

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 7

4.4.11

טורי חזקות

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

נשים לב שבממשיים:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

היא חלקה $C^\infty(\mathbb{R})$ אבל בלי פיתוח פטור חזקות סביב 0. זה לא קורה מעל $\mathbb{C}$: לכל פונקציה הולומורפית יש טור חזקות (אבל עוד לא הוכחנו את זה).

1. רדיוס התכנסות: $\sqrt[n]{|a_n|}$: $R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty}$. זאת נוסחאת קושי אדמר. אם קיים הגבול הבא אז נכון גם: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

מה פירוש רדיוס ההתכנסות? בדיסק $\{|z| < R\}$ יש התכנסות בהחלט ובמ"ש מקומית.

2. $f(z)$ פונקציה הולומורפית ב- $\{|z| < R\}$ ואפשר לגזור איבר איבר. ואז $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ עם אותו רדיוס התכנסות. לכן f גזירה אינסוף פעמים במובן המרוכב.

3. אינטגרבילית איבר איבר ושוב אותו רדיוס התכנסות.

תרגיל.

$$\sum_{p \text{ ראשוני}} z^p$$

מצאו את רדיוס ההתכנסות.

פתרון.

$$R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{1} = 1$$

לכן $R = 1$.

תרגיל. מצאו פיתוח לטור חזקות של $\frac{e^z}{z-1}$.

פתרון. דרך ראשונה:

$$\frac{e^z}{z-1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

לכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n-1} - c_n)$$

כאשר $c_{-1} = 0$. נחפש c_n כך ש- $c_{n-1} - c_n = \frac{1}{n}$. ניקח $c_n = -(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!})$ באופן כללי:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$a_0 \neq 0$. אחרי העברת אגפים:

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$$

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$$

וכן. אם b_0 הפיך אז למערכת האינסופית יש פתרון. רדיוס ההתכנסות של המנה: יכול להיות כל דבר

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n} = 1$$

ואז $R = \infty$. מצד שני:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \dots$$

וכאן הרדיוס הוא $R = 1$. הערה על מכפלת טורים:

$$\sum a_n z^n \cdot \sum b_m z^m = \sum z^k \sum_{n+m=k} a_n b_m$$

$R_a \leq R_b$ ואז רדיוס ההתכנסות של המכפלה הוא לפחות R_a . הרדיוס יכול גם לקפוץ, למשל:

$$\underbrace{1}_{R=\infty} = \frac{1}{1-z} \cdot (1-z) = \underbrace{(1+z+\dots)}_{R=1} \underbrace{(1-z)}_{R=\infty}$$

ייתכן אפילו ש-

$$\sum a_n z^n \cdot \sum a_n z^n = \sum A_n z^n$$

$$\sqrt{1-z}\sqrt{1-z} = \underbrace{1-z}_{R=\infty}$$

אבל הרדיוס של $\sqrt{1-z}$ הוא 1 מהבינום של ניוטון.

תרגיל. כתבו טור חזקות סביב 0 עבור $f(z) = \text{Log}(1-z)$. מצאו רדיוס התכנסות.

פתרון. $f'(z) = -\frac{1}{1-z} = -(1+z+z^2+\dots)$. רדיוס ההתכנסות 1. אפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר:

$$f(z) = -(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots) + c$$

נמצא את c .

$$f(0) = -0 + c = \text{Log}(1-0) = 0$$

לכן $c = 0$. רדיוס ההתכנסות יישאר 1 גם אחרי אינטגרציה.

תרגיל. טור חזקות עבור $\frac{1}{z-1}$ סביב $z = 3$.

פתרון.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z-3+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \frac{z-3}{2} + (\frac{z-3}{2})^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-3)^n \end{aligned}$$

רדיוס ההתכנסות:

$$R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

לכן רדיוס ההתכנסות הוא 2.

באופן לא רשמי, רדיוס ההתכנסות הוא המרחק מנקודת הפיתוח עד לנקודה לא הולומורפית ראשונה. וזה מה שרואים כאן.

אקספוננציאל של טורי חזקות

$$e^{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

נניח של- $\sum a_n z^n$ רדיוס התכנסות $R > 0$. ניקח $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

$$P_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

$$e^{f(z)} = e^{P_N(z)} e^{\overbrace{f(z) - P_N(z)}^{a_{N+1}z^{N+1} + \dots}}$$

בגלל שרידוס ההתכנסות חיובי אז $a_{N+1}z^{N+1} + \dots = O(z^{N+1})$ לכן,

$$\begin{aligned} e^{P_N(z)} e^{f(z) - P_N(z)} &= e^{a_0} e^{a_1 z} \dots e^{a_N z^N} (1 + O(z^{N+1})) = \\ &= e^{a_0} (1 + a_1 z + \frac{a_1^2 z^2}{2!} + \dots) \cdot (1 + a_2 z^2 + \frac{a_2^2 z^4}{2!} + \dots) \dots = \\ &= e^{a_0} \sum z^k (\frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdot \frac{a_2^{m_2}}{m_2!} \dots a_k^{m_k} m_k!) \end{aligned}$$

$k = m_1 + 2m_2 + \dots + lm_l + \dots$.
לכן זה שווה לטור שכתבנו $+ O(z^N + 1)$. וזה טור פורמלי.
הערה. אפריורי הטור יכול לא להתכנס האף נקודה. בפועל זה לא קורה כי e^f הולומורפית.

תרגיל. תרגיל 3 שאלה 4.

$f = u + iv$ שלמה ונתון $u^2 - 2v^2 = c$. צריך להראות שהפונקציה קבועה.

פתרון. כותבים משוואות קושי רימן ומקבלים:

בכל נקודה $z \in \mathbb{C}$ מתרחשת אחת האפשרויות: $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ או ש-
 $(II) u = v = 0$.

נראה שאחת האפשרויות מתרחשת בכל $\mathbb{C}$.

נגדיר $A = \{z : (u, v) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus 0)$.

A קבוצה פתוחה. אם $A = \emptyset$ אז $f = 0$ וסיימנו.

אם $A = \mathbb{C}$ אנחנו במקרה I ושוב סיימנו. אחרת, נפרק את A לרכיבי קשירות. $A = \bigcup A_i$

A_i פתוחה וקשירה לכל i . עבור i מסויים נבחר $z_0 \in \partial A_i$ ולפי ההנחה $\partial A_i \neq 0$. אז f

קבועה ב- A_i כי $\nabla f \equiv 0$ בקבוצה קשירה.

נבחר $A_i \ni z_n \rightarrow z_0 \in \partial A_i$. $f(z_n) \rightarrow f(z_0) = 0$. $(z_0 \notin A)$ לכן $0 \equiv f_{A_i}$ לכל i ולכן

הפונקציה זהותית 0.

1 אינטגרלים מרוכבים

הגדרה.

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

תרגיל. חשבו את:

$$\int_{S_1} \bar{z}^2 dz$$

פתרון. $0 \leq t \leq 2\pi$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$

$$\gamma'(t) = ie^{it}$$

$$\int_{S^1} \bar{z}^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{-2it} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = i \frac{e^{-it}}{-i} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

חישוב בדרך אחרת:

$$\int_{S^1} = \int_{S^1} \left(\frac{1}{z}\right)^2 dz = \left(-\frac{1}{z}\right) \Big| = 0$$