

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 8

11.4.11

אינטגרלים מרוכבים

תרגיל. f הולומרפית מ- $G \rightarrow \mathbb{C}$, G תחום קמור. $\operatorname{Re}(f') > 0$. הוכיחו כי f חח"ע.

פתרון. בגלל שיש נתון על הנגזרת, טבעי לעבוד עם אינטגרל. ניקח $z_1 \neq z_2 \in G$. בגלל שהתחום קמור, הקטע $[z_1, z_2]$ מוכל ב- G . נסמן: $\gamma(t) = z_2 + t(z_1 - z_2)$, $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \int_{[z_2, z_1]} f'(z) dz = \int_0^1 f'(\gamma(t)) \underbrace{(z_1 - z_2)}_{\gamma'(t)} dt = \\ &= (z_1 - z_2) \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt \end{aligned}$$

לפי ההגדרה,

$$\operatorname{Re} \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt = \int_0^1 \operatorname{Re}(f'(\gamma(t))) dt > 0$$

ולכן כאשר $z_1 \neq z_2$ מתקיים $f(z_1) - f(z_2) \neq 0$.

תרגיל. האם ניתן לקרב את $\bar{z}$ על S^1 במידה שווה ע"י פולינומים מרוכבים? כלומר האם

$$p_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{z \in S^1} \bar{z}$$

פתרון. לא. אם אפשר, עבור n מספיק גדול נקבל $|p_n(z) - \bar{z}| < \frac{1}{2}$, $\forall z \in S^1$. לכן,

$$\int_{S^1} |p_n(z) - \bar{z}| dz \leq \max_{S^1} |p_n(z) - \bar{z}| 2\pi < \pi$$

ל- p_n יש קדומה לכן,

$$\int_{S^1} p_n(z) dz = 0$$

אבל,

$$\int_{S^1} \bar{z} dz = 2\pi i$$

לכן,

$$\left| \int_{S^1} p_n(z) dz - \int_{S^1} \bar{z} dz \right| = 2\pi \leq \int_{S^1} |p_n(z) - \bar{z}| < \pi$$

סתירה.

תרגיל. האם אפשר לקרב במ"ש ע"י פולינומים ב- S^1 ב- $\bar{z}^2$?

פתרון. נניח בשלילה שכן, $p_n(z) \rightrightarrows \bar{z}^2 = \frac{1}{z^2}$.

$$\sup_{S^1} |p_n(z) - \frac{1}{z^2}| \rightarrow 0$$

ואז

$$\sup_{S^1} |zp_n(z) - \frac{1}{z}| \rightarrow 0$$

בסתירה לסעיף קודם.

הערה. אם $p_n(z) \rightrightarrows f(z)$ בשפה של תחום, f הולומורפית בתחום אז ההתכנסות היא בכל התחום.

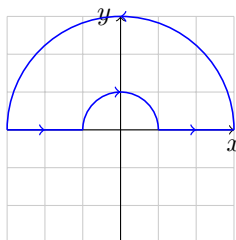
תרגיל.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

תרגיל בית:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

פתרון. נעבוד עם $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$. נבחר $f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}$ והחלק הממשי שלה הוא בדיוק $\frac{1 - \cos x}{x^2}$. $\operatorname{Re} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$. מסלול האינטגרציה: בשביל לבחור מסלול צריך להתחשב בשתי דברים: f הולומורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



נחשב את $\int_\gamma f(z) dz$ בשתי דרכים: $\gamma = \gamma_- + \gamma_\epsilon + \gamma_+ + \gamma_R$

$$f(z) = \frac{1 - (1 + iz + (iz)^2 + \dots)}{z^2} = -\frac{i}{z} + h(z)$$

כאשר $h(z)$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות אינסופי לכן h פונקציה שלמה.

$$\int_\gamma h(z) dz = 0$$

כי לטור חזקות יש פונקציה קדומה.

$$\int_{\gamma} \frac{-i}{z} dz = 0$$

כי יש פונקציה קדומה: $\frac{-i}{z} = -i(\log z)'$
 כאשר $\log z = \log |z| + i \arg z$ כאשר $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$,
 כעת,

$$\int_{\gamma_+} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R f(x) dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$\int_{\gamma_-} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - i \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

פונקציה אי זוגית, $\frac{\sin x}{x^2}$

$$\int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} = 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right\| &\leq \max_{\gamma_R} |f| L(\gamma_R) = \pi R \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z > 0} \left| \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{\pi R}{R^2} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z > 0} |1 + e^{iz}| = \frac{\pi}{R} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z > 0} |1 + e^{-\operatorname{Im} z}| \leq \frac{2\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz = \int_{\gamma_{\varepsilon}} \left[-\frac{i}{z} + h(z) \right] dz$$

$$\left| \int_{\gamma_{\varepsilon}} h(z) dz \right| \leq \underbrace{L(\gamma_{\varepsilon})}_{\pi \varepsilon} \underbrace{\max |h|}_{\text{חסום בסביבת הראשית}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

נבחר: $\tilde{\gamma}'_{\varepsilon}(t) = i\varepsilon e^{it}$, $\tilde{\gamma}_{\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{it}$ עם אוריינטציה נגד כיוון השעון.

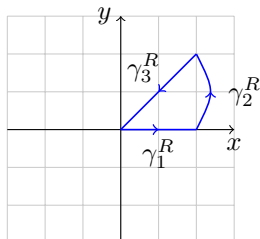
$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{-i}{z} dz = - \int_0^{\pi} \frac{-i}{\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it} dt = - \int_0^{\pi} 1 dt = -\pi$$

בסך הכל,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_+ + \gamma_-} f(z) dz + \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_{\varepsilon}} = \\ &= 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{1 - \cos x}{x^2} dx + \underbrace{\dots}_{\rightarrow 0} + (-\pi + \underbrace{\dots}_{\rightarrow 0}) \rightarrow 2I - \pi \end{aligned}$$

לכן, $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

נשלים תרגיל מהכיתה,



נחלק את γ_R לשתי מסילות: $\gamma_R = \gamma_\varepsilon + \gamma_{\pi/4-\varepsilon}$. נבחר $\varepsilon = \varepsilon(R)$ כך שהאינטגרלים ישאפו ל-0.

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \underbrace{\max_{\gamma_\varepsilon} |f|}_{\max_{\gamma_\varepsilon} |e^{-z^2}|=1} \underbrace{L(\gamma_\varepsilon)}_{R\varepsilon}$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right|$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{\pi/4-\varepsilon}} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4-\varepsilon} e^{-R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt \right| \leq \\ &\leq R \int_0^{\pi/4-\varepsilon} e^{-R^2 \operatorname{Re}(e^{2it})} dt = R \int_0^{\pi/4-\varepsilon} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \end{aligned}$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - 2t < 2\varepsilon, 0 < \frac{\pi}{2} - 2t < \frac{\pi}{2}$$

$$R \int_0^{\pi/4-\varepsilon} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \leq \int_0^{\pi/4-\varepsilon} e^{-R^2(\pi/2-2t)} dt \leq \frac{\pi}{2} e^{-4/\pi \varepsilon R^2}$$

ובחריה של $\varepsilon = \frac{1}{R^{3/2}}$ וזה ישאיף את שני האינטגרלים ל-0.

$$\cos 2t = \sin(\pi/2 - 2t) \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right)$$