

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 9

2.5.11

נוסחאת קושי

יהי G תחום חסום עם שפה רגולרית ויהי $z \in G$. תהי $f \in \text{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

תרגיל. חשבו את

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz &= \frac{1}{2} \int_{|z|=2} e^z \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z+1} dz \end{aligned}$$

$f(z) = e^z$ הולומורפית בעיגול, רציפה עד השפה, $\pm 1 \in D_0(2)$, לכן מנוסחאת קושי:

$$\frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z+1} dz = \frac{2\pi i}{2} e^{+1} - \frac{2\pi i}{2} e^{-1}$$

תרגיל. הוכיחו כי לפונקציה $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ אין קדומה בתחום $|z| < \infty$.

טענה כללית: ל- f רציפה בתחום G יש קדומה $\Leftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ לכל γ סגורה. לכן נחפש מסילה γ שלאורכה $\int_{\gamma} \frac{z dz}{1+z^2} \neq 0$. נבחר $\gamma = \{|z|=2\}$. למה עיכול? כי קל לחשב.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{-2i} \left(\int_{|z|=2} \frac{z}{z+i} dz + \int \frac{z}{z-i} dz \right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2i} \right) \cdot (-i - i) \neq 0$$

תרגיל. חשבו את

$$\int_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z-1} dz$$

$|z| = 2$ לכן $\bar{z}z = 4$ לכן $\bar{z} = \frac{4}{z}$.
לכן,

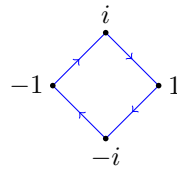
$$\int_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z-1} dz = \int_{|z|=2} \frac{4}{z(z-1)} dz = 4 \left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z} \right) = 42\pi i(1-1) = 0$$

באופן כללי בהינתן פונקציה רציפה על מסילה היינו רוצים להמשיך אותה לפונקציה אנליטית בסביבת המסילה. זה לא תמיד אפשרי בגלל שיש תנאי הכרחי: הפונקציה צריכה להיות C^∞ ובנוסף פיתוח לטור חזקות סביב כל נקודה. כל הפונקציות שפגשנו הן כאלו.

תרגיל. חשבו:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3} dz$$

כאשר γ היא:



פתרון. פונקציה שלמה: $\frac{z^2 \sin z}{z^3}$

$$\frac{z^2 \sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$R = \infty$, ולכן $\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{z^3} dz = 0$ כי $\mathbb{C}$ קמורה ו- γ סגורה.
נשאר לחשב

$\int \frac{e^z}{z^3} dz$. נוסחאת קושי לנגזרת:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{2!} (e^z)''(0) = \pi i$$

כלומר

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3} dz = \pi i$$

תרגיל. האם קיימת פונקציה הולומורפית $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש- $|f^{(n)}(0)| \geq n^{2n}$.

פתרון. לפונקציות ממשיות C^∞ עבור כל סדרה a_n קיימת $f \in C^\infty$ $f^{(n)}(0) = a_n$. לפי נוסחאת קושי, $G = D_{1/2}(0)$:

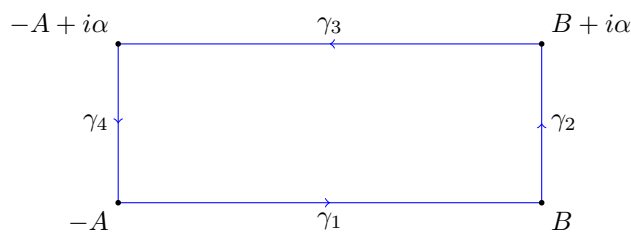
$$|f^{(n)}(0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\max_{|z| \leq \frac{1}{2}} |f|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} 2\pi \frac{1}{2} \leq Mn!2^n$$

נוסחאת סטירלינג: $\left(\frac{n}{e}\right)^n \approx n! \leq n^n$.
לכן, $|f^{(n)}(0)| \leq M(2n)^n$ כדרוש לא קיימת.

תרגיל. $f \in \text{Hol}(-a < \text{Im } z < a)$ $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$ בנוסף $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$ הוכיחו שלכל $a > 0$:

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} f(z) dz = I$$

הוכחה. נתבונן במלבן



f רציפה במלבן, רציפה עד השפה לכן

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \text{Length}(\gamma_2) \max_{z \in \gamma_2} |f| \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

כנ"ל גם

$$\int_{\gamma_4} f(z) dz \xrightarrow{B \rightarrow \infty} 0$$

לכן,

$$\lim_{B, A \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz \right) = 0$$

–1

$$\lim \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = I < \infty$$

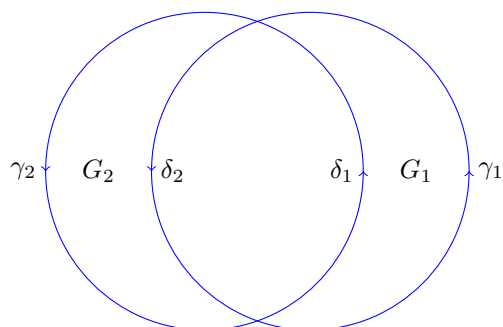
לכן, $\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} f(z) dz$ קיים וערכו I .

□

תרגיל. הוכיחו כי

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

הוכחה. נניח $a \geq b$, $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.



עבור פונקציה f הולומורפית ב- G ורציפה עד השפה:

$$\int_{\gamma_1 - \delta_1} f(z) dz = 0$$

לפי משפט קושי.
לכן,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\delta_1} f(z) dz$$

ובאותו אופן

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\delta_2} f(z) dz$$

ולכן,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz$$

ניחוש:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$\gamma'(t) = -a \sin t + ib \cos t, \gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin t + ib \cos t}{a \cos t + ib \sin t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t + ib \cos t)(a \cos t - ib \sin t)}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin t \cos t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt + i \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} &= \frac{1}{ab} \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \frac{1}{ab} \operatorname{Im} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{2\pi i} = \frac{2\pi}{ab} \end{aligned}$$

□

תרגיל. חשבו את $\int_{r \leq |z| \leq R} f(z) dx dy$ עבור $f \in \operatorname{Hol}(D_R) \cap C(\overline{D_R})$.

$$\int_{r \leq |z| \leq R} f(z) dx dy = \int_r^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

לפי משפט הערך הממוצע:

$$\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) d\theta = f(0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi f(0)$$

ולכן,

$$\int_r^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) d\theta = \int_r^R \rho d\rho 2\pi f(0) = 2\pi f(0) (R^2 - r^2)$$

ואז $A = \operatorname{Area}(r \leq |z| \leq R)$

$$f(0) = \frac{1}{A} \int_{r \leq |z| \leq R} f(z) dx dy$$