G \cap Q_j)$$

$$\left| \int_G f \right| \leq 4\epsilon \delta N + \epsilon \Delta(G)$$

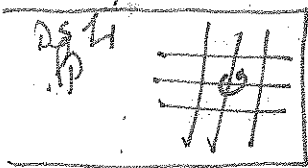
הוכחה חלופית  
למקרה  
כזה של  
הוכחה  
במקרה  
כללי

3/12/13

# הוכח שערך 8

צדד: אם סקומה עומת פתק 5 נכנסים לסתם [החלק של המסלול ע"ל חסד]  
אם האורך של הסקומה הוא פתק 5. [חסד מקומי...]

חסד: פתק 5 נכנסים לניקוי קיימים פתק 2 שם פתק לניקוי כלומר אין  
קופתו ושלל. [נכנס פתק נכנס 10 נכנסים זה החלק]



נסתקב:

$$\angle(\Gamma_j) \geq (\frac{1}{4}N_j - 1)\delta$$

הערה: במקרה  
הזה

$N_j$  כאלו מספר הנקודות שמתחם סגור  $\Gamma_j$

החלקה:

$$k = \left\lfloor \frac{\angle(\Gamma_j)}{\delta} \right\rfloor + 1$$

לפי



$$k > \frac{\angle(\Gamma_j)}{\delta}$$

כלי נחלק את  $\Gamma_j$  לא סקומה מאורך שווה.

כל סקומה כזו מכילת לא עומת פתק 2 ויש לה נכנסים [כחלק מהחלק]  
הוא יש לה מסלול...]

$$\angle(\Gamma_j) \geq (\frac{1}{4}N_j - 1)\delta \quad \leftarrow \quad N_j \leq 4k \leq 4\left(\frac{\angle(\Gamma_j)}{\delta} + 1\right)$$

מספר הסקומות

$$N \leq \sum_{j=1}^p N_j \leq 4\left(\frac{\angle(\partial G)}{\delta} + p\right)$$

$$\left| \int_{\partial G} f \right| \leq 4\epsilon\delta N + \angle(\partial G)\epsilon \leq \epsilon(4\delta N + \angle(\partial G)) + \epsilon\delta p + \angle(\partial G)\epsilon$$

לפי פתק 5 נכנסים זה מקום (δ < 1) לפי המסלול הוא

הערה: קופתו את המסלול הסגור!

הוכח קולט

צדד: יהי G מוקד חסד:  $f \in H(G)$ :  $f \in H(G)$ :  $\partial G = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p$  כאלו

$\Gamma_j$  סקומה סגורה:  $\Gamma_j$  סגורה פתק, חלקה  $G^1$  ושלל המקומות.

מיוק נח  $f \in G(\bar{G})$  ~~הוא~~  $st$  מקומות

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f(z), & z \in G \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus G \end{cases}$$

3/12/13

8 ימים שבת

מסלול הקורס

דוגמה:  $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$  שבו  $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}$  כל  $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}$   $p_k$   
 הפונקציה  $g$  היא פונקציה אנליטית ב- $H(B) \cap D(\bar{B})$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$



אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

הפונקציה  $g$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$  והיא שווה לאפס ב- $B$

$$\int_{\partial B \cup \Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0; \quad \int_{|\xi - z| = \epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

פר: משהו כזה

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

$$\int_{|\xi - z| = \epsilon} \frac{1}{\xi - z} d\xi + \int_{|\xi - z| = \epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi$$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

$$\int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial B \cup \Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

$$\int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z)$$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

$$G \supset \bar{B}_\rho(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leq \rho\}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

$$f \equiv \text{const} \quad \text{כל} \quad |f(z_0)| = \max_B |f|$$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

אם  $z \in B$  אז  $g(\xi)$  היא פונקציה אנליטית ב- $B$

$$G \setminus U = \{z \in B \mid f(z) \neq f(z_0)\} \quad U = \{z \in B \mid f(z) = f(z_0)\}$$

3/12/13

שאלה 8

נתון  $0 < r < R$  ו-  $B_r(z) \subseteq B_R(z)$  ו-  $z \in U$  ו-  $f$  פונקציה אנליטית ב-  $U$ .  
 נניח  $|f(z)| \geq |f(z + re^{i\theta})|$  ו-  $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$ .  
 [הוכח:  $f$  היא פונקציה קבועה] ו-  $f(z) = f(z + re^{i\theta})$ .  
 הפתרון: נניח  $f$  היא פונקציה אנליטית ב-  $U$ . נניח  $z \in U$  ו-  $0 < r < R$ .  
 נניח  $|f(z)| \geq |f(z + re^{i\theta})|$  ו-  $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$ .  
 נניח  $f$  היא פונקציה אנליטית ב-  $U$ . נניח  $z \in U$  ו-  $0 < r < R$ .  
 נניח  $|f(z)| \geq |f(z + re^{i\theta})|$  ו-  $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$ .

## ליקט פונקציות

שאלה 8

נתון  $\gamma \in C(\mathbb{D})$  ו-  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .  
 נניח  $\gamma$  היא פונקציה אנליטית ב-  $\mathbb{D}$ .

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi \rightarrow z \in \mathbb{D}$$

הוכח:  $F$  היא פונקציה אנליטית ב-  $\mathbb{D}$ .

נניח  $F \in \text{Hol}(\mathbb{D} \setminus \gamma)$ .  
 נניח  $F^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$ .

הוכח:

נתון  $\delta > |z - z_0|$  ו-  $\delta = \text{dist}(z_0, \gamma)$  ו-  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \gamma$ .  
 נניח  $\xi \in \gamma$  ו-  $\xi \in \mathbb{D}$ .

$$\frac{1}{(\xi - z) \cdot (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \varphi(\xi)$$

$$\frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} \leq \frac{|z - z_0|}{\delta} < 1$$

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) (z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

הוכח:  $F$  היא פונקציה אנליטית ב-  $\mathbb{D}$ .  
 נניח  $F$  היא פונקציה אנליטית ב-  $\mathbb{D}$ .  
 נניח  $F$  היא פונקציה אנליטית ב-  $\mathbb{D}$ .

3/12/13

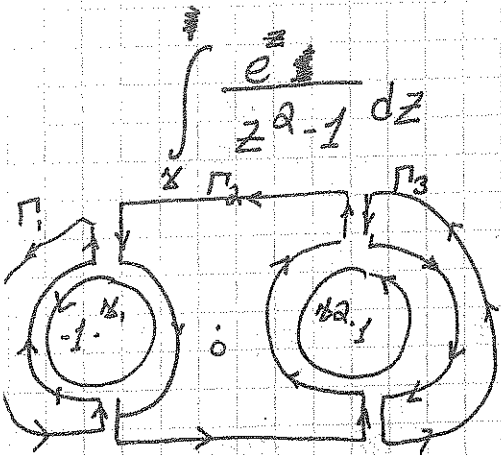
# 8 מ"ס פ"מ

שאלה: יהי  $U$  וקטוריות ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

$$\int_{\partial U} f = 0$$

$$\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!} = \int \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !



כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2-1} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz = 2\pi i \cdot g(1)$$

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

$$\int_{\gamma_2} \frac{g(z)}{z-1} dz = 2\pi i g(1)$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2-1} dz = \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z+1)(z-1)} dz = \int_{\gamma_2} \left( \frac{e^z}{z-1} \right) dz = 2\pi i g(-1) \rightarrow g(z) = \frac{e^z}{z-1}$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2-1} dz = -\frac{\pi i}{e} + \pi i e$$

$$z \in U \rightarrow |f(z)| \leq \max_{z \in \partial U} |f(z)|$$

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

כאן  $\frac{\partial \pi_i f^{(n)}(z)}{n!}$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !  $[f \in \text{Hol}(U)]$  ויהי  $f \in \text{Hol}(U)$  !

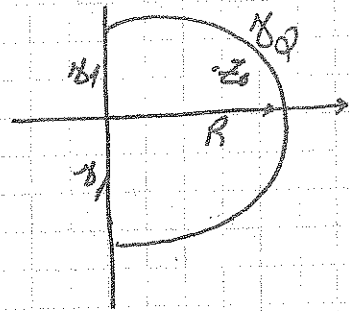
3/12/13

# 8 מילד, שני

$$|f_\epsilon(z)| = \frac{|f(it)|}{|(1+it)^\epsilon|} \leq f(it)$$

IN 196

מק"מ  $z=it$  כל כ: מחזק



יש כ' ש'ל ס'מון המקסימום:

$$|f_\epsilon(z_0)| \leq \sup_{|z| \leq R} |f_\epsilon| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sup_{|z| \leq R} |f|$$

ואם כ'  $f$  חסומה, ובמקרה של  $1+z$  של  $f$  ש'ם גדל חסומים חסומים אפס! קצתם בהחלט חסומים  $R$  מספיק גדול.

מ"כ  $f_\epsilon(z_0) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} f(z_0)$

מ"כ

$$|f(z_0)| \leftarrow |f_\epsilon(z_0)| \leq \sup_{\operatorname{Re} z = 0} |f_\epsilon| \leq \sup_{\operatorname{Re} z = 0} |f|$$

$$|f(z_0)| \leq \sup_{\operatorname{Re} z = 0} |f|$$

מ"כ

מ"כ  $A$   $|f(z)| \leq A + B|z|^n$

מ"כ  $f(z)$

מ"כ:  $f(z)$

מ"כ  $f(z)$  חסומה  $f(z)$  חסומה  $f(z)$  חסומה

מ"כ  $f(z)$  חסומה

מ"כ:  $f(z)$  חסומה  $f(z)$  חסומה  $f(z)$  חסומה

$z \in G$   $f(z)$  חסומה  $G$  חסומה

מ"כ:  $f(z)$  חסומה  $f(z)$  חסומה  $f(z)$  חסומה

$$f(z) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad t \in [0, 1]$$

מ"כ:  $f(z)$  חסומה

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{Re} f' + i \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{Im} f'$$

מ"כ:  $f(z)$  חסומה

$$\int_{z_1}^{z_2} \operatorname{Re} f' = \int_0^1 \operatorname{Re} f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) \cdot (z_2 - z_1) dt = \operatorname{Re}(z_2 - z_1) \neq 0$$

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) \cdot i \cdot b^R = i \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{Im} f'$$

מ"כ:  $f(z)$  חסומה

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) (k + ib) \neq 0$$

5/12/13

עמוד 8

הצגה:  $G$  מרחב פתוח,  $f \in H(G) \cap C(\bar{G})$  ! "למה" :  
 $z \in G$  נקודת פיתול  $\rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

כאן:

$F(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$  כאשר  $\gamma$  סגור,  $z$  נמצא בתוכו,  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו.

אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו.

הוכחה:

1)  $f \in H(G)$  :  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו,  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו.

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו.

אם  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  אז  $z_0 \in G$  ו-  $\text{dist}(z_0, \partial G) > \text{dist}(z, z_0)$  [כלומר  $z$  נמצא בתוכו]

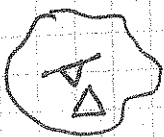
3) Moreau: [אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו]

אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו.

הוכחה: אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו.

$g' = f$  : אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו.

הצגה:  $G$  מרחב פתוח,  $I \subseteq G$  קטע,  $f \in H(G \setminus I) \cap C(\bar{G})$  ! אז  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו.



הוכחה: נסתכל על  $f$  בתוכו.

אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו.



אם  $f$  פונקציה אנליטית בתוכו, אז  $f(z) = F(z)$  לכל  $z$  בתוכו.

5/12/13

8 דצמבר

דבריו נוסח:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

4)  $f \in H(|z-z_0| < R)$  :  $\frac{1}{2}R < r < R$  אז

5) Liouville כולל

כל  $f \in H(\mathbb{C})$  נוסחה של  $f$  קבועה.  $[$  אין פה חשיבות כללית, הנוסחה הזו היא רק קבועה  $f$   $]$

דבריו: נניח  $M > 0$  וכל  $z \in \mathbb{C}$   $|f(z)| \leq M$

כל  $z_0 \in G$  אז

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

כל  $r$ !  $f'(z_0) = 0$  כל  $r$ !  $f$  פונקציה קבועה.

6) משפט יסודי של האגרוף: כל פולינום בעל מקדמים ממשיים אינו אפס

לפחות אינו אפס.

דבריו: נסמן  $P(z)$  פולינום ממעלה  $n$  ו-1 יש בו לפחות שורש אחד (אם הוא רציונלי)

" כל  $P(z)$  פולינום:  $z_1$  שורש של  $(z-z_1) | P(z)$  [נוסחה מאוחרת]

יה  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$

כל  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$  כאשר  $a_n \neq 0$  ו- $n$  הוא המעלה של  $P$  כל  $P$  אין שורשים.  $\frac{1}{P}$  פונקציה אנליטית בכל  $\mathbb{C}$ .

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |a_n z^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \rightarrow \infty$$

מקיים:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{P} = 0 \rightarrow \frac{1}{P} \text{ נוסחה}$$

כל:

כל  $P$  הוא פולינום ממעלה  $n$  איננו אפס.

כל  $P$  פונקציה אנליטית, קבועה, במעלה  $P$  אינו קבוע...

כל  $n$

משפט דה מורגאני

כל  $f \in H(G)$  ו- $f(a) = 0$  לכל  $a \in G$  אז  $f \equiv 0$  כל  $f^{(n)}(a) = 0$

כל  $f \equiv 0$  כל  $f^{(n)}(a) = 0$

[כלומר אם הפונקציה נכחדה בכל נקודה אחת אז היא נכחדה בכל  $G$ ]

דבריו:  $f^{(n)}(a) = 0$  כל  $n$  אין משמעות  $f$  פונקציה קבועה  $a$  נכחדה

משפט דה מורגאני: כל פונקציה אנליטית  $f$  שיש לה נקודה אחת בה היא נכחדה, היא נכחדה בכל  $G$ . משפט דה מורגאני: כל פונקציה אנליטית  $f$  שיש לה נקודה אחת בה היא נכחדה, היא נכחדה בכל  $G$ .